

中外物理学精品书系

前沿系列 · 8

大气动力学

(第二版)

下册

刘式适 刘式达 编著



中外物理学精品书系·前沿系列 8

大气动力学（第二版）

刘式适 1938 年生，1956 年至 1962 年在北京大学物理系、地球物理系学习，毕业后留校任教至今。主讲“大气动力学”、“特殊函数”、“非线性波”等课程。现任北京大学教授、博士生导师。在国内外主要学术刊物上发表了 100 多篇论文，主要著作有《特殊函数》、《地球流体力学中的数学问题》、《大气动力学》、《非线性大气动力学》等，其中《大气动力学》获 1995 年国家教委优秀教材一等奖。获国家自然科学奖两次（1991,1997），光华科技基金奖一次（1995），国家教委科技进步奖三次（1990,1996,1997）。

刘式达 1938 年生，1956 年至 1962 年在北京大学物理系、地球物理系学习，毕业后留校任教至今。主讲“大气湍流”、“自然界中的复杂现象和混沌”、“分形和分维”等课程。曾任地球物理系系主任，现任北京大学教授、博士生导师。在国内外主要学术刊物上发表了 100 多篇论文，主要著作有《分形和分维引论》、《地球流体力学中的数学问题》、《孤波和湍流》、《非线性大气动力学》等。“非线性大气动力学若干问题的研究”获国家自然科学三等奖（1991），获光华科技基金奖一次（1997），国家教委科技进步奖三次（1990,1996,1997）。



ISBN 978-7-301-16158-6

定价：99.00元

中 外 物 理 学 精 品 书 系

前 沿 系 列 · 8

大气动力学

（第二版）

下册

刘式适 刘式达 编著



下 册 目 录

第八章　波的传播理论 …… (315)
§8.1　缓变波列(slowly varying wave train) …… (315)
§8.2　波能密度及其守恒原理 …… (318)
§8.3　波作用量及其守恒原理 …… (322)
§8.4　波的多尺度方法 …… (326)
§8.5　Rossby 波的传播图像 …… (329)
§8.6　Rossby 波的经向和垂直传播 …… (333)
§8.7　Rossby 波的动量和热量输送 …… (335)
§8.8　Rossby 波的演变，波与基本气流的相互作用 …… (338)
§8.9　E-P 通量(Eliassen-Palm flux) …… (345)
§8.10　东西风带和经圈环流的维持 …… (348)
§8.11　Rossby 波的共振相互作用 …… (351)
复习思考题 …… (357)
习题 …… (358)

第九章　非线性波动 …… (362)
§9.1　波动方程的特征线，Riemann 不变量 …… (362)
§9.2　浅水波的 KdV(Korteweg de Vries)方程和 Boussinesq 方程 …… (369)
§9.3　非线性的作用：波的变形 …… (373)
§9.4　耗散的作用，Burgers 方程的求解，冲击波(shock waves) …… (377)
§9.5　频散的作用，KdV 方程的求解，椭圆余弦波(cnoidal waves)与孤立波(solitary waves) …… (380)
§9.6　正弦-Gordon 方程的周期解、扭结波(kink waves)与反扭结波(anti-kink waves) …… (390)
§9.7　试探函数法(trial function method)，双曲函数展开法(hyperbolic function expansion method) …… (395)
§9.8　Jacobi 椭圆函数展开法(Jacobi elliptic function expansion method) …… (401)

§9.9 非线性 Schrödinger 方程的包络周期波(envelope periodic waves)与包络孤立波(envelope solitary waves) …… (407)
§9.10 非线性波的波参数 …… (409)
§9.11 奇异摄动法(singular perturbation method) …… (412)
§9.12 约化摄动法(reductive perturbation method) …… (414)
§9.13 幂级数展开法(power series expansion method) …… (424)
§9.14 Bäcklund 变换 …… (428)
§9.15 散射反演法(inverse scattering method) …… (436)
§9.16 非线性方程的守恒律 …… (448)
§9.17 准地转位涡度方程的偶极子(modon)解 …… (450)
复习思考题 …… (454)
习题 …… (454)

第十章 大气中的能量平衡 …… (462)
§10.1 基本气流能量与扰动能量 …… (462)
§10.2 能量平衡方程 …… (464)
§10.3 基本气流动能与扰动动能的平衡方程 …… (466)
§10.4 基本气流有效势能与扰动有效势能的平衡方程 …… (467)
§10.5 能量间的相互转换 …… (469)
§10.6 大气能量循环 …… (473)
§10.7 能量转换与 Richardson 数 …… (474)
§10.8 湍流的串级(cascade)与能谱(energy spectrum) …… (475)
复习思考题 …… (476)
习题 …… (477)

第十一章 流动的稳定性 …… (478)
§11.1 稳定性的基本概念 …… (478)
§11.2 重力波的稳定度 …… (481)
§11.3 惯性-重力波的稳定度 …… (492)
§11.4 Rossby 波的稳定度 …… (511)
§11.5 临界层问题 …… (529)
§11.6 非线性稳定度 …… (531)
§11.7 常微分方程的稳定性理论 …… (540)
§11.8 气候系统的平衡态(equilibrium states) …… (558)
§11.9 大气流场的拓扑(topology)结构 …… (561)
复习思考题 …… (568)

习题 …… (568)

第十二章 地转适应理论 …… (575)

§12.1 适应过程和演变过程的基本概念 …… (575)

§12.2 适应过程和演变过程的可分性 …… (576)

§12.3 适应过程的物理分析 …… (580)

§12.4 正压地转适应过程 …… (583)

§12.5 斜压地转适应过程 …… (590)

§12.6 天气形势变化的分解、演变过程和适应过程的联结 …… (595)

复习思考题 …… (600)

习题 …… (600)

第十三章 低纬大气动力学 …… (604)

§13.1 低纬大气运动的主要特征 …… (604)

§13.2 低纬大尺度运动的尺度分析 …… (605)

§13.3 低纬大气风场与气压场的关系 …… (609)

§13.4 低纬大气的惯性振动 …… (610)

§13.5 低纬大气 Kelvin 波 …… (612)

§13.6 低纬大气的一般线性波动 …… (615)

§13.7 积云对流加热参数化 …… (624)

§13.8 台风中惯性-重力内波的不稳定 …… (628)

§13.9 第二类条件不稳定(CISK)和台风的发展 …… (630)

§13.10 台风的结构 …… (636)

§13.11 非绝热波动(diabatic waves) …… (639)

复习思考题 …… (644)

习题 …… (645)

第八章　波的传播理论

本章的主要内容有：

分析缓变波列的主要性质，同时引进局地波的参数和运动学关系；

介绍波能密度和波能通量矢量的概念，并建立波能密度守恒原理；

引进 Lagrange 量和波作用量，并根据波能密度守恒原理导出波作用量守恒原理；

介绍波的多尺度方法，并综合运用小参数方法，一并导出波的频率方程和波作用守恒原理；

介绍 Rossby 波传播的一些特征和对动量、热量的输送；

叙述 E-P 通量和用它来讨论东西风带和经圈环流；

分析波与基本气流间的相互作用和大气扰动演变的特征；

分析波与波之间的相互作用.

§8.1　缓变波列(slowly varying wave train)

由上一章分析知：波列与单波不同，其振幅也随空间和时间缓慢地变化，因而，不能像单波那样，仅用一个简单的正弦或余弦函数来表征. 事实上，只有在严格的均匀介质(在均匀介质中，基本参数，如 N^2，$\bar{u}$ 等均认为是常数)中，正弦函数或余弦函数才是正交模，而且在均匀介质中，波动的参数 k,l,n,ω 等也是常数；对于非均匀介质(其中基本参数 N^2，$\bar{u}$ 等均为变量)中的波动(波参数 k,l,n,ω 等也为变量)，不能再用正余弦函数来表征. 不过，波群或缓变波列的分析，为我们讨论非均匀介质中的波提供了一个很好的近似.

据波列分析，我们把非均匀介质中的波表示为下列缓变波列：

$$\psi = A(\boldsymbol{r},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{r},t)}, \tag{8.1}$$

其中振幅函数 $A(\boldsymbol{r},t)$ 随 $\boldsymbol{r},t$ 缓慢变化；$\theta(\boldsymbol{r},t)$ 是相位函数. 由于 $A(\boldsymbol{r},t)$ 是缓变函数，在一个局部范围内，仍可视 A 为常数，所以，在局部范围内，(8.1)式也可认为是单波. 正由于此，缓变波列中的波参数(波数和圆频率等)都具有局地性. 为此，我们定义缓变波列的局地频率为

$$\omega(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial\theta}{\partial t}, \tag{8.2}$$

而缓变波列在 x,y,z 方向上的局地波数分别定义为

$$\begin{cases} k(\boldsymbol{r},t) = \dfrac{\partial\theta}{\partial x}, \\ l(\boldsymbol{r},t) = \dfrac{\partial\theta}{\partial y}, \\ n(\boldsymbol{r},t) = \dfrac{\partial\theta}{\partial z}. \end{cases} \tag{8.3}$$

相应，局地波矢量为

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r},t) = k\boldsymbol{i} + l\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k} = \nabla\theta. \tag{8.4}$$

将(8.1)式分别对 t,x,y,z 微商有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial t} + \mathrm{i}\dfrac{\partial\theta}{\partial t}\right)\psi = \left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial t} - \mathrm{i}\omega\right)\psi, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} = \left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right)\psi = \left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial x} + \mathrm{i}k\right)\psi, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = \left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial y} + \mathrm{i}\dfrac{\partial\theta}{\partial y}\right)\psi = \left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial y} + \mathrm{i}l\right)\psi, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial z} = \left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial z} + \mathrm{i}\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\right)\psi = \left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial z} + \mathrm{i}n\right)\psi. \end{cases} \tag{8.5}$$

因为在缓变波列中，相对于相位而言，振幅是缓变的，所以，由上式知，缓变波列意味着

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t} \ll |\omega|, \quad \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x} \ll |k|, \quad \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y} \ll |l|, \quad \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial z} \ll |n|. \tag{8.6}$$

这样，(8.5)式可近似为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial t} \approx -\mathrm{i}\omega\psi, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} \approx \mathrm{i}k\psi, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \approx \mathrm{i}l\psi, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \approx \mathrm{i}n\psi. \end{cases} \tag{8.7}$$

这实际上是把(8.1)式中的 A 近似视为常数. 或者说，在局部范围内，缓变波列仍可以用正余弦函数去近似.

由(8.2)式和(8.3)式，我们可以得到缓变波列的下述运动学关系

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial x} = -\dfrac{\partial k}{\partial t}, \quad \dfrac{\partial\omega}{\partial y} = -\dfrac{\partial l}{\partial t}, \quad \dfrac{\partial\omega}{\partial z} = -\dfrac{\partial n}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial k}{\partial y} = \dfrac{\partial l}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial k}{\partial z} = \dfrac{\partial n}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial l}{\partial z} = \dfrac{\partial n}{\partial y}. \end{cases} \tag{8.8}$$

类似，我们定义缓变波列的局地频散关系为

$$\omega = \Omega(\boldsymbol{K}; \boldsymbol{r}, t), \tag{8.9}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 按(8.4)式也是 $\boldsymbol{r}$ 和 t 的函数.上式通常是由扰动方程导得的.

由(8.2)式和(8.9)式,我们可以定义缓变波列的局地相速度和群速度分别是

$$\boldsymbol{c} = \frac{\omega}{\boldsymbol{K}} = \frac{\omega}{K^2}\boldsymbol{K}, \tag{8.10}$$

$$\boldsymbol{c}_g = \frac{\partial\Omega}{\partial\boldsymbol{K}} = c_{gx}\boldsymbol{i} + c_{gy}\boldsymbol{j} + c_{gz}\boldsymbol{k}, \tag{8.11}$$

其中

$$c_{gx} = \frac{\partial\Omega}{\partial k}, \quad c_{gy} = \frac{\partial\Omega}{\partial l}, \quad c_{gz} = \frac{\partial\Omega}{\partial n}. \tag{8.12}$$

由(8.9)式,根据复合函数的微商法则求得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial t} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial t} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial k}\dfrac{\partial k}{\partial t} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial l}\dfrac{\partial l}{\partial t} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial n}\dfrac{\partial n}{\partial t} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial t} + c_{gx}\dfrac{\partial k}{\partial t} + c_{gy}\dfrac{\partial l}{\partial t} + c_{gz}\dfrac{\partial n}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial x} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial x} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial k}\dfrac{\partial k}{\partial x} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial l}\dfrac{\partial l}{\partial x} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial n}\dfrac{\partial n}{\partial x} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial x} + c_{gx}\dfrac{\partial k}{\partial x} + c_{gy}\dfrac{\partial l}{\partial x} + c_{gz}\dfrac{\partial n}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial y} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial y} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial k}\dfrac{\partial k}{\partial y} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial l}\dfrac{\partial l}{\partial y} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial n}\dfrac{\partial n}{\partial y} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial y} + c_{gx}\dfrac{\partial k}{\partial y} + c_{gy}\dfrac{\partial l}{\partial y} + c_{gz}\dfrac{\partial n}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial z} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial z} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial k}\dfrac{\partial k}{\partial z} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial l}\dfrac{\partial l}{\partial z} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial n}\dfrac{\partial n}{\partial z} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial z} + c_{gx}\dfrac{\partial k}{\partial z} + c_{gy}\dfrac{\partial l}{\partial z} + c_{gz}\dfrac{\partial n}{\partial z}. \end{cases} \tag{8.13}$$

利用(8.8)式,(8.13)式可改写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial t} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial t} - \boldsymbol{c}_g \cdot \nabla\, \omega, \\ -\dfrac{\partial k}{\partial t} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial x} + \boldsymbol{c}_g \cdot \nabla\, k, \\ -\dfrac{\partial l}{\partial t} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial y} + \boldsymbol{c}_g \cdot \nabla\, l, \\ -\dfrac{\partial n}{\partial t} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial z} + \boldsymbol{c}_g \cdot \nabla\, n, \end{cases} \tag{8.14}$$

或

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{D}_g\omega}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial t}, \\ \dfrac{\mathrm{D}_g k}{\mathrm{D}t} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \dfrac{\mathrm{D}_g l}{\mathrm{D}t} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ \dfrac{\mathrm{D}_g n}{\mathrm{D}t} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}, \end{cases} \tag{8.15}$$

其中后三式可合写为

$$\frac{\mathrm{D_g}\boldsymbol{K}}{\mathrm{D}t}=-\nabla\Omega,\tag{8.16}$$

在上两式中

$$\frac{\mathrm{D_g}}{\mathrm{D}t}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{c}_g\cdot\nabla.\tag{8.17}$$

(8.15)式和(8.16)式表明：在非均匀介质的波动中，圆频率 ω 和波数（或波矢）在按群速度移动的过程中是不守恒的．同样，波能也不会守恒（详见§8.8）．

对于均匀介质中的波动，ω 与 $\boldsymbol{r}$，t 无关，(8.9)式化为

$$\omega=\Omega(\boldsymbol{K}).\tag{8.18}$$

这样，(8.15)式和(8.16)式分别写为

$$\frac{\mathrm{D_g}\omega}{\mathrm{D}t}=0,\quad\frac{\mathrm{D_g}k}{\mathrm{D}t}=0,\quad\frac{\mathrm{D_g}l}{\mathrm{D}t}=0,\quad\frac{\mathrm{D_g}n}{\mathrm{D}t}=0,\tag{8.19}$$

$$\frac{\mathrm{D_g}\boldsymbol{K}}{\mathrm{D}t}=0.\tag{8.20}$$

这些都表明：在均匀介质的波动中，圆频率 ω 和波数（或波矢）在按群速度移动的过程中是守恒的．所以，在均匀介质中，群速度 $\boldsymbol{c}_g$ 也是波矢 $\boldsymbol{K}$ 的传播速度．事实上，若介质在空间和时间上都是均匀的，则圆频率和波数都是常量．

§8.2　波能密度及其守恒原理

下面，我们以正压模式为例，说明波能密度的概念和波能密度守恒原理．

一、惯性-重力外波

线性的正压模式方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-f_0v=-\dfrac{\partial\phi'}{\partial x},\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial t}+f_0u=-\dfrac{\partial\phi'}{\partial y},\\[2mm]\dfrac{\partial\phi'}{\partial t}+c_0^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=0.\end{cases}\tag{8.21}$$

对于惯性-重力外波，f 为常数；就写为 f_0．将方程组(8.21)的前两式化为涡度方程和散度方程，则方程组(8.21)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}+f_0D=0,\\[2mm]\dfrac{\partial D}{\partial t}-f_0\zeta=-\nabla_h^2\phi',\\[2mm]\dfrac{\partial\phi'}{\partial t}+c_0^2D=0.\end{cases}\tag{8.22}$$

方程组(8.22)通过消元很易求得

$$\mathscr{L}D=0,\tag{8.23}$$

其中

$$\mathscr{L}\equiv\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_0^2\nabla_h^2+f_0^2.\tag{8.24}$$

因由方程组(8.22)的第三式，$D=-\dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{\partial\phi'}{\partial t}$，则对 ϕ' 也有方程

$$\mathscr{L}\phi'=0.\tag{8.25}$$

方程(8.23)或(8.25)即是 Klein-Gordon 方程. 以单波解代入方程(8.25)求得惯性-重力外波的频散关系为

$$\omega^2=K_h^2c_0^2+f_0^2.\tag{8.26}$$

相应求得群速度在 x,y 方向上的分量是

$$c_{gx}\equiv\frac{\partial\omega}{\partial k}=\frac{kc_0^2}{\omega},\quad c_{gy}\equiv\frac{\partial\omega}{\partial l}=\frac{lc_0^2}{\omega}.\tag{8.27}$$

为了方便，令

$$\psi=\phi'/f_0,\tag{8.28}$$

则方程(8.25)化为

$$\mathscr{L}\psi=0.\tag{8.29}$$

以$\dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}$乘方程(8.29)的两端，注意

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{1}{2c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}(-c_0^2\nabla_h^2\psi)&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_h\psi)^2-\nabla_h\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla_h\psi\right),\end{aligned}$$

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}(f_0^2\psi)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\lambda_0^2\psi^2,$$

则方程(8.29)化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{c_0^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2+(\nabla_h\psi)^2+\lambda_0^2\psi^2\right]\right\}+\nabla_h\cdot\left(-\frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla_h\psi\right)=0,\tag{8.30}$$

这是惯性-重力外波的能量方程. 其中$\frac{1}{2c_0^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$ 相当于垂直运动动能，$\frac{1}{2}(\nabla_h\psi)^2$ 和 $\lambda_0^2\psi^2$ 分别是水平运动动能和重力势能.

设 ψ 是一缓变波列，即

$$\psi = \mathrm{Re}\{A(x,y,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x,y,t)}\} = a\cos(\theta+\alpha), \tag{8.31}$$

其中

$$a = |A|, \quad \alpha = \arg A, \quad \theta = kx + ly - \omega t. \tag{8.32}$$

作为缓变波列的第一近似，忽略 a 和 α 的变化，同时忽略 ω,k,l 的变化.

由(8.31)式得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial t} = \omega a\sin(\theta+\alpha), \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} = -ka\sin(\theta+\alpha), \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = -la\sin(\theta+\alpha). \end{cases} \tag{8.33}$$

因而，惯性-重力外波的总能量为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{c_0^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 + (\nabla_h\psi)^2 + \lambda_0^2\psi^2\right] \\ &= \frac{1}{2c_0^2}(\omega^2 + K_h^2c_0^2)a^2\sin^2(\theta+\alpha) + \frac{1}{2}\lambda_0^2a^2\cos^2(\theta+\alpha); \end{aligned} \tag{8.34}$$

而能量通量矢量为

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla_h\psi = \omega\boldsymbol{K}_h a^2\sin^2(\theta+\alpha). \tag{8.35}$$

这样，能量方程(8.30)可改写为

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla_h\cdot\boldsymbol{F} = 0. \tag{8.36}$$

因为 $\cos^2(\theta+\alpha)$和 $\sin^2(\theta+\alpha)$在一个周期 $T=2\pi/\omega$ 内的平均值为 1/2，即

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(\theta+\alpha)\mathrm{d}t &= \frac{1}{\omega T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos^2(kx+ly+\alpha-\omega t)\mathrm{d}\omega t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}[1+\cos 2(kx+ly+\alpha-\omega t)]\mathrm{d}\omega t = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T\sin^2(\theta+\alpha)\mathrm{d}t &= \frac{1}{\omega T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2(kx+ly+\alpha-\omega t)\mathrm{d}\omega t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}[1-\cos 2(kx+ly+\alpha-\omega t)]\mathrm{d}\omega t = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

因而将(8.34)式和(8.35)式在一个周期 $T=2\pi/\omega$ 内求平均得到惯性-重力外波在

一个周期 T 内能量和能通量矢量的平均值分别为

$$\begin{cases}\mathscr{E}=\dfrac{1}{4c_0^2}(\omega^2+K_h^2c_0^2+f_0^2)a^2,\\ \vec{\mathscr{F}}=\dfrac{1}{2}\omega a^2\boldsymbol{K}_h.\end{cases}\tag{8.37}$$

以(8.26)式和(8.27)式代入，则有

$$\begin{cases}\mathscr{E}=\dfrac{1}{2c_0^2}(K_h^2c_0^2+f_0^2)a^2=\dfrac{1}{2}(K_h^2+\lambda_0^2)a^2=\dfrac{1}{2c_0^2}\omega^2a^2,\\ \vec{\mathscr{F}}=\mathscr{E}\boldsymbol{c}_g,\end{cases}\tag{8.38}$$

$\mathscr{E}$ 称为波能密度，$\vec{\mathscr{F}}$ 称为波能通量密度矢量. 这样，能量方程(8.36)在一个周期 T 内的平均为

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}+\nabla_h\cdot\mathscr{E}\boldsymbol{c}_g=0.\tag{8.39}$$

上式表明：波能密度的时间变化在均匀介质中完全决定于波能通量密度矢量的散度.

二、正压 Rossby 波

线性正压 Rossby 波满足方程

$$\mathscr{L}\psi=0,\tag{8.40}$$

其中

$$\mathscr{L}\equiv\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_h^2-\lambda_0^2)+\beta_0\frac{\partial}{\partial x}.\tag{8.41}$$

以 ψ 乘方程(8.40)两端得到正压 Rossby 波的能量方程是

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}[(\nabla_h\psi)^2+\lambda_0^2\psi^2]\right\}+\nabla_h\cdot\left[-\psi\nabla_h\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\frac{\beta_0}{2}\psi^2\boldsymbol{i}\right]=0,\tag{8.42}$$

这也就是第六章的方程(6.91).

由方程(8.40)求得正压 Rossby 波的频散关系为

$$\omega=-\beta_0k/(K_h^2+\lambda_0^2).\tag{8.43}$$

相应

$$c_{gx}=\frac{\beta_0(k^2-l^2-\lambda_0^2)}{(K_h^2+\lambda_0^2)^2},\quad c_{gy}=\frac{2\beta_0kl}{(K_h^2+\lambda_0^2)^2}.\tag{8.44}$$

类似，设 ψ 是一缓变波列：

$$\psi=a\cos(\theta+\alpha),\tag{8.45}$$

则求得正压 Rossby 波的总能量为

$$E\equiv\frac{1}{2}[(\nabla_h\psi)^2+\lambda_0^2\psi^2]=\frac{1}{2}K_h^2a^2\sin^2(\theta+\alpha)+\frac{1}{2}\lambda_0^2a^2\cos^2(\theta+\alpha);\tag{8.46}$$

而能量通量矢量为

$$\boldsymbol{F} \equiv -\psi \nabla_{\mathrm{h}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \frac{\beta_0}{2}\psi^2 \boldsymbol{i} = -\left(\omega \boldsymbol{K}_{\mathrm{h}} + \frac{\beta_0}{2}\boldsymbol{i}\right) a^2 \cos^2(\theta + \alpha). \tag{8.47}$$

E 和 $\boldsymbol{F}$ 在一个周期内的平均值，即波能密度和波能通量密度矢量分别是

$$\begin{cases} \mathscr{E} = (K_{\mathrm{h}}^2 + \lambda_0^2) a^2 / 4, \\ \vec{\mathscr{F}} = \left(\omega \boldsymbol{K}_{\mathrm{h}} + \frac{\beta_0}{2}\boldsymbol{i}\right) a^2 \Big/ 2. \end{cases} \tag{8.48}$$

利用(8.43)式和(8.44)式有

$$\begin{cases} \mathscr{E} = -a^2 \beta_0 k / 4\omega, \\ \vec{\mathscr{F}} = \mathscr{E} \boldsymbol{c}_{\mathrm{g}}. \end{cases} \tag{8.49}$$

因而，能量方程(8.42)在一个周期 T 内的平均值为

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} + \nabla_{\mathrm{h}} \cdot \mathscr{E} \boldsymbol{c}_{\mathrm{g}} = 0. \tag{8.50}$$

这与方程(8.39)在形式上完全一样.

由上两例分析可知：对于线性波动，作为缓变波列的第一近似，它有许多共同的特征. 首先，波能密度 $\mathscr{E}$ 都可以表为

$$\mathscr{E} = f(\boldsymbol{K}) a^2, \tag{8.51}$$

其中 $f(\boldsymbol{K})$ 依赖于波的性质. 其次，对均匀介质中的波动，波能密度遵守守恒原理：

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathscr{E} \boldsymbol{c}_{\mathrm{g}} = 0. \tag{8.52}$$

将(8.51)式代入(8.52)式，注意均匀介质的(8.20)式，则得

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \nabla \cdot a^2 \boldsymbol{c}_{\mathrm{g}} = 0. \tag{8.53}$$

这是能量以群速度 $\boldsymbol{c}_{\mathrm{g}}$ 传播的基本表达式.

§8.3　波作用量及其守恒原理

我们仍以正压模式为例，说明波作用量的概念和波作用量守恒原理.

一、惯性-重力外波

若令

$$\psi_t \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \psi_x \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi_y \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \psi_z \equiv \frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{8.54}$$

则惯性-重力外波的方程(8.29)可以写为

$$F(t, x, y; \psi, \psi_t, \psi_x, \psi_y) = 0, \tag{8.55}$$

其中

$$F(t,x,y;\psi,\psi_t,\psi_x,\psi_y) \equiv \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial \psi_x}{\partial t} - \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right) + \lambda_0^2 \psi. \tag{8.56}$$

由变分原理知，在任意区域 R 上的泛函

$$J[\psi] = \iiint\limits_R L(\psi,\psi_t,\psi_x,\psi_y,\psi_z)\delta t\delta x\delta y\delta z \tag{8.57}$$

的极值问题与 Euler 方程

$$L_\psi - \frac{\partial L_{\psi_t}}{\partial t} - \frac{\partial L_{\psi_x}}{\partial x} - \frac{\partial L_{\psi_y}}{\partial y} - \frac{\partial L_{\psi_z}}{\partial z} = 0 \tag{8.58}$$

的求解等价. (8.57)式中的 $L(\psi,\psi_t,\psi_x,\psi_y,\psi_z)$ 称为 Lagrange 量或 Lagrange 函数. 方程(8.58)即是波动方程，其中 $L_{\psi_t}, L_{\psi_x}, L_{\psi_y}, L_{\psi_z}$ 分别表 L 对 $\psi_t,\psi_x,\psi_y,\psi_z$ 的导数.

对于惯性-重力外波，比较方程(8.58)和方程(8.55)知，惯性-重力外波的 Lagrange 量为

$$L = \frac{1}{2c_0^2}\psi_t^2 - \frac{1}{2}(\psi_x^2 + \psi_y^2) - \frac{1}{2}\lambda_0^2\psi^2. \tag{8.59}$$

以(8.31)式和(8.33)式代入得到

$$L = \frac{1}{2c_0^2}\omega^2 a^2 \sin^2(\theta+\alpha) - \frac{1}{2}K_h^2 a^2 \sin^2(\theta+\alpha) - \frac{1}{2}\lambda_0^2 a^2 \cos^2(\theta+\alpha). \tag{8.60}$$

L 在一个周期内的平均值为

$$\mathscr{L}(\omega,\boldsymbol{K}_h,a) = \frac{1}{4c_0^2}(\omega^2 - K_h^2 c_0^2 - f_0^2)a^2, \tag{8.61}$$

$\mathscr{L}$ 称为平均 Lagrange 量，它是波振幅 a 的二次函数. 而且，由上式可以很快导得

$$a\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial a} = 2\mathscr{L}. \tag{8.62}$$

在(8.61)式中，若令

$$\mathscr{L} = 0, \tag{8.63}$$

可求得惯性-重力外波的频散关系. 又由(8.61)式有

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega} = \frac{1}{2c_0^2}\omega a^2, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{K}_h} = -\frac{1}{2}a^2 \boldsymbol{K}_h. \tag{8.64}$$

将上式与(8.38)式比较有

$$\mathscr{E} = \omega\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega}, \quad \vec{\mathscr{F}} = -\omega\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{K}_h}. \tag{8.65}$$

再由 $\vec{\mathscr{F}} = \mathscr{E}\boldsymbol{c}_g$ 有

$$\boldsymbol{c}_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{K}_h} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{K}_h}\Big/\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega}. \tag{8.66}$$

因而，若定义波作用量为

$$\mathscr{A} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega} = \frac{\mathscr{E}}{\omega} = \frac{1}{2c_0^2}\omega a^2, \tag{8.67}$$

则波能密度守恒原理(8.39)式可改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega \mathscr{A}) + \nabla_{\mathrm{h}} \cdot (\omega \mathscr{A}\boldsymbol{c}_{\mathrm{g}}) = 0. \tag{8.68}$$

注意均匀介质的(8.19)式，则得到

$$\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial t} + \nabla_{\mathrm{h}} \cdot (\mathscr{A}\boldsymbol{c}_{\mathrm{g}}) = 0, \tag{8.69}$$

它称为波作用量守恒原理.

二、正压 Rossby 波

若令

$$\begin{cases} \psi_t \equiv \dfrac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \psi_x \equiv \dfrac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi_y \equiv \dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \psi_z \equiv \dfrac{\partial \psi}{\partial z}, \\ \psi_{tt} \equiv \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad \psi_{tx} \equiv \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x}, \quad \psi_{ty} \equiv \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y}, \end{cases} \tag{8.70}$$

则正压 Rossby 波方程(8.40)可以写为

$$F(t, x, y, \psi, \psi_t, \psi_x, \psi_y, \psi_{tx}, \psi_{ty}) = 0, \tag{8.71}$$

其中

$$F(t, x, y, \psi, \psi_t, \psi_x, \psi_y, \psi_{tx}, \psi_{ty}) = \frac{\partial \psi_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{ty}}{\partial y} - \lambda_0^2 \psi_t + \beta_0 \psi_x. \tag{8.72}$$

此时，泛函(8.57)式推广为

$$J(\psi) = \iiiint_R L(\psi, \psi_t, \psi_x, \psi_y, \psi_z, \psi_{tt}, \psi_{tx}, \psi_{ty}, \psi_{xx}, \psi_{xy}, \psi_{yy}, \cdots)\delta t \delta x \delta y \delta z. \tag{8.73}$$

相应 Euler 方程(8.58)推广为

$$L_\psi - \frac{\partial L_{\psi_t}}{\partial t} - \frac{\partial L_{\psi_x}}{\partial x} - \frac{\partial L_{\psi_y}}{\partial y} - \frac{\partial L_{\psi_z}}{\partial z} + \frac{\partial^2 L_{\psi_{tt}}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 L_{\psi_{tx}}}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 L_{\psi_{ty}}}{\partial t \partial y} + \cdots = 0. \tag{8.74}$$

比较方程(8.74)和方程(8.72)知，正压 Rossby 波的 Lagrange 量为

$$L = \frac{1}{2}[(\psi_{xt})^2 + (\psi_{yt})^2 + \lambda_0^2 \psi_t^2 - \beta_0 \psi_t \psi_x]. \tag{8.75}$$

以(8.45)式代入得到

$$L = \frac{\omega^2 a^2}{2}\left[K_{\mathrm{h}}^2 \cos^2(\theta + \alpha) + \lambda_0^2 \sin^2(\theta + \alpha) + \frac{\beta_0 k}{\omega}\sin^2(\theta + \alpha)\right]. \tag{8.76}$$

消去公共因子 ω^2，则求得正压 Rossby 波的平均 Lagrange 量为

$$\mathscr{L}(\omega, \boldsymbol{K}_{\mathrm{h}}, a) = \frac{1}{4}(K_{\mathrm{h}}^2 + \lambda_0^2 + \beta_0 k/\omega)a^2. \tag{8.77}$$

类似,令 $\mathscr{L}=0$ 可求得正压 Rossby 波的频散关系,而且

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega}=-\frac{\beta_0 k}{4\omega^2}a^2,\quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{K}_h}=\frac{1}{2\omega}\left(\omega \boldsymbol{K}_h+\frac{\beta_0}{2}\boldsymbol{i}\right)a^2. \tag{8.78}$$

将上式与(8.49)式比较有

$$\mathscr{E}=\omega\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega},\quad \vec{\mathscr{F}}=-\omega\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{K}_h}. \tag{8.79}$$

同样也有

$$\boldsymbol{c}_g=-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{K}_h}\bigg/\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega}. \tag{8.80}$$

类似,可定义正压 Rossby 波的波作用量为

$$\mathscr{A}\equiv\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega}=\frac{\mathscr{E}}{\omega}=-\frac{\beta_0 k}{4\omega^2}a^2. \tag{8.81}$$

同样,正压 Rossby 波的波能密度守恒原理(8.50)式可改写为

$$\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial t}+\nabla_h\cdot\mathscr{A}\boldsymbol{c}_g=0, \tag{8.82}$$

这是正压 Rossby 波的波作用量守恒原理.

由上两例分析可知:对于线性波动,作为缓变波列的第一近似,波的平均 Lagrange 量可以表示为

$$\mathscr{L}(\omega,\boldsymbol{K},a)=G(\omega,\boldsymbol{K})a^2, \tag{8.83}$$

其中 G 是 ω 和 $\boldsymbol{K}$ 的函数,而且由

$$G(\omega,\boldsymbol{K})=0 \tag{8.84}$$

可确定线性波的频散关系

$$\omega=\Omega(\boldsymbol{K}). \tag{8.85}$$

又因,由(8.84)式有

$$\frac{\partial G}{\partial \omega}\frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{K}}+\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{K}}=0, \tag{8.86}$$

因而求得群速度为

$$\boldsymbol{c}_g\equiv\frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{K}}=-\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{K}}\bigg/\frac{\partial G}{\partial \omega}=-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{K}}\bigg/\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega}. \tag{8.87}$$

由平均 Lagrange 量可以求得

$$\mathscr{E}=\omega\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega},\quad \vec{\mathscr{F}}=-\omega\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{K}}=\mathscr{E}\boldsymbol{c}_g. \tag{8.88}$$

对线性波,其波作用量一般定义为

$$\mathscr{A}\equiv\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega}=\frac{\mathscr{E}}{\omega}; \tag{8.89}$$

而且,在均匀介质中,波作用量守恒,即

$$\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial t}+\nabla \cdot (\mathscr{A}\boldsymbol{c}_g)=0. \tag{8.90}$$

在均匀介质中，若存在常定和均匀的基本西风气流 $\bar{u}$，则引入 Doppler 频率

$$\omega_D=\omega-k\bar{u}. \tag{8.91}$$

此时，波作用量定义为

$$\mathscr{A}^*=\frac{\mathscr{E}}{\omega_D}=\frac{\mathscr{E}}{\omega-k\bar{u}}. \tag{8.92}$$

相应，波作用量守恒方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathscr{A}^*+\nabla \cdot \mathscr{A}^*\boldsymbol{c}_g=0. \tag{8.93}$$

当然，波作用量定义方式可以不同，但一定要正比于振幅的平方.

§8.4 波的多尺度方法

前两节，我们应用缓变波列的概念导出了均匀介质的波动中波能密度和波作用量具有守恒性. 本节，我们将缓变波列的概念引申成为讨论波传播的一种渐近方法，这就是波的多尺度方法.

由上一章波列的分析知，波列由两部分构成：一部分是高频载波，其随时间、空间变化相对较快；另一部分是低频波包，其随时间、空间变化相对较慢. 这表示：波列存在两种时间和空间尺度，一是快时间、空间尺度：

$$t=t,\quad x=x,\quad y=y,\quad z=z, \tag{8.94}$$

它表征波列相位函数的变化；另一是慢时间、空间尺度：

$$T=\varepsilon t,\quad X=\varepsilon x,\quad Y=\varepsilon y,\quad Z=\varepsilon z, \tag{8.95}$$

它表征波列振幅函数的变化，其中 ε 满足

$$|\varepsilon|\ll 1, \tag{8.96}$$

称为小参数.

这样，任一缓变波列可以表示为

$$\psi=A(X,Y,Z,T)e^{i\theta(x,y,z,t)}, \tag{8.97}$$

其中振幅 A 明显表示出是 X,Y,Z,T 的缓变函数. 同样，k,l,n,ω 也可视为 X,Y,Z,T 的缓变函数. 因

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial A}{\partial T},\quad \frac{\partial A}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial A}{\partial X},\quad \frac{\partial A}{\partial y}=\varepsilon\frac{\partial A}{\partial Y},\quad \frac{\partial A}{\partial z}=\varepsilon\frac{\partial A}{\partial Z}, \tag{8.98}$$

则由(8.97)式得到

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-\mathrm{i}\omega A+\varepsilon\frac{\partial A}{\partial T}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=\left(\mathrm{i}kA+\varepsilon\frac{\partial A}{\partial X}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\\&\frac{\partial\psi}{\partial y}=\left(\mathrm{i}lA+\varepsilon\frac{\partial A}{\partial Y}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\quad \frac{\partial\psi}{\partial z}=\left(\mathrm{i}nA+\varepsilon\frac{\partial A}{\partial Z}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\\&\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\left[-\omega^2A-\mathrm{i}\varepsilon\left(2\omega\frac{\partial A}{\partial T}+A\frac{\partial\omega}{\partial T}\right)+\varepsilon^2\frac{\partial^2A}{\partial T^2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\\&\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\left[-k^2A+\mathrm{i}\varepsilon\left(2k\frac{\partial A}{\partial X}+A\frac{\partial k}{\partial X}\right)+\varepsilon^2\frac{\partial^2A}{\partial X^2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\\&\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\left[-l^2A+\mathrm{i}\varepsilon\left(2l\frac{\partial A}{\partial Y}+A\frac{\partial l}{\partial Y}\right)+\varepsilon^2\frac{\partial^2A}{\partial Y^2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\\&\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\left[-n^2A+\mathrm{i}\varepsilon\left(2n\frac{\partial A}{\partial Z}+A\frac{\partial n}{\partial Z}\right)+\varepsilon^2\frac{\partial^2A}{\partial Z^2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\end{aligned}\right. \tag{8.99}$$

等等.将上述表达式代入波方程,利用波的运动学关系(8.8)式和(8.15)式可以确定波的各级渐近解.若应用小参数方法,将 A 展为 ε 的幂级数

$$A=A_0+\varepsilon A_1+\varepsilon^2A_2+\cdots, \tag{8.100}$$

其中 $A_0,A_1,A_2,\cdots$分别为 A 的零级近似、一级近似、二级近似……,则下面将看到,波方程的零级近似为波的频率方程,而一级近似就是波作用量的方程,对均匀介质而言就是波作用量守恒原理.

下面,我们仍以前两节的两个例子为例说明波的多尺度方法.

一、惯性-重力外波

以(8.97)形式的解(与 z 无关)代入惯性-重力外波的方程(8.29),并利用(8.99)式得到

$$\begin{aligned}&\left\{-\omega^2A-\mathrm{i}\varepsilon\left(2\omega\frac{\partial A}{\partial T}+A\frac{\partial\omega}{\partial T}\right)+\varepsilon^2\frac{\partial^2A}{\partial T^2}\right\}\\&\quad-c_0^2\left\{-K_{\mathrm{h}}^2A+\mathrm{i}\varepsilon\left(2k\frac{\partial A}{\partial X}+2l\frac{\partial A}{\partial Y}+A\frac{\partial k}{\partial X}+A\frac{\partial l}{\partial Y}\right)\right.\\&\quad\left.+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2A}{\partial X^2}+\frac{\partial^2A}{\partial Y^2}\right)\right\}+f_0^2A=0.\end{aligned} \tag{8.101}$$

将(8.100)式代入上式求得方程(8.101)的零级近似、一级近似方程分别是

$$(\omega^2-K_{\mathrm{h}}^2c_0^2-f_0^2)A_0=0, \tag{8.102}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\left\{2\omega\frac{\partial A_0}{\partial T}+2c_0^2\left(k\frac{\partial A_0}{\partial X}+l\frac{\partial A_0}{\partial Y}\right)+\left(\frac{\partial\omega}{\partial T}+c_0^2\frac{\partial k}{\partial X}+c_0^2\frac{\partial l}{\partial Y}\right)A_0\right\}\\&\quad+(\omega^2-K_{\mathrm{h}}^2c_0^2-f_0^2)A_1=0.\end{aligned} \tag{8.103}$$

由(8.102)式,因 $A_0\neq0$,则得

$$\omega^2 = K_h^2 c_0^2 + f_0^2, \tag{8.104}$$

这就是惯性-重力外波的频散关系. 由此有

$$c_{gx} = kc_0^2/\omega, \quad c_{gy} = lc_0^2/\omega. \tag{8.105}$$

将(8.104)式代入(8.103)式,则得

$$2\omega\frac{\partial A_0}{\partial T} + 2c_0^2\left(k\frac{\partial A_0}{\partial X} + l\frac{\partial A_0}{\partial Y}\right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial T} + c_0^2\frac{\partial k}{\partial X} + c_0^2\frac{\partial l}{\partial Y}\right)A_0 = 0. \tag{8.106}$$

设 A_0 为实数,上式两边乘以 $A_0/2c_0^2$(若 A_0 为复数,则上式两边乘以 $A_0^*/2c_0^2$,A_0^* 为 A_0 的共轭)得

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\omega}{2c_0^2}A_0^2\right) + \nabla_h \cdot \left(\frac{1}{2}A_0^2\boldsymbol{K}_h\right) = 0. \tag{8.107}$$

但根据(8.67)式,对惯性-重力外波

$$\mathscr{A} = \frac{\omega}{2c_0^2}a^2, \quad \mathscr{A}\boldsymbol{c}_g = \frac{1}{2}a^2\boldsymbol{K}_h, \tag{8.108}$$

所以,方程(8.107)表征的即是惯性-重力外波的波作用量方程.

二、正压 Rossby 波

以(8.97)形式的解(与 z 无关)代入正压 Rossby 波的方程(8.40),并利用(8.99)式得到

$$\left(-\mathrm{i}\omega + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T}\right)\left\{-(K_h^2+\lambda_0^2)A + \varepsilon\mathrm{i}\left(2k\frac{\partial A}{\partial X} + 2l\frac{\partial A}{\partial Y} + A\frac{\partial k}{\partial X} + A\frac{\partial l}{\partial Y}\right)\right.$$
$$\left.+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2}\right)\right\} + \beta_0\left(\mathrm{i}kA + \varepsilon\frac{\partial A}{\partial X}\right) = 0. \tag{8.109}$$

再以(8.100)式代入,则求得方程(8.109)的零级近似、一级近似方程分别是

$$\{(K_h^2+\lambda_0^2)\omega + \beta_0 k\}A_0 = 0, \tag{8.110}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}[(K_h^2+\lambda_0^2)A_0] - \omega\left(2k\frac{\partial A_0}{\partial X} + 2l\frac{\partial A_0}{\partial Y} + A_0\frac{\partial k}{\partial X} + A_0\frac{\partial l}{\partial Y}\right) - \beta_0\frac{\partial A_0}{\partial X}$$
$$-\mathrm{i}\{(K_h^2+\lambda_0^2)\omega + \beta_0 k\}A_1 = 0. \tag{8.111}$$

由(8.110)式,因 $A_0 \neq 0$,则得

$$\omega = -\beta_0 k/(K_h^2+\lambda_0^2), \tag{8.112}$$

这是正压 Rossby 波的频散关系. 由此有

$$c_{gx} = \beta_0(k^2 - l^2 - \lambda_0^2)/(K_h^2+\lambda_0^2)^2, \quad c_{gy} = 2\beta_0 kl/(K_h^2+\lambda_0^2)^2. \tag{8.113}$$

将(8.112)式代入(8.111)式得

$$\frac{\partial}{\partial T}[(K_h^2+\lambda_0^2)A_0] - \omega\left(2k\frac{\partial A_0}{\partial X} + 2l\frac{\partial A_0}{\partial Y} + A_0\frac{\partial k}{\partial X} + A_0\frac{\partial l}{\partial Y}\right) - \beta_0\frac{\partial A_0}{\partial X} = 0. \tag{8.114}$$

将上式两端乘以 $-(K_h^2+\lambda_0^2)A_0/2\beta_0 k = A_0/2\omega$,得

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(-\frac{\beta_0 k}{4\omega^2}A_0^2\right)+\nabla_h\cdot\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{K}_h-\frac{\beta_0}{4\omega}\boldsymbol{i}\right)A_0^2=0. \tag{8.115}$$

但根据(8.81)式,对正压 Rossby 波

$$\mathscr{A}=-\frac{\beta_0 k}{4\omega^2}a^2,\quad \mathscr{A}\boldsymbol{c}_g=-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{K}_h+\frac{\beta_0}{2\omega}\boldsymbol{i}\right)A_0^2. \tag{8.116}$$

所以,方程(8.115)式表征的是正压 Rossby 波的波作用量方程.

§8.5 Rossby 波的传播图像

在上一章中,我们已经简单分析了 Rossby 波传播的一些特征. 从本节开始,我们将继续讨论 Rossby 波传播的另一些特征. 本节叙述正压 Rossby 波的传播图像.

在正压模式中,Rossby 波的圆频率 ω((8.112)式)可以改写为

$$k^2+l^2+\lambda_0^2+\beta_0 k/\omega=0, \tag{8.117}$$

或写为

$$(k+\beta_0/2\omega)^2+l^2=R^2, \tag{8.118}$$

其中

$$R^2=(\beta_0/2\omega)^2-\lambda_0^2. \tag{8.119}$$

但由(8.117)式知,在 l 固定时,当取

$$k^2=l^2+\lambda_0^2 \tag{8.120}$$

时,$|\omega|$ 取极大值 $\beta_0/2\sqrt{l^2+\lambda_0^2}$(详见第七章习题 11),即

$$|\omega|\leqslant\beta_0/2\sqrt{l^2+\lambda_0^2}\leqslant\beta_0/2\lambda_0, \tag{8.121}$$

因而 $R^2>0$,R 为实数.

(8.118)式说明:对正压 Rossby 波而言,在波数平面(k,l)上,波矢 $\boldsymbol{K}_h$ 的起点在坐标原点 O,端点 W 在以 $C(-\beta_0/2\omega,\theta)$ 为圆心,半径为 R 的圆上,见图 8.1. 坐标原点到圆的最小距离是

$$k_m=-\frac{\beta_0}{2\omega}-R=-\frac{\beta_0}{2\omega}-\sqrt{\left(\frac{\beta_0}{2\omega}\right)^2-\lambda_0^2}. \tag{8.122}$$

特别在水平无辐散的条件下,$\lambda_0^2=0$,此时圆的半径为

$$R_0=\beta_0/2|\omega|. \tag{8.123}$$

而此时 $k_m=0$,因而圆与 l 轴相切,见图 8.2.

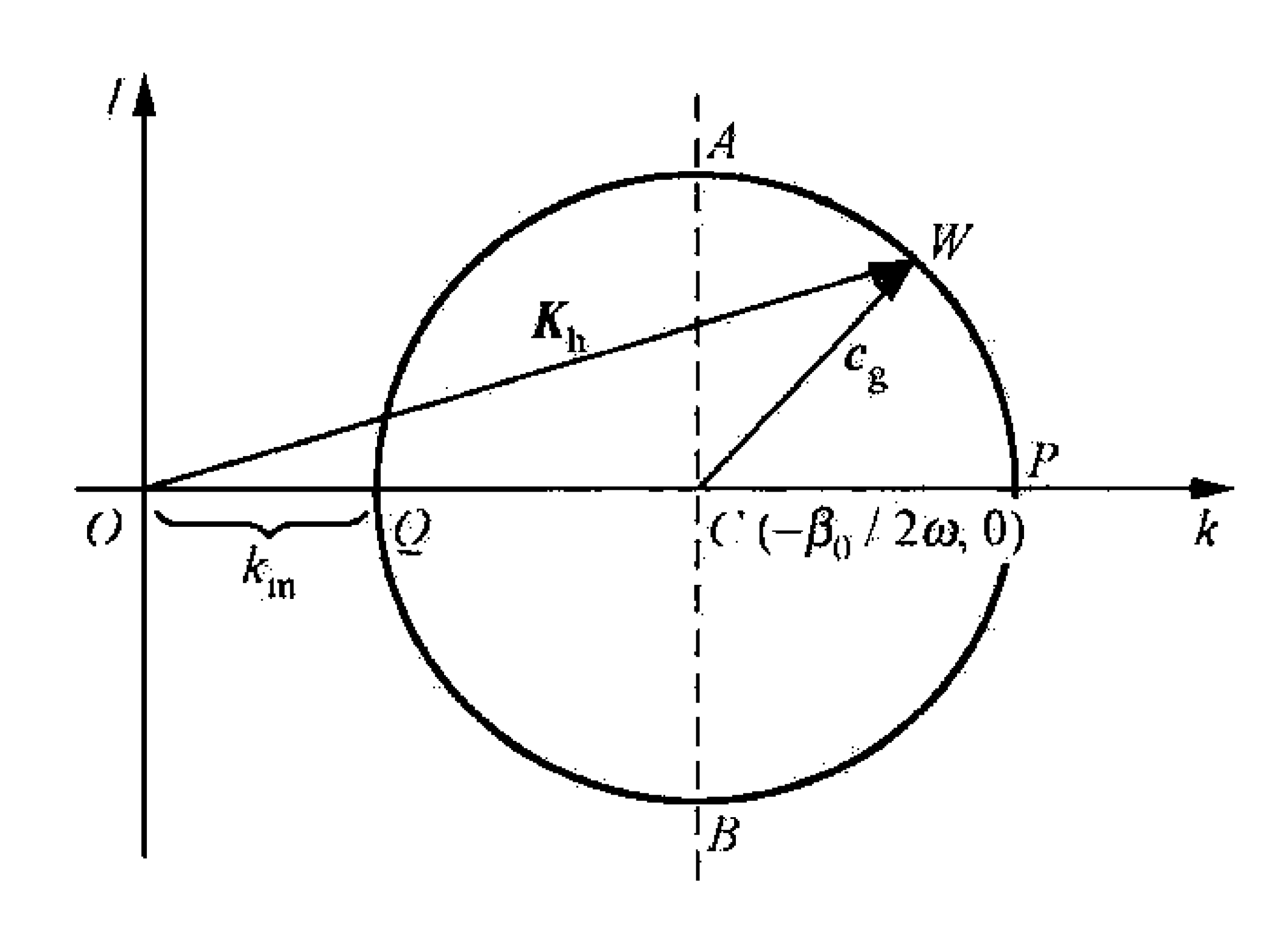


图 8.1 正压 Rossby 波的传播图像($\lambda_0^2\neq 0$)

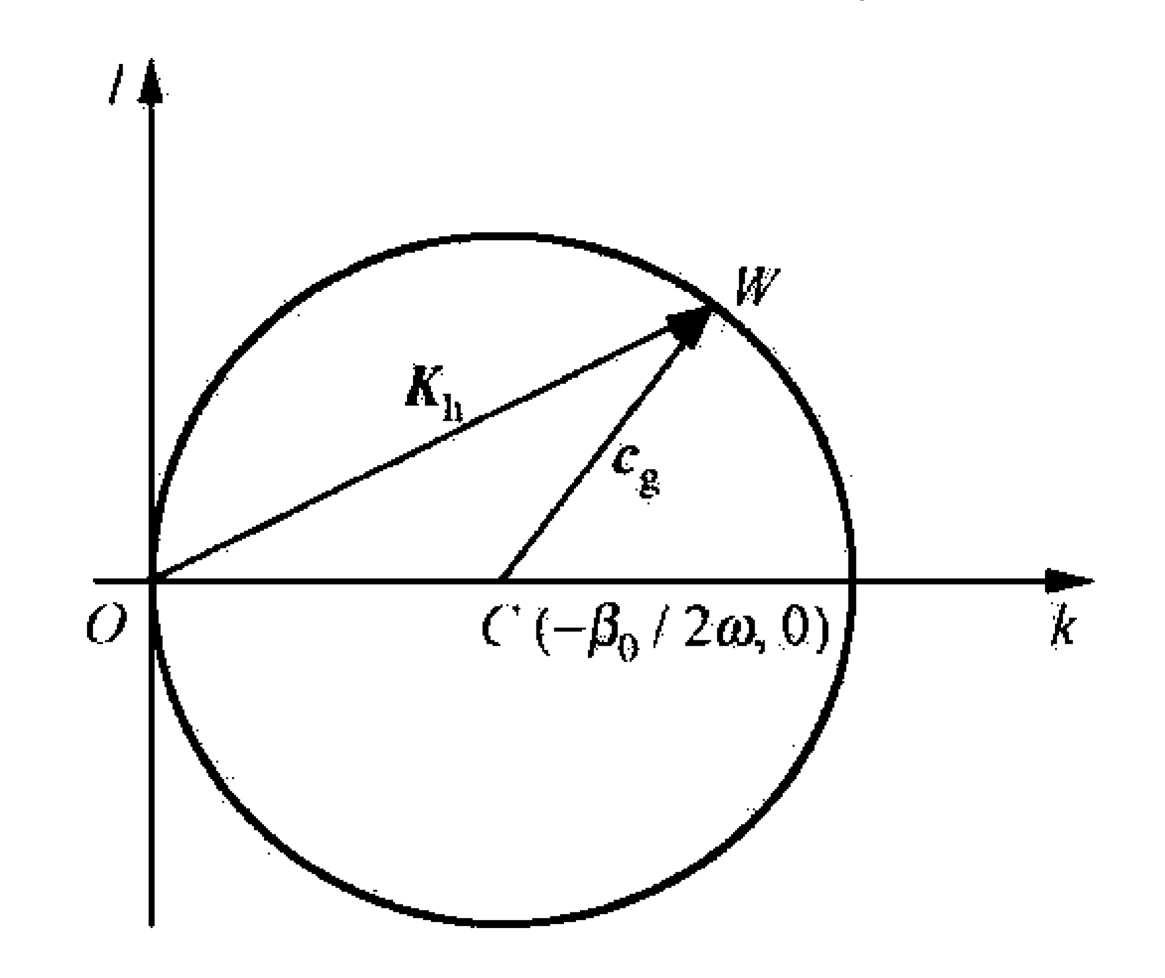


图 8.2 正压 Rossby 波的传播图像($\lambda_0^2=0$)

从图 8.1 和图 8.2 可知,矢量$\overrightarrow{OW}$的方向为波矢 $\boldsymbol{K}_h$ 的方向,也就是正压 Rossby 波相速度传播的方向,而且对 x 方向波长较短(k 大)的 Rossby 波,波矢 $\boldsymbol{K}_h$ 的端点 W 落在右半圆 APB 上,x 方向波长较长(k 小)的 Rossby 波,波矢 $\boldsymbol{K}_h$ 的端点 W 落在左半圆 AQB 上.

而且由正压 Rossby 波的群速度公式(8.113)可以得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}_g=c_{gx}\boldsymbol{i}+c_{gy}\boldsymbol{j}&=\frac{2\beta_0 k}{(K_h^2+\lambda_0^2)^2}\left[\frac{k^2-(l^2+\lambda_0^2)}{2k}\boldsymbol{i}+l\boldsymbol{j}\right]\\&=\frac{2\beta_0 k}{(K_h^2+\lambda_0^2)^2}\left[\frac{2k^2-(K_h^2+\lambda_0^2)}{2k}\boldsymbol{i}+l\boldsymbol{j}\right]=\frac{2\beta_0 k}{(K_h^2+\lambda_0^2)^2}\left[\left(k-\frac{K_h^2+\lambda_0^2}{2k}\right)\boldsymbol{i}+l\boldsymbol{j}\right]\\&=\frac{2\beta_0 k}{(K_h^2+\lambda_0^2)^2}\left[\left(k+\frac{\beta_0}{2\omega}\right)\boldsymbol{i}+l\boldsymbol{j}\right]=\frac{2\beta_0 k}{(K_h^2+\lambda_0^2)^2}\overrightarrow{CW}.\end{aligned}\tag{8.124}$$

所以,当 $k>0$ 时,$\overrightarrow{CW}$的方向为 Rossby 波群速度 $\boldsymbol{c}_g$ 的方向,也就是正压 Rossby 波能量传播的方向.而且右半圆上的波(短波,k 大)向东传播能量,左半圆上的波(长波,k 小)向西传播能量.

注意,上述结论都未考虑基本气流的作用.这些结论都是由 Longuet-Higgins (1964 年)得到的,所以,图 8.1 或图 8.2 中的圆又称为 L-H 圆.

Longuet-Higgins 和 Hoskins 又讨论了在球面上 Rossby 波的传播.在球坐标系中,正压无辐散的涡度方程可以写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{u}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)(\nabla_s^2\psi+f)=0,\tag{8.125}$$

其中

$$\nabla_s^2=\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right].\tag{8.126}$$

令

$$u=\bar{u}+u',\quad v=v'.\tag{8.127}$$

相应

$$\psi = -\int \bar{u} a \,\delta\varphi + \psi'. \tag{8.128}$$

将(8.127)式和(8.128)式代入方程(8.125)，得到线性化的涡度方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)\nabla_s^2\psi' + B\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial \psi'}{\partial \lambda} = 0, \tag{8.129}$$

其中

$$B \equiv \frac{2\Omega\cos\varphi}{a} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\bar{u}\cos\varphi)\right]. \tag{8.130}$$

下面应用球的 Mercator 投影，将方程(8.129)化为较为简洁的形式. 为此，令

$$x = a\lambda, \quad y = a\ln\left(\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right), \tag{8.131}$$

注意

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = a\mathrm{d}\lambda, \quad \mathrm{d}y = \dfrac{a}{\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi, \\ \dfrac{1}{a\cos\varphi}\dfrac{\partial}{\partial\lambda} = \dfrac{1}{\cos\varphi}\dfrac{\partial}{\partial x}, \quad \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = \dfrac{1}{\cos\varphi}\dfrac{\partial}{\partial y}, \\ \nabla_s^2 = \dfrac{1}{\cos^2\varphi}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \\ \cos\varphi = \mathrm{sech}\left(\dfrac{y}{a}\right), \quad \sin\varphi = \tanh\left(\dfrac{y}{a}\right), \end{cases} \tag{8.132}$$

再令

$$\bar{u}_{\mathrm{M}} = \frac{\bar{u}}{\cos\varphi}, \tag{8.133}$$

$$B_{\mathrm{M}} = B\cos\varphi = \frac{2\Omega\cos^2\varphi}{a} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}_{\mathrm{M}}\cos^2\varphi)\right], \tag{8.134}$$

则方程(8.129)化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_{\mathrm{M}}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}\right) + B_{\mathrm{M}}\frac{\partial\psi'}{\partial x} = 0, \tag{8.135}$$

这是直角坐标形式的线性化的无辐散涡度方程. 若以单波解 $\psi' = \hat{\psi}e^{i(kx+ly-\omega t)}$ 代入，则求得频散关系为

$$\omega = k\bar{u}_{\mathrm{M}} - \frac{B_{\mathrm{M}}k}{K^2}, \tag{8.136}$$

其中

$$K^2 = k^2 + l^2. \tag{8.137}$$

由(8.136)式，求得群速度 $\boldsymbol{c}_g$ 的 x,y 分量分别为

$$c_{gx} \equiv \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{\omega}{k} + \frac{2B_{\mathrm{M}}k^2}{K^4}, \quad c_{gy} \equiv \frac{\partial\omega}{\partial l} = \frac{2B_{\mathrm{M}}kl}{K^4}. \tag{8.138}$$

因为(8.136)式的右端不明显依赖于 x 和 t，则由(8.15)式可知，沿着群速度方

向，ω 和 k 保持不变，但 l 要变化.

波射线，是波能量传播的路径. 波射线方程，也就是群速度 c_g 的路径方程，满足

$$\frac{dy}{dx}=\frac{c_{gy}}{c_{gx}}. \tag{8.139}$$

对静止波而言，$\omega=0$. 则利用(8.138)式，方程(8.139)化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{l}{k}. \tag{8.140}$$

但由(8.136)式，静止波的波数 K_s 满足

$$K_s^2=B_M/\bar{u}_M. \tag{8.141}$$

而由(8.138)式求得此时的群速度大小为

$$c_g=2B_Mk/K_s^3=2k\bar{u}_M/K_s. \tag{8.142}$$

在球坐标系中，基本气流 $\bar{u}$ 通常可表为

$$\bar{u}=\alpha a\cos\varphi, \tag{8.143}$$

其中 α 称为基本气流的角速度，取为常数. 将上式代入(8.133)式和(8.134)式有

$$\bar{u}_M=\alpha a, \tag{8.144}$$

$$B_M=2(\Omega+\alpha)\cos^2\varphi/a. \tag{8.145}$$

将(8.144)式和(8.145)式代入(8.141)式有

$$K_s^2=\cos^2\varphi/\varepsilon^2a^2, \tag{8.146}$$

其中

$$\varepsilon^2\equiv\alpha/2(\Omega+\alpha). \tag{8.147}$$

将(8.137)式代入方程(8.140)，并利用(8.146)式得到

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{K_s^2}{k^2}-1}=\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{\varepsilon^2a^2k^2}-1}. \tag{8.148}$$

但利用(8.132)式

$$\frac{d\varphi}{d\lambda}=\cos\varphi\frac{dy}{dx}, \tag{8.149}$$

这样，将(8.148)式代入(8.149)式得到

$$\frac{d\varphi}{d\lambda}=\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0}\cdot\sqrt{\cos^2\varphi-\cos^2\varphi_0}, \tag{8.150}$$

其中

$$\cos\varphi_0=\varepsilon ak. \tag{8.151}$$

比较(8.151)式和(8.146)式知，φ_0 相当于 $l=0$ 或 $K_s=k$ 时的 φ，称为转向纬度(turning latitude).

积分方程(8.150)，得

$$\tan\varphi = \tan\varphi_0 \sin(\lambda - \lambda_0), \tag{8.152}$$

λ_0 是积分常数. 上式是通过球面上点$(\lambda,\varphi)=(\lambda_0,0)$的大圆,因而说明在球面上的静止正压 Rossby 波群速度的轨迹为一个大圆,称之为大圆定理(great circle routes theorem). 一条波射线如果从$(\lambda,\varphi)=(\lambda_0,0)$开始向高纬度延伸,则当 $\lambda-\lambda_0=\frac{\pi}{2}$时,波射线达到最高纬度 $\varphi=\varphi_0$;当$\frac{\pi}{2}<\lambda-\lambda_0<\pi$ 时,波射线又折回到低纬度,并在 $\lambda-\lambda_0=\pi$ 时,波射线返回到赤道 $\varphi=0$.

§8.6 Rossby 波的经向和垂直传播

本节分析 Rossby 波经向和垂直传播的一些基本结果.

一、Rossby 波的经向传播

我们就正压水平无辐散的 Rossby 波为例来说明. 在基本气流 $\bar{u}=\bar{u}(y)$时,其线性方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla_h^2\psi' + \left(\beta_0 - \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial x} = 0. \tag{8.153}$$

为了分析 Rossby 波的经向传播,我们设方程(8.153)的解为

$$\psi' = \Psi(y)\mathrm{e}^{ik(x-ct)}, \tag{8.154}$$

其中 c 为 x 方向波的传播速度.

将(8.154)式代入方程(8.153),在 $\bar{u}-c\neq 0$ 的条件下得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}y^2}+l^2\Psi = 0, \tag{8.155}$$

其中

$$l^2 \equiv \frac{\beta_0 - \dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}}{\bar{u}-c} - k^2, \tag{8.156}$$

l^2 称为 y 方向的折射指数(refractive index). 当 $l^2>0$ 时,波在 y 方向能够传播(此时方程(8.155)有振动解),而且依光学中的 Snell 定律,波传播总是指向折射指数 l^2 大的区域,这种情况称为波导(wave guide 或 duct);当 $l^2<0$ 时,Rossby 波的经向传播受阻(trapped).

由(8.156)式知,$l^2>0$ 要求

$$\left(\beta_0 - \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}\right)\Big/(\bar{u}-c) > k^2, \tag{8.157}$$

这就是 Rossby 波得以经向传播的条件.

特别,对于定常(即静止)Rossby 波或 Rossby 驻波,(8.156)式改为

$$l^2 = K_0^2 - k^2, \tag{8.158}$$

其中

$$K_0 = \sqrt{\left(\beta_0 - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right) \Big/ \bar{u}}. \tag{8.159}$$

这样,定常 Rossby 波得以经向传播的条件可以写为

$$k < K_0 \tag{8.160}$$

或

$$0 < \bar{u} < \bar{u}_{c0}, \tag{8.161}$$

其中

$$\bar{u}_{c0} \equiv \left(\beta_0 - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right) \Big/ k^2, \tag{8.162}$$

称为 Rossby 波经向传播的临界风速.

二、Rossby 波的垂直传播

我们就以准地转的斜压 Rossby 波为例来说明. 在基本气流 $\bar{u}=\bar{u}(y,z)$时,其线性方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\nabla_h^2 \psi' + \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \tag{8.163}$$

其中 $\bar{q}$ 为基本气流的准地转位涡度,

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta_0 - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}. \tag{8.164}$$

为了分析 Rossby 波的垂直传播,我们设方程(8.163)的解为

$$\psi' = \Psi(z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx + ly - \omega t)}. \tag{8.165}$$

将解(8.165)式代入方程(8.163),在 $\bar{u}-c\neq 0$ 时,得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Psi}{\mathrm{d}z^2} + n^2 \Psi = 0, \tag{8.166}$$

其中

$$n^2 \equiv \frac{N^2}{f_0^2}\left(\frac{\partial \bar{q}/\partial y}{\bar{u} - c} - K_h^2\right), \tag{8.167}$$

c 为 x 方向的传播速度,n^2 称为 z 方向的折射指数. 当 $n^2>0$ 时,Rossby 波能够在 z 方向传播,存在波导;当 $n^2<0$ 时,Rossby 波的垂直传播受阻. 由(8.167)式知,$n^2>0$ 要求在稳定层结下有

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \Big/ (\bar{u} - c) > K_h^2, \tag{8.168}$$

这就是 Rossby 波得以垂直传播的条件.

特别，对于定常 Rossby 波，(8.167)式改写为

$$n^2 = \frac{N^2}{f_0^2}(K_1^2 - K_h^2), \tag{8.169}$$

其中

$$K_1 = \sqrt{\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\Big/\bar{u}}. \tag{8.170}$$

这样，定常 Rossby 波得以垂直传播的条件是

$$K_h < K_1 \tag{8.171}$$

或

$$0 < \bar{u} < \bar{u}_{c1}, \tag{8.172}$$

其中

$$\bar{u}_{c1} \equiv \frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\Big/K_h^2 \tag{8.173}$$

称为 Rossby 波垂直传播的临界风速.

§8.7 Rossby 波的动量和热量输送

前面分析 Rossby 波的传播未涉及很多物理量. 本节着重分析 Rossby 波对动量和热量的输送.

准地转位涡度守恒定律为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)q = 0. \tag{8.174}$$

设

$$u = \bar{u} + u', \quad v = v', \quad \psi = \bar{\psi} + \psi', \quad q = \bar{q} + q', \tag{8.175}$$

将它们代入方程(8.174)，并将方程沿纬圈平均，注意$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$，得到

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{q'v'}}{\partial y}, \tag{8.176}$$

其中$\overline{q'v'}$为扰动准地转位涡度的经向输送通量，下面可以看到，$\overline{q'v'}$可以分为动量经向输送通量和热量经向输送通量两部分. 因在 z 坐标系中，

$$u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}, \quad v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}, \quad q' = \nabla_h^2 \psi' + \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2}, \tag{8.177}$$

而且由静力学关系有

$$\frac{\partial \psi'}{\partial z} = \frac{g}{f_0}\frac{\theta'}{\theta_0}, \tag{8.178}$$

其中 θ' 为扰动位温. 这样就有

$$q'v' = \frac{\partial\psi'}{\partial x}\left(\nabla_h^2\psi' + \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial\psi'}{\partial x}\nabla_h^2\psi' + \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial^2\psi'}{\partial z^2}$$
$$= \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)\right\}$$
$$+ \frac{f_0^2}{N^2}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right) - \frac{\partial\psi'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{\partial}{\partial y}u'v' + \frac{f_0}{\partial\theta_0/\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\theta'v' - \frac{f_0^2}{2N^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)^2. \tag{8.179}$$

将上式沿纬圈平均得到

$$\overline{q'v'} = -\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'} + \frac{f_0}{\partial\theta_0/\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\overline{\theta'v'}. \tag{8.180}$$

在 p 坐标系中,上式可改写为

$$\overline{q'v'} = -\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'} + \frac{f_0}{\partial\theta_0/\partial p}\frac{\partial}{\partial p}\overline{\theta'v'}. \tag{8.181}$$

因$\overline{u'v'}$为西风扰动动量u'的经向输送通量($\overline{u'v'}>0$ 则扰动动量向北输送,$\overline{u'v'}<0$ 则扰动动量向南输送),$\overline{\theta'v'}$表征感热 $c_p\theta'$ 的经向输送通量($\overline{\theta'v'}>0$ 表热量向北输送,$\overline{\theta'v'}<0$ 表热量向南输送),所以,$\overline{q'v'}$是动量和热量经向输送的综合效果,而且方程(8.176)表明,正是由于 Rossby 波对动量和热量的输送才引起平均准地转位涡度的变化,也就引起基本气流的变化.

仿§8.2 中的讨论,我们设 ψ'为一缓变波列:

$$\psi' = a\cos(\theta+\alpha), \quad \theta = kx + ly + nz - \omega t, \tag{8.182}$$

作为第一近似,我们忽略 a,k,l,n,ω 的变化.

从(8.182)式,我们有

$$\begin{cases} u' = -\dfrac{\partial\psi'}{\partial y} = la\sin(\theta+\alpha), \\ v' = \dfrac{\partial\psi'}{\partial x} = -ka\sin(\theta+\alpha), \\ \theta' = \theta_0\dfrac{f_0}{g}\dfrac{\partial\psi'}{\partial z} = -\theta_0\dfrac{f_0}{g}na\sin(\theta+\alpha). \end{cases} \tag{8.183}$$

因而

$$\begin{cases} u'v' = -kla^2\sin^2(\theta+\alpha), \\ \theta'v' = \theta_0\dfrac{f_0}{g}kna^2\sin^2(\theta+\alpha). \end{cases} \tag{8.184}$$

但与§8.2 的分析类似,$\sin^2(\theta+\alpha)$沿纬圈的平均值为 1/2,则

$$\begin{cases} \overline{u'v'} = -\dfrac{1}{2}kla^2, \\ \dfrac{f_0}{\partial\theta_0/\partial z}\overline{\theta'v'} = \dfrac{f_0^2}{2N^2}kna^2. \end{cases} \tag{8.185}$$

由此可见，Rossby 螺旋波（Rossby spiral wave），即 Rossby 波槽脊线的倾斜必然引起动量和热量的经向输送.

在水平面上，倾斜的槽脊引起动量的经向输送. 对于导式槽脊线（k，l 同号，槽脊线呈西北-东南走向），$\overline{u'v'}<0$，动量向南输送；对于曳式槽脊线（k，l 异号，槽脊线呈东北-西南走向），$\overline{u'v'}>0$，动量向北输送. 图 8.3 表示 Rossby 波对动量的经向输送，这是中纬度典型的 Rossby 波的水平结构.

在（x，z）平面上，倾斜的槽脊线引起热量的经向输送. 若 $N^2>0$，则对于自下而上向西倾斜的槽脊线（k，n 同号），$\overline{\theta'v'}>0$，热量向北输送（暖空气向北向上运行，冷空气向南向下运行）；对于自下而上向东倾斜的槽脊线（k，n 异号），$\overline{\theta'v'}<0$，热量向南输送（暖空气向南向下运行，冷空气向北向上运行）. 图 8.4 表示了 Rossby 波对热量的经向输送，其中温度槽落后于流场槽，这是中纬度典型的 Rossby 波槽脊线自下而上向西倾斜的 Rossby 波的垂直结构.

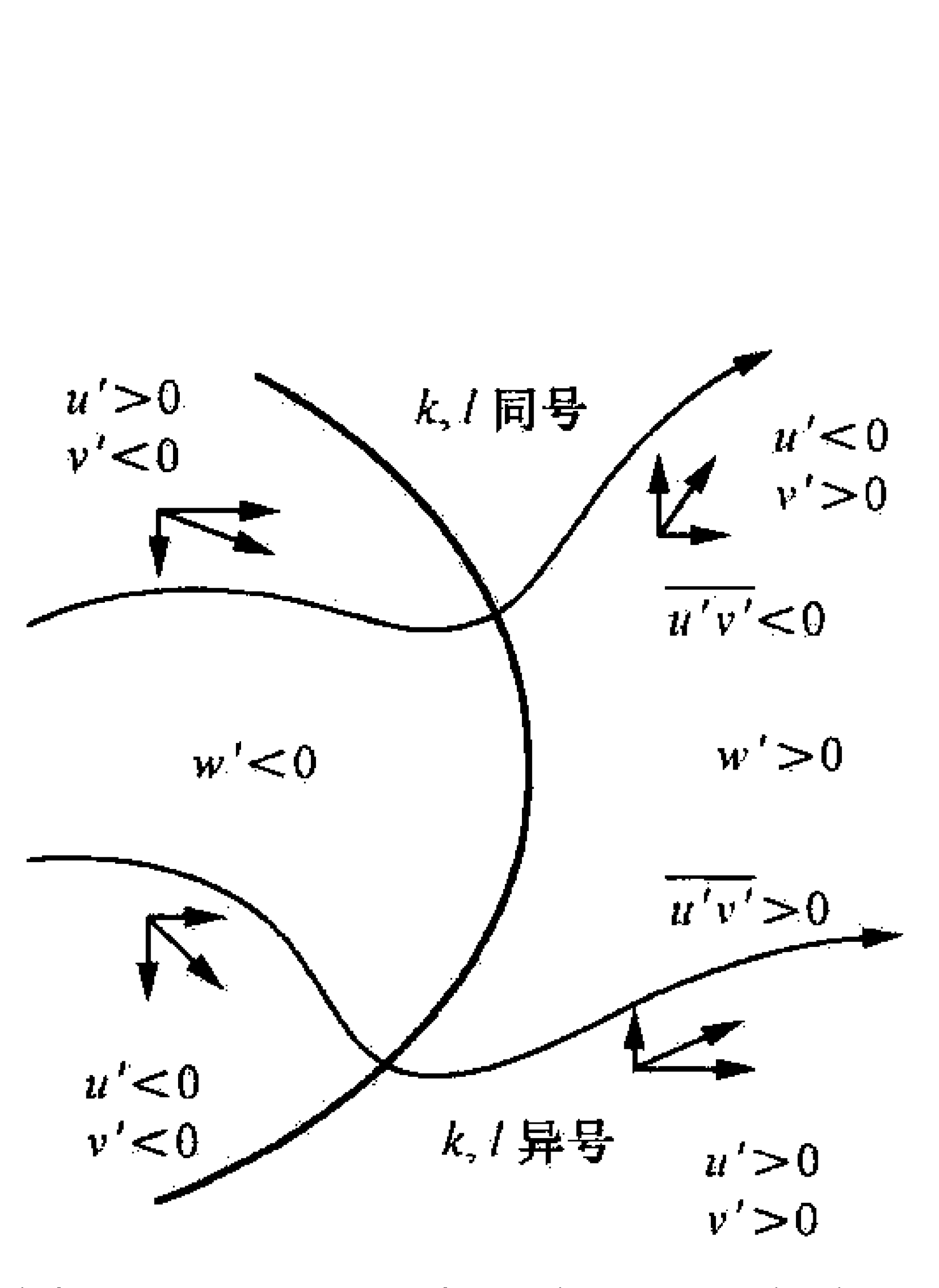


图 8.3 Rossby 波对动量的经向输送

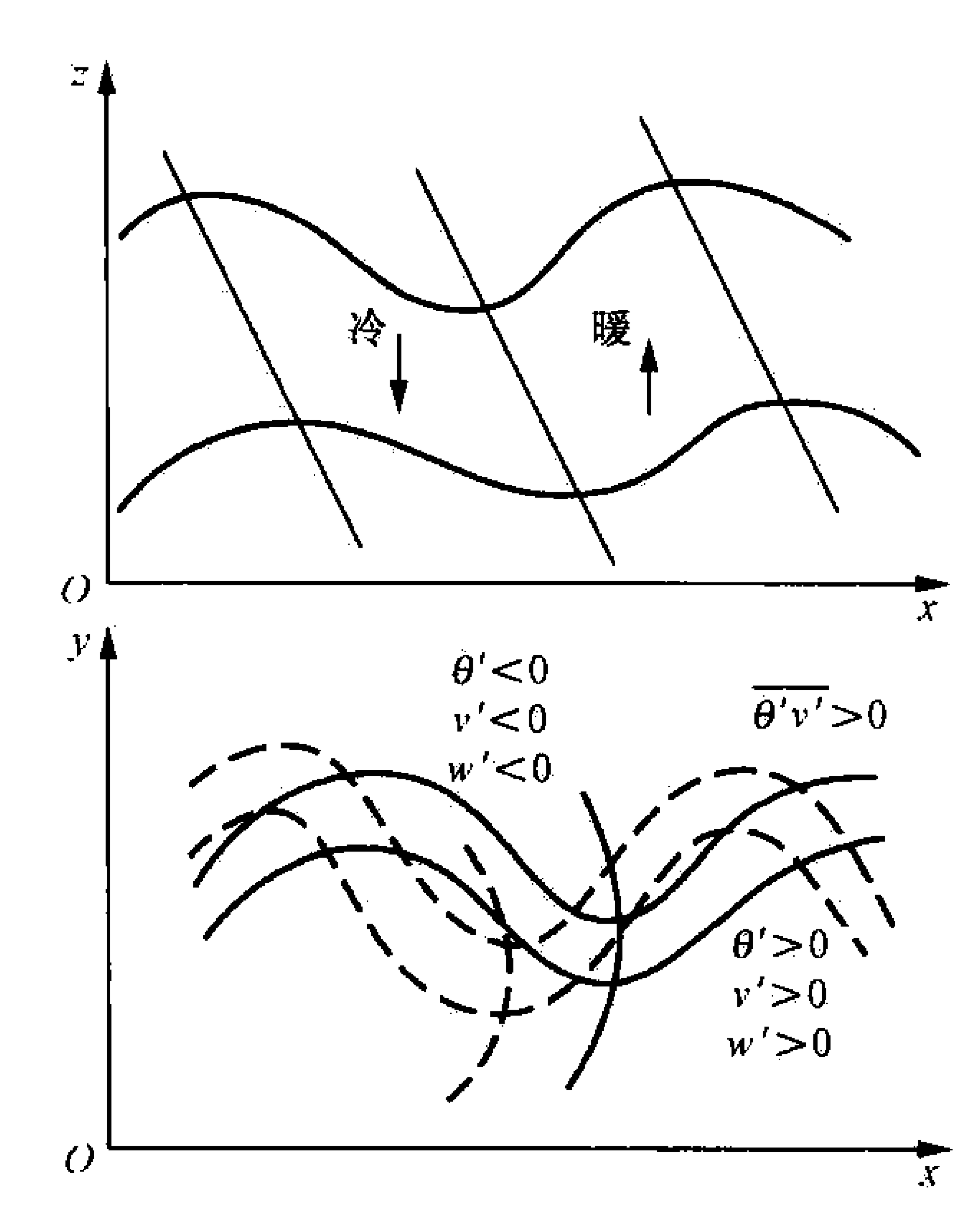


图 8.4 Rossby 波对热量的经向输送

类似，也可分析 Rossby 波动量和热量的垂直输送，即分析 $\overline{u'w'}$ 和 $\overline{\theta'w'}$. 从图 8.3 看出：对于水平面上的导式槽脊线，$\overline{u'w'}<0$，动量向下输送；对于水平面上的曳式槽脊线 $\overline{u'w'}>0$，动量向上输送. 而从图 8.4 看出：对于槽脊线自下而上向西倾斜形成的温度槽落后于流场槽的结构，$\overline{\theta'w'}>0$，暖空气上升，冷空气下沉，热量

向上输送；否则，$\overline{\theta' w'}<0$.

§8.8 Rossby 波的演变，波与基本气流的相互作用

在§8.3中，我们引入缓变波列的波作用量，并且在均匀基本场或均匀介质的条件下导出了波作用量守恒原理. 实际的基本场是非均匀的，或者说介质是非均匀的，此时，波作用量就不再守恒了. 由这种不守恒性，我们可以确定波的演变. 下面，我们就以 Rossby 波为例来说明.

线性化的准地转位涡度守恒定律可以写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\nabla_h^2\psi'+\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial z^2}\right)+B\frac{\partial\psi'}{\partial x}=0, \tag{8.186}$$

其中

$$B\equiv\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}=\beta_0-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}-\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2},\quad \bar{q}\equiv f+\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial y^2}+\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial z^2}. \tag{8.187}$$

这里我们主要考虑 $\bar{u}$ 的变化，忽略了 ρ_0 和 N 的变化.

应用波的多尺度方法，设 ψ' 表为下列缓变波列

$$\psi'=A(X,Y,Z,T)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x,y,z,t)}, \tag{8.188}$$

其中

$$X=\varepsilon x,\quad Y=\varepsilon y,\quad Z=\varepsilon z,\quad T=\varepsilon t,\quad \theta=kx+ly+nz-\omega t, \tag{8.189}$$

ε 为小参数.

将(8.188)式代入方程(8.186)得到

$$\begin{aligned}&\left[-\mathrm{i}(\omega-k\bar{u})+\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial T}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial X}\right)\right]\left\{-K^2A+\mathrm{i}\varepsilon\left(2k\frac{\partial A}{\partial X}+2l\frac{\partial A}{\partial Y}+2\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial A}{\partial Z}\right.\right.\\&\qquad\left.+A\frac{\partial k}{\partial X}+A\frac{\partial l}{\partial Y}+\frac{f_0^2}{N^2}A\frac{\partial n}{\partial Z}\right)\\&\qquad\left.+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2A}{\partial X^2}+\frac{\partial^2A}{\partial Y^2}+\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2A}{\partial Z^2}\right)\right\}+B\left(\mathrm{i}kA+\varepsilon\frac{\partial A}{\partial X}\right)=0,\end{aligned} \tag{8.190}$$

其中

$$K^2=K_h^2+\frac{f_0^2}{N^2}n^2,\quad K_h^2=k^2+l^2. \tag{8.191}$$

再依小参数方法，令

$$A=A_0+\varepsilon A_1+\varepsilon^2A_2+\cdots, \tag{8.192}$$

并将其代入方程(8.190)求得零级近似方程为

$$\{(\omega-k\bar{u})k^2+Bk\}A_0=0. \tag{8.193}$$

因 $A_0\neq0$，则由上式求得频散关系为

$$\omega=k\bar{u}-\frac{Bk}{K^2}=\Omega(k,l,n;X,Y,Z,T). \tag{8.194}$$

由此求得

$$\begin{cases} c_{gx} \equiv \dfrac{\partial \Omega}{\partial k} = \bar{u} - \dfrac{B}{K^2} + \dfrac{2Bk^2}{K^4}, \\ c_{gy} \equiv \dfrac{\partial \Omega}{\partial l} = \dfrac{2Bkl}{K^4}, \\ c_{gz} \equiv \dfrac{\partial \Omega}{\partial n} = 2\dfrac{f_0^2}{N^2}Bkn\Big/K^4. \end{cases} \tag{8.195}$$

利用(8.15)式,注意 $\bar{u}$ 与 X 无关,求得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{D_g}\omega}{\mathrm{D}T} = \left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_{k,l,n,X,Y,Z} = k\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial T} - \dfrac{1}{K^2}\dfrac{\partial B}{\partial T}\right), \\ \dfrac{\mathrm{D_g}k}{\mathrm{D}T} = -\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial X}\right)_{k,l,n,Y,Z,T} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{D_g}l}{\mathrm{D}T} = -\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial Y}\right)_{k,l,n,X,Z,T} = -k\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial Y} - \dfrac{1}{K^2}\dfrac{\partial B}{\partial Y}\right), \\ \dfrac{\mathrm{D_g}n}{\mathrm{D}T} = -\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial Z}\right)_{k,l,n,X,Y,T} = -k\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial Z} - \dfrac{1}{K^2}\dfrac{\partial B}{\partial Z}\right). \end{cases} \tag{8.196}$$

方程(8.190)的一级近似为

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial T} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial X}\right)K^2A_0 - (\omega - k\bar{u})\left(2k\frac{\partial A_0}{\partial X} + 2l\frac{\partial A_0}{\partial Y} + 2\frac{f_0^2}{N^2}n\frac{\partial A_0}{\partial Z}\right. \\ &\left. + A_0\frac{\partial k}{\partial X} + A_0\frac{\partial l}{\partial Y} + \frac{f_0^2}{N^2}A_0\frac{\partial n}{\partial Z}\right) - B\frac{\partial A_0}{\partial X} = 0. \end{aligned} \tag{8.197}$$

利用(8.195)式和(8.194)式有

$$\begin{cases} K^2c_{gx} = K^2\bar{u} - B + 2Bk^2/K^2 = K^2\bar{u} - B - 2k(\omega - k\bar{u}), \\ K^2c_{gy} = 2Bkl/K^2 = -2l(\omega - k\bar{u}), \\ K^2c_{gz} = 2\dfrac{f_0^2}{N^2}Bkn\Big/K^2 = -2\dfrac{f_0^2}{N^2}n(\omega - k\bar{u}), \end{cases} \tag{8.198}$$

即

$$K^2\boldsymbol{c}_g = (K^2\bar{u} - B)\boldsymbol{i} - 2(\omega - k\bar{u})\mathbf{K}, \tag{8.199}$$

其中

$$\mathbf{K} = k\boldsymbol{i} + l\boldsymbol{j} + \frac{f_0^2}{N^2}n\boldsymbol{k}. \tag{8.200}$$

将(8.198)式代入(8.197)式得到

$$\begin{aligned} &K^2\left(\frac{\partial A_0}{\partial T} + \bar{u}\frac{\partial A_0}{\partial X}\right) + A_0\left(\frac{\partial}{\partial T} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial X}\right)K^2 + [K^2(c_{gx} - \bar{u}) + B]\frac{\partial A_0}{\partial X} + K^2c_{gy}\frac{\partial A_0}{\partial Y} \\ &+ K^2c_{gz}\frac{\partial A_0}{\partial Z} - A_0(\omega - k\bar{u})\left(\frac{\partial k}{\partial X} + \frac{\partial l}{\partial Y} + \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial n}{\partial Z}\right) - B\frac{\partial A_0}{\partial X} = 0 \end{aligned} \tag{8.201}$$

或

$$K^2\frac{\mathrm{D_g}A_0}{\mathrm{D}T}+A_0\left(\frac{\partial}{\partial T}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial X}\right)K^2-A_0(\omega-k\bar{u})\left(\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{\partial l}{\partial Y}+\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial n}{\partial Z}\right)=0. \tag{8.202}$$

由(8.199)式

$$\begin{aligned}\nabla\cdot K^2\boldsymbol{c}_g&=\bar{u}\frac{\partial K^2}{\partial X}-2(\omega-k\bar{u})\left(\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{\partial l}{\partial Y}+\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial n}{\partial Z}\right)\\&\quad-2\left(k\frac{\partial}{\partial X}+l\frac{\partial}{\partial Y}+\frac{f_0^2}{N^2}n\frac{\partial}{\partial z}\right)(\omega-k\bar{u})\\&=\bar{u}\frac{\partial K^2}{\partial X}-2(\omega-k\bar{u})\left(\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{\partial l}{\partial Y}+\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial n}{\partial Z}\right)\\&\quad-2\left(k\frac{\partial}{\partial X}+l\frac{\partial}{\partial Y}+\frac{f_0^2}{N^2}n\frac{\partial}{\partial Z}\right)\omega+2\left(k\frac{\partial}{\partial X}+l\frac{\partial}{\partial Y}+\frac{f_0^2}{N^2}n\frac{\partial}{\partial Z}\right)k\bar{u},\end{aligned} \tag{8.203}$$

但利用(8.8)式

$$-2\left(k\frac{\partial}{\partial X}+l\frac{\partial}{\partial Y}+\frac{f_0^2}{N^2}n\frac{\partial}{\partial Z}\right)\omega=2k\frac{\partial k}{\partial T}+2l\frac{\partial l}{\partial T}+2\frac{f_0^2}{N^2}n\frac{\partial n}{\partial T}=\frac{\partial K^2}{\partial T},$$

$$\begin{aligned}&2\left(k\frac{\partial}{\partial X}+l\frac{\partial}{\partial Y}+\frac{f_0^2}{N^2}n\frac{\partial}{\partial Z}\right)k\bar{u}\\&\quad=\bar{u}\frac{\partial k^2}{\partial X}+2kl\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+2l\bar{u}\frac{\partial k}{\partial Y}+2\frac{f_0^2}{N^2}kn\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}+2\frac{f_0^2}{N^2}n\bar{u}\frac{\partial k}{\partial Z}\\&\quad=\bar{u}\frac{\partial k^2}{\partial X}+2kl\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y}+2l\bar{u}\frac{\partial l}{\partial X}+2\frac{f_0^2}{N^2}kn\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}+2\frac{f_0^2}{N^2}n\bar{u}\frac{\partial n}{\partial Z}\\&\quad=\bar{u}\frac{\partial K^2}{\partial X}+2kl\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y}+2\frac{f_0^2}{N^2}kn\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z},\end{aligned}$$

这样，(8.203)式就化为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot K^2\boldsymbol{c}_g&=2\left\{\left(\frac{\partial}{\partial T}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial X}\right)K^2-(\omega-k\bar{u})\left(\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{\partial l}{\partial Y}+\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial n}{\partial Z}\right)\right\}-\frac{\partial K^2}{\partial T}\\&\quad+2kl\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y}+2\frac{f_0^2}{N^2}kn\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}.\end{aligned} \tag{8.204}$$

将(8.204)式代入(8.202)式，消去上式中带花括号的项得

$$K^2\frac{\mathrm{D_g}A_0}{\mathrm{D}T}+\frac{A_0}{2}\left\{\frac{\partial K^2}{\partial T}+\nabla\cdot K^2\boldsymbol{c}_g-2kl\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y}-2\frac{f_0^2}{N^2}kn\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}\right\}=0 \tag{8.205}$$

或

$$K^2\frac{\mathrm{D_g}A_0}{\mathrm{D}T}+\frac{A_0}{2}\frac{\mathrm{D_g}K^2}{\mathrm{D}T}+\frac{A_0}{2}K^2\nabla\cdot\boldsymbol{c}_g-\frac{A_0}{2}\left(2kl\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y}+2\frac{f_0^2}{N^2}kn\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}\right)=0. \tag{8.206}$$

下面，我们根据(8.196)式和(8.206)式分析 Rossby 波的演变规律. 这些规律主要是我国学者曾庆存、巢纪平等人得到的.

一、波能演变方程

令 Rossby 波的波能密度为

$$\mathscr{E} = K^2 A_0^2/4, \tag{8.207}$$

这是正压 Rossby 波波能密度(8.48)的第一式的推广. 以 $A_0/2$ 乘(8.206)式得

$$\frac{1}{4}K^2\frac{\mathrm{D_g}A_0^2}{\mathrm{D}T} + \frac{1}{4}A_0^2\frac{\mathrm{D_g}K^2}{\mathrm{D}T} + \frac{1}{4}K^2A_0^2\,\nabla\cdot\boldsymbol{c}_g - \frac{1}{4}A_0^2\left(2kl\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y} + 2\frac{f_0^2}{N^2}kn\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}\right) = 0, \tag{8.208}$$

即

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial T} + \nabla\cdot\mathscr{E}\boldsymbol{c}_g = \frac{1}{4}A_0^2\left(2kl\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y} + 2\frac{f_0^2}{N^2}kn\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}\right). \tag{8.209}$$

这是在基本流场 $\bar{u}$ 变化的情况下，也就是在非均匀介质中 Rossby 波波能密度的方程. 波能密度是不守恒的，正由于此，我们可利用它讨论 Rossby 波的振幅或波能的演变.

在边界扰动为零的条件下，在波列所占的区域 V 上积分得到

$$\iiint\limits_V \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial T}\delta v = \frac{1}{4}\iiint\limits_V A_0^2\left(2kl\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y} + 2\frac{f_0^2}{N^2}kn\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}\right)\delta v. \tag{8.210}$$

由此可知，Rossby 波能否发展决定于 Rossby 波的空间螺旋结构(kl 和 kn，它们分别表征 $-\overline{u'v'}$ 和 $\overline{\theta'v'}$)及其在基本气流上的位置$\left(kl\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial Y}\text{和 } kn\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial Z}\text{的符号，它们分别表征} -\overline{u'v'}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial Y}\text{和}\overline{\theta'v'}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial Z}\right)$. 我们分纯正压和纯斜压两种情况来说明.

1. 纯正压情况：$\bar{u}=\bar{u}(y)$

此时，(8.210)式变为

$$\iint\limits_A \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial T}\delta A = \frac{1}{4}\iint\limits_A A_0^2\left(2kl\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y}\right)\delta A, \tag{8.211}$$

其中 A 为 V 在水平面上的投影区域. 利用(8.185)式，上式也可改写为

$$\iint\limits_A \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial T}\delta A = -\iint\limits_A \overline{u'v'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y}\delta A. \tag{8.212}$$

因此，正压 Rossby 波的发展与否决定于 Rossby 波的水平结构及其在基本气流上的位置，也就是决定于 Rossby 波的动量经向输送和基本气流的经向分布.

设 $\bar{u}(y)$ 的分布为如图 8.5(a)所示的急流型. 在急流以南，$\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial Y}>0$；急流以北，

$\frac{\partial \bar{u}}{\partial Y}<0$. 所以，急流以北呈导式($k,l$ 同号)和急流以南呈曳式(k,l 异号)的正压螺旋 Rossby 波将衰减(波能减小)，此时，Rossby 波向急流中心输送动量，这是正压衰减型的 Rossby 波，见图 8.5(b)；相反，急流以北呈曳式和急流以南呈导式的正压 Rossby 波将发展(波能增加)，此时，Rossby 波从急流中心向北向南输送动量，这是正压发展型的 Rossby 波，见图 8.5(c).

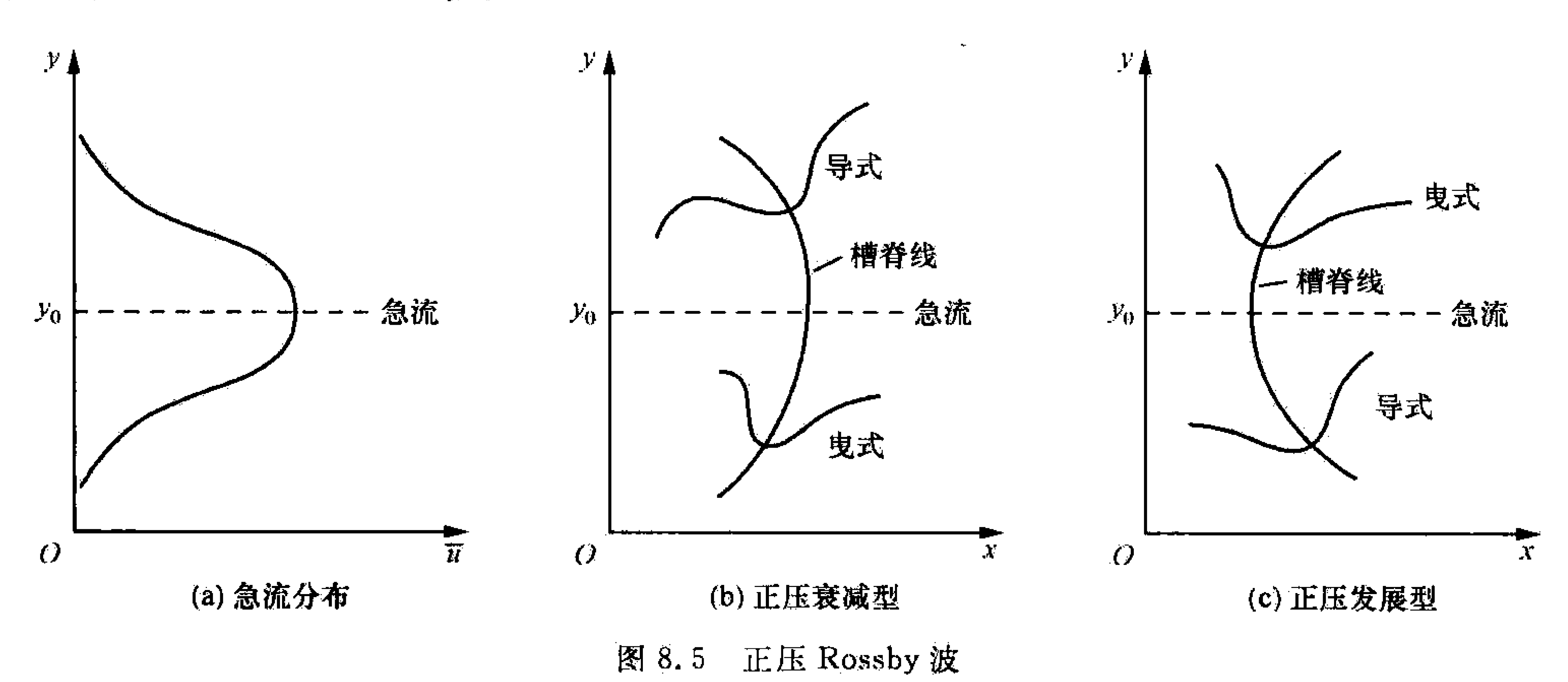


图 8.5　正压 Rossby 波

2. 纯斜压情况：$\bar{u}=\bar{u}(z)$

此时，$\bar{u}$ 的垂直切变完全决定于位温 $\bar{\theta}$ 的经向分布，即有如下的热成风关系：

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}\right)=-\frac{g}{f_0\theta_0}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}. \tag{8.213}$$

而此时(8.210)式变为

$$\iiint\limits_V \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial T}\delta v=\frac{1}{4}\iiint\limits_V A_0^2\left(2\frac{f_0^2}{N^2}kn\frac{\partial \bar{u}}{\partial Z}\right)\delta v=-\frac{1}{4}\iiint\limits_V A_0^2\left(2\frac{f_0}{\partial\theta_0/\partial z}kn\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Y}\right)\delta v. \tag{8.214}$$

利用(8.185)式，上式也可改写为

$$\iiint\limits_V \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial T}\delta v=\iiint\limits_V \frac{f_0}{\partial\theta_0/\partial z}\overline{\theta' v'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial Z}\delta v=-\iiint\limits_V \frac{g}{\theta_0(\partial\theta_0/\partial z)}\overline{\theta' v'}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Y}\delta v. \tag{8.215}$$

因此，纯斜压 Rossby 波的发展与否决定于 Rossby 波的垂直结构及其在基本气流上的位置，也就是决定于 Rossby 波的热量经向输送和基本气流的垂直分布(或位温的经向分布).

在对流层，通常是稳定层结 $\left(\frac{\partial\theta_0}{\partial z}>0\right)$，且温度和位温都由南向北递减 $\left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial Y}<0\right)$，相应，基本气流随高度增强 $\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}>0\right)$，所以，在对流层，当槽脊线自下而上向东倾斜时($k,n$ 异号)，纯斜压 Rossby 波将衰减(波能减小)，此时，冷空气向北

运动和暖空气向南运动,使得 Rossby 波向南输送热量,这是纯斜压衰减型的 Rossby 波;相反,当对流层的槽脊线自下而上向西倾斜时(k,n 同号),纯斜压 Rossby 波将发展(波能增加),此时,冷空气向南运动和暖空气向北运动,使得 Rossby 波向北输送热量,这是纯斜压发展型的 Rossby 波. 在平流层,因为温度和位温由南向北增加$\left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial Y}>0\right)$,相应,基本气流随高度减小$\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}<0\right)$,可得到相反的结果. 纯斜压 Rossby 波的分析示意图见图 8.6(a),(b),(c).

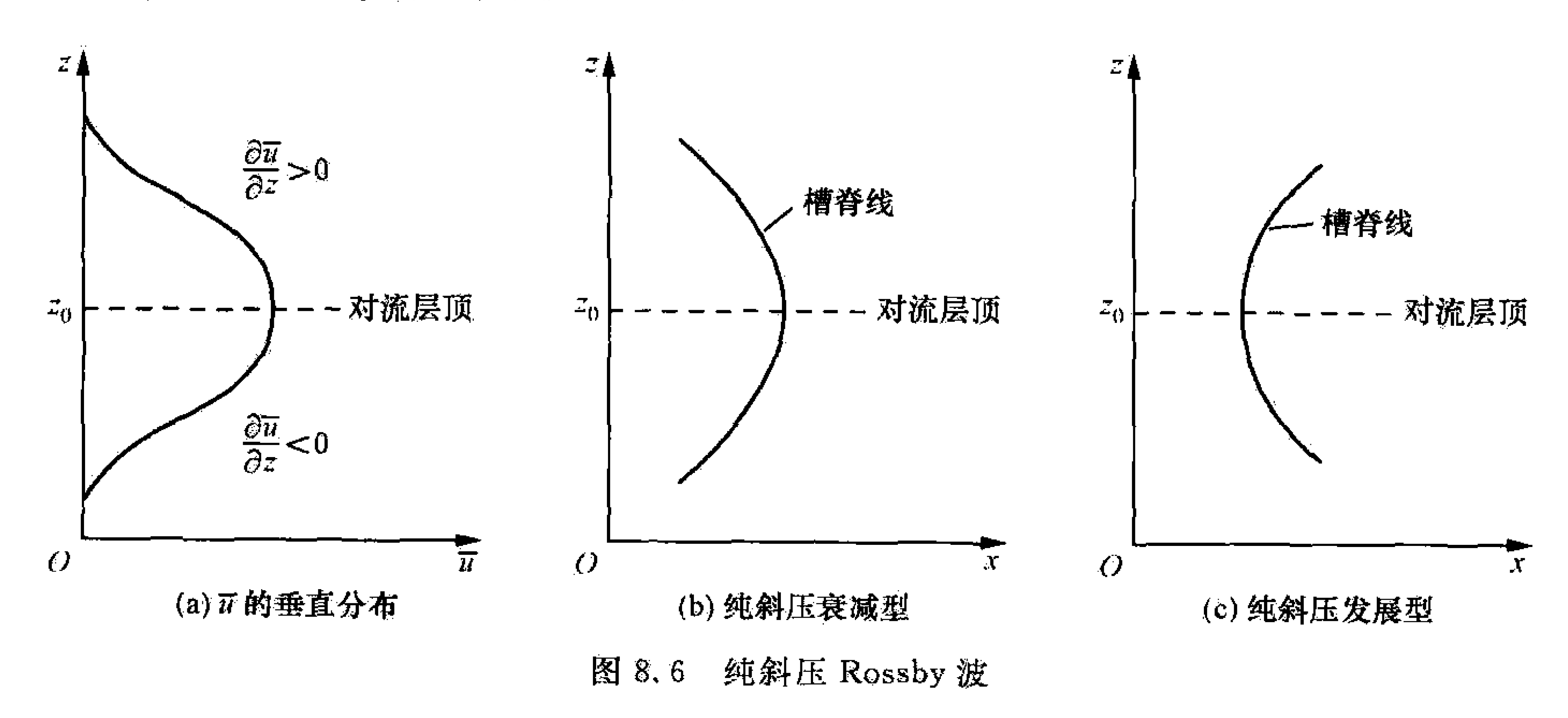


图 8.6　纯斜压 Rossby 波

在一般情况下,(8.210)式表明:Rossby 波波能的演变是正压和斜压两因子共同决定,通常,斜压因子为主,图 8.7 给出的是常见的正压衰减但斜压发展的 Rossby 波等相位线的分布. 图 8.8 是正压和斜压都发展的 Rossby 波等相位线的分布.

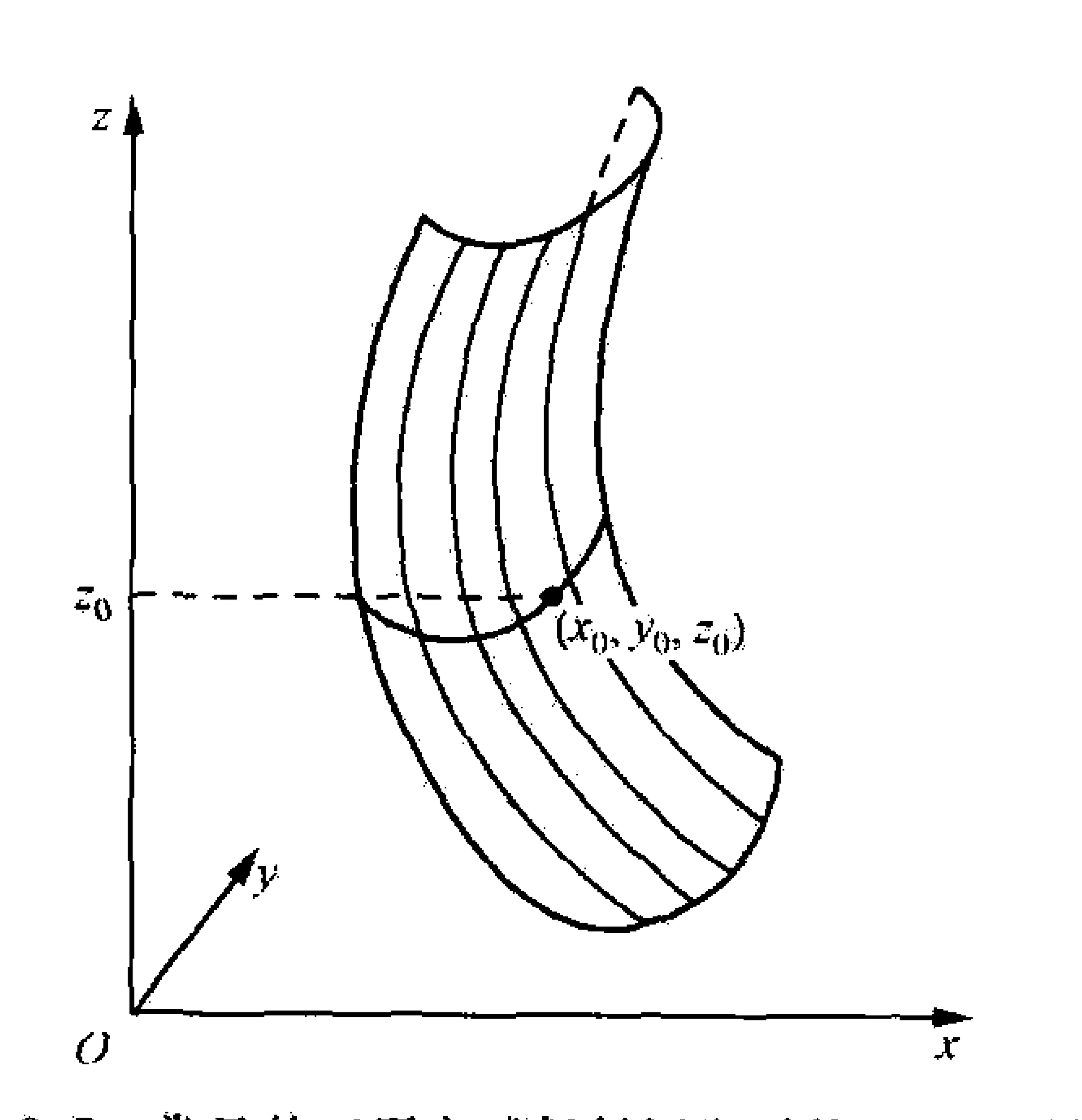


图 8.7　常见的正压衰减但斜压发展的 Rossby 波

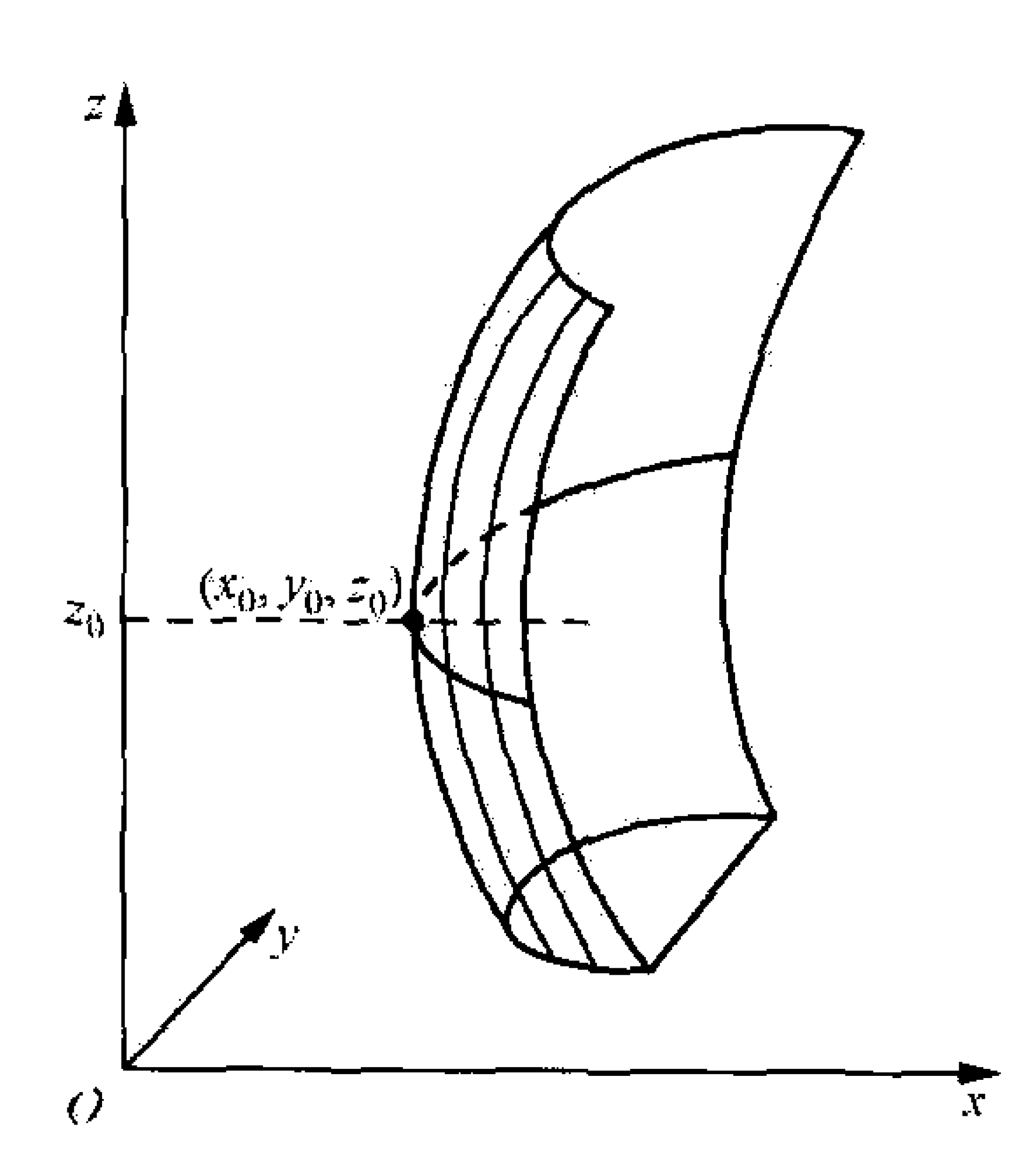


图 8.8　正压和斜压都发展的 Rossby 波

二、波数演变方程

(8.196)式的后三式就是 Rossby 波的波数演变方程. 由这些演变方程可知,跟

随群速度的移动，x 方向的波数（或该方向的波长）不变；只要有基本气流的水平切变和垂直切变，y 方向和 z 方向的波数或相应的波长就要变化. 若 $\bar{u}$ 的廓线不太尖锐，$\frac{1}{K^2}\frac{\partial B}{\partial Y}$，$\frac{1}{K^2}\frac{\partial B}{\partial Z}$ 相对较小，这样，近似有

$$\frac{\mathrm{D_g}l}{\mathrm{D}T}=-k\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y},\quad \frac{\mathrm{D_g}n}{\mathrm{D}T}=-k\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}\tag{8.216}$$

或

$$\frac{\mathrm{D_g}l^2}{\mathrm{D}T}=-2kl\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y},\quad \frac{\mathrm{D_g}n^2}{\mathrm{D}T}=-2kn\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}.\tag{8.217}$$

因此，衰减的正压 Rossby 波 $\left(kl\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y}<0\right)$，$l^2$ 要增大或 y 方向波要收缩，发展的正压 Rossby 波 $\left(kl\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y}>0\right)$，$l^2$ 要减小或 y 方向波要拉长；类似，斜压衰减的 Rossby 波 $\left(kn\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}<0\right)$，垂直方向波要收缩，斜压发展的 Rossby 波 $\left(kn\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}>0\right)$，垂直方向也要拉长.

利用(8.196)式的后三式可以求得 Rossby 波全波数 K 的演变. 若 $\bar{u}$ 的廓线不太尖锐的话，由(8.217)式求得

$$\frac{\mathrm{D_g}K^2}{\mathrm{D}T}=\frac{\mathrm{D_g}k^2}{\mathrm{D}T}+\frac{\mathrm{D_g}l^2}{\mathrm{D}T}+\frac{\mathrm{D_g}n^2}{\mathrm{D}T}=-\left(2kl\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y}+2kn\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}\right).\tag{8.218}$$

所以，衰减的 Rossby 波，全波数增大，相应全波长或总尺度减小；发展的 Rossby 波，全波数减小，总尺度增大.

三、等相位线演变方程

因 Rossby 波在水平面上的等相位线斜率为 $\tan\alpha=-k/l$，在垂直剖面(x,z)上的等相位线斜率为 $\tan\beta=-k/n$，则由(8.196)式的后三式可以求得 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 的演变. 若 $\bar{u}$ 的廓线不太尖锐的话，则由(8.216)式求得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{D_g}\tan\alpha}{\mathrm{D}T}=\dfrac{\mathrm{D_g}(-k/l)}{\mathrm{D}T}=\dfrac{k}{l^2}\dfrac{\mathrm{D_g}l}{\mathrm{D}T}=-\dfrac{k^2}{l^2}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial Y},\\[2ex]\dfrac{\mathrm{D_g}\tan\beta}{\mathrm{D}T}=\dfrac{\mathrm{D_g}(-k/n)}{\mathrm{D}T}=\dfrac{k}{n^2}\dfrac{\mathrm{D_g}n}{\mathrm{D}T}=-\dfrac{k^2}{n^2}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial Z}.\end{cases}\tag{8.219}$$

考虑到衰减的 Rossby 波，$-k/l$ 与 $\partial\bar{u}/\partial Y$ 同号，$-k/n$ 与 $\partial\bar{u}/\partial Z$ 同号；而发展的 Rossby 波，$-k/l$ 与 $\partial\bar{u}/\partial Y$ 反号，$-k/n$ 与 $\partial\bar{u}/\partial Z$ 反号. 因而，对衰减的 Rossby 波有

$$\frac{\mathrm{D_g}\,|\tan\alpha|}{\mathrm{D}T}=-\frac{k^2}{l^2}\left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y}\right|<0,\quad \frac{\mathrm{D_g}\,|\tan\beta|}{\mathrm{D}T}=-\frac{k^2}{n^2}\left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}\right|<0.\tag{8.220}$$

所以，对于衰减的 Rossby 波，其等相位线斜率的绝对值减小，使得槽脊线日益接近

东西走向($k\to 0$). 对发展的 Rossby 波有

$$\frac{\mathrm{D_g}\mid\tan\alpha\mid}{\mathrm{D}T}=\frac{k^2}{l^2}\left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y}\right|>0,\quad \frac{\mathrm{D_g}\mid\tan\beta\mid}{\mathrm{D}T}=\frac{k^2}{n^2}\left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial Z}\right|>0. \tag{8.221}$$

所以,对于发展的 Rossby 波,其等相位线斜率的绝对值增大,使得槽脊线日益接近南北走向和垂直走向($l\to 0$ 和 $n\to 0$).

上述等相位线的演变使得 $k\to 0$ 或 $l\to 0$ 和 $n\to 0$,它都使得能量的变化变慢,因而都减缓了 Rossby 波的演变.

四、波与基本气流的相互作用(wave-basic flow interaction)

由上述分析可知,波的发展与否依赖于基本气流,而基本气流的演变也依赖于 Rossby 波的动量和热量输送. 因此,波与基本气流之间存在相互影响、相互作用. 衰减的 Rossby 波,基本气流从波得到动量和能量,使基本气流及其切变增加($\bar{u}$ 和 $\partial\bar{u}/\partial Y,\partial\bar{u}/\partial Z$ 增加),因而波移动加快,y 和 z 方向波加快收缩,而槽脊线向东西走向的演变减缓. 因为此时 $\partial u/\partial Y,\partial\bar{u}/\partial Z$ 加大,所以,波的衰减相对加快. 发展的 Rossby 波,波从基本气流得到动量和能量,使基本气流及其切变减小($\bar{u}$ 和 $\partial\bar{u}/\partial Y$, $\partial\bar{u}/\partial Z$ 减小),因而波移动减慢,y 和 z 方向波的拉长减缓,而槽脊线向南北走向和垂直方向的演变也减缓. 因为此时$\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial Y},\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial Z}$减小,所以,波的发展相对减慢.

以上分析再一次说明,由于波与基本气流的相互作用,因 $\partial\bar{u}/\partial Y,\partial\bar{u}/\partial Z$ 的存在而发展的 Rossby 波,由于 $\partial\bar{u}/\partial Y,\partial\bar{u}/\partial Z$ 的减小而发展减缓;相反,因 $\partial\bar{u}/\partial Y$, $\partial\bar{u}/\partial Z$ 的存在而衰减的 Rossby 波,由于 $\partial\bar{u}/\partial Y,\partial\bar{u}/\partial Z$ 的加大,而加速衰减. 就整个大气的平均状况而言,一旦因太阳辐射的纬度差异形成了基本气流,则发展的 Rossby 波将削弱基本气流,而衰减的 Rossby 波将增加基本气流,这样,通过 Rossby 波的动量和能量输送,使得作为大气环流中一个环节的基本气流和扰动都得以维持. 下面两节,我们仍将分析波与基本气流的相互作用.

§8.9 E-P 通量(Eliassen-Palm flux)

本节介绍可以综合表征 Rossby 波的动量和热量经向和垂直输送的一个矢量场,即所谓 E-P 通量,早先,Eliassen 和 Palm 考虑准地转的情况,只引进了综合表征动量和热量经向输送的一个矢量场,即由(8.180)式引入矢量

$$\boldsymbol{J}_1=-\overline{u'v'}\boldsymbol{j}+\frac{f_0}{\partial\theta_0/\partial z}\overline{\theta'v'}\boldsymbol{k}=J_{1y}\boldsymbol{j}+J_{1z}\boldsymbol{k}, \tag{8.222}$$

它称为 Eliassen-Palm 通量,简称 E-P 通量. 仿照上式,我们引进了另一个综合表征动量和热量垂直输送的矢量场,即

$$\boldsymbol{J}_2 = -\overline{u'w'}\boldsymbol{j} + \frac{f_0}{\partial\theta_0/\partial z}\overline{\theta'w'}\boldsymbol{k} = J_{2y}\boldsymbol{j} + J_{2z}\boldsymbol{k}, \tag{8.223}$$

我们不妨也可以称它为 E-P 通量.

有了 E-P 通量,一方面它能描写动量和热量的经向和垂直输送,另一方面通过它反映波与基本气流的相互作用. 例如,线性化的准地转位涡度守恒定律(见(7.83)式)可以写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)q' + v'\frac{\partial\bar{q}}{\partial y} = 0. \tag{8.224}$$

将方程(8.224)的两边乘以 q',再沿纬圈平均得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\overline{q'^2}\right) + \overline{q'v'}\frac{\partial\bar{q}}{\partial y} = 0. \tag{8.225}$$

设 $B=\dfrac{\partial\bar{q}}{\partial y}$不随时间变化,则上式化为

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} + \overline{q'v'} = 0, \tag{8.226}$$

其中

$$E_p = \frac{\frac{1}{2}\overline{q'^2}}{B} = \frac{\frac{1}{2}\overline{q'^2}}{\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}} \tag{8.227}$$

称为扰动位涡拟能.

由(8.226)式可知,扰动位涡拟能的变化完全决定于 Rossby 波对扰动准地转位涡度的经向输送$\overline{q'v'}$.

但由(8.180)式和(8.222)式知

$$\overline{q'v'} = -\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'} + \frac{f_0}{\partial\theta_0/\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\overline{\theta'v'} = \frac{\partial J_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial J_{1z}}{\partial z} = \nabla\cdot\boldsymbol{J}_1, \tag{8.228}$$

上式表示:准地转位涡度的经向输送通量密度$\overline{q'v'}$等于 E-P 通量 $\boldsymbol{J}_1$ 的散度.

有了 E-P 通量 $\boldsymbol{J}_1$,(8.226)式可改写为

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{J}_1 = 0. \tag{8.229}$$

(8.229)式就是绝热无摩擦条件下的扰动位涡拟能的变化方程. 利用 E-P 通量可计算 Rossby 波对于动量和热量的经向输送,计算 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}_1$ 还可得到扰动位涡拟能的变化($\nabla\cdot\boldsymbol{J}_1<0$,扰动位涡拟能增加;$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_1>0$,扰动位涡拟能减小).

方程(8.229)在形式上与波能密度守恒原理和波作用量守恒原理完全一样. 这样,就可以把经圈平面(y,z)上的 E-P 通量 $\boldsymbol{J}_1$ 的方向视为该平面上群速度 $\boldsymbol{c}_g$ 的方向. 因而,可以根据 E-P 通量 $\boldsymbol{J}_1$ 的方向判别经圈平面上 Rossby 波能量传播的情况.

下面，我们进一步分析 E-P 通量在波流相互作用中的贡献.

在准地转的情况下，(8.228)式代入到(8.176)式有

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\nabla \cdot \boldsymbol{J}_1. \tag{8.230}$$

其中，平均准地转位涡度 $\bar{q}$ 在不考虑 ρ_0 和 N^2 随高度变化的情况下可以写为

$$\bar{q} = f + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2}, \tag{8.231}$$

而

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta_0 - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}. \tag{8.232}$$

(8.230)式表明：在准地转的条件下，平均准地转位涡度 $\bar{q}$ 随时间的变化决定于 $\nabla \cdot \boldsymbol{J}_1$ 的经向变化.

在一般的情况下，$\dfrac{\partial \bar{q}}{\partial t}$不仅依赖于 $\nabla \cdot \boldsymbol{J}_1$ 的经向变化，而且依赖于 $\nabla \cdot \boldsymbol{J}_2$ 的垂直变化. 为了说明这一点，我们应用以静态为背景的大气运动方程组(7.66)，但加上静力平衡的条件，即

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial x} + v\dfrac{\partial}{\partial y} + w\dfrac{\partial}{\partial z}\right)u - fv = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x}, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial x} + v\dfrac{\partial}{\partial y} + w\dfrac{\partial}{\partial z}\right)v + fu = -\dfrac{\partial \phi}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = g\dfrac{\theta}{\theta_0} \quad (\phi \equiv p'/\rho_0), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial x} + v\dfrac{\partial}{\partial y} + w\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\left(g\dfrac{\theta}{\theta_0}\right) + N^2 w = 0. \end{cases} \tag{8.233}$$

若令

$$u = \bar{u} + u', \quad v = v', \quad w = w', \quad \phi = \bar{\phi} + \phi', \quad \theta = \bar{\theta} + \theta', \tag{8.234}$$

则基本状态满足地转风关系和静力学关系：

$$\bar{u} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}, \quad f_0\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} = g\frac{\bar{\theta}}{\theta_0} \quad (\bar{\psi} = \bar{\phi}/f_0), \tag{8.235}$$

其中已将 f 写成了 f_0，(8.235)中的两式构成了热成风关系：

$$f_0\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\bar{\theta}}{\theta_0}\right) = -f_0\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y \partial z}, \tag{8.236}$$

而且有

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \tag{8.237}$$

将(8.234)式代入方程组(8.233)，并将它沿纬圈平均，同时利用(8.237)式，得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t}=-\dfrac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}-\dfrac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z},\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(g\dfrac{\bar{\theta}}{\theta_0}\right)=\dfrac{g}{\theta_0}\left(-\dfrac{\partial \overline{\theta'v'}}{\partial y}-\dfrac{\partial \overline{\theta'w'}}{\partial z}\right).\end{cases} \tag{8.238}$$

由于这里的 $\bar{u}$ 和 $\bar{\theta}$ 分别满足地转风关系和静力学关系，因而认为方程组(8.238)是具有准地转意义下的方程组.正由于此，我们还可以利用(8.231)式，注意

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t}=-\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial y}+\frac{f_0}{N^2}\frac{\partial^2}{\partial t \partial z}\left(g\frac{\bar{\theta}}{\theta_0}\right), \tag{8.239}$$

则(8.238)的第一式作 $-\dfrac{\partial}{\partial y}$ 运算，第二式作 $\dfrac{f_0}{N^2}\dfrac{\partial}{\partial z}$ 运算，然后相加得到

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}\nabla\cdot\boldsymbol{J}_1-\frac{\partial}{\partial z}\nabla\cdot\boldsymbol{J}_2. \tag{8.240}$$

(8.240)式可以视为是(8.230)式的推广.它说明：正是由于 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}_1$ 的经向变化和 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}_2$ 的垂直变化，即动量和热量输送及其在空间的分布不均匀，可以引起准地转意义下的平均位涡度的变化，也就引起了基本气流的变化.在(8.240)式中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_2=\frac{\partial J_{2y}}{\partial y}+\frac{\partial J_{2z}}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'w'}+\frac{f_0}{\partial\theta_0/\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\overline{\theta'w'}. \tag{8.241}$$

§8.10　东西风带和经圈环流的维持

大气环流除具有平均槽脊的特征外，在经圈平面(y,z)上还存在东西风带(即$\bar{u}$)和与之相联系的平均经圈环流(即$\bar{v}$和$\bar{w}$)，见图8.9.

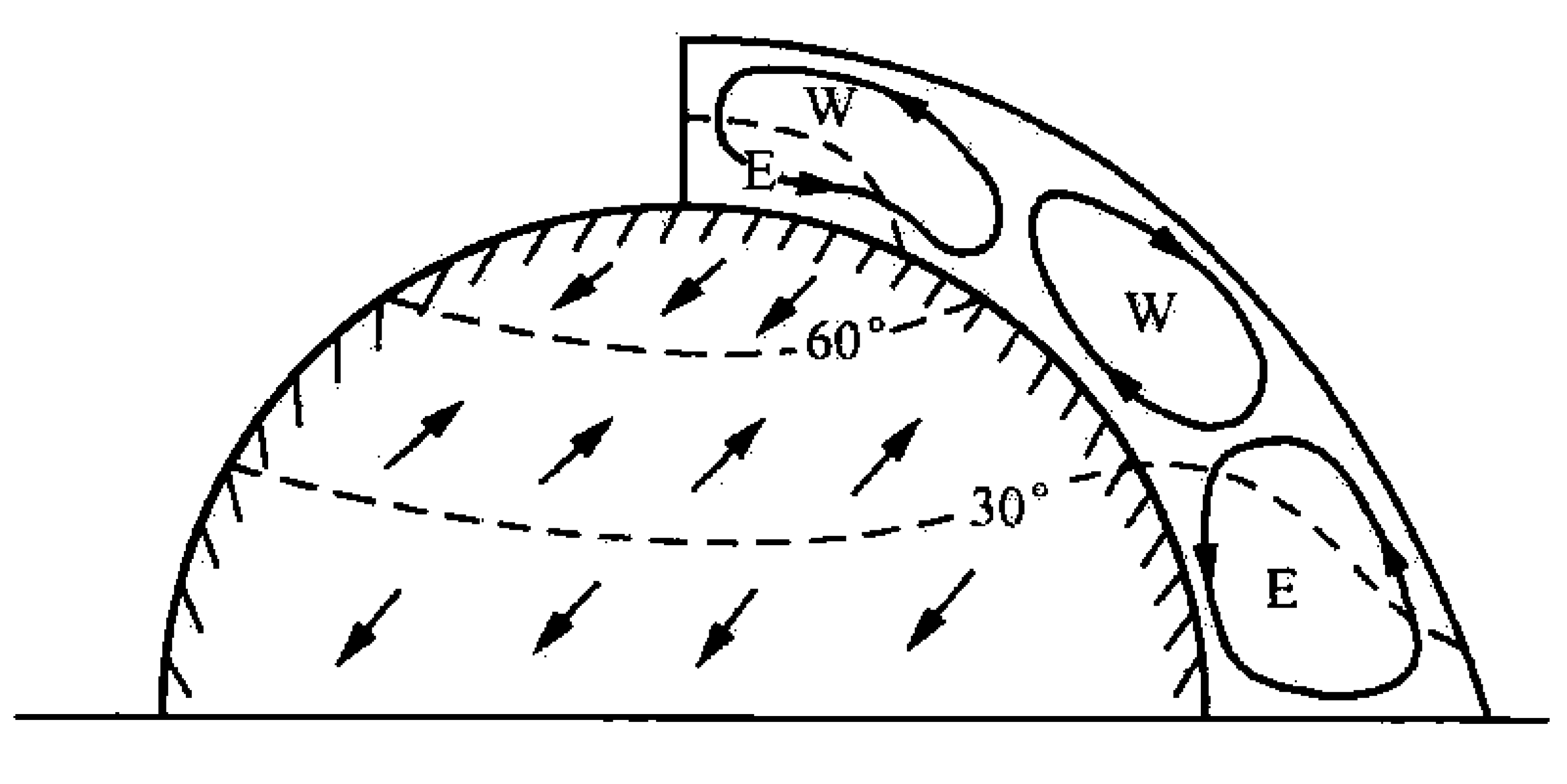


图8.9　东西风带和经圈环流(W表西风，E表东风)

正由于此，我们不能再像(8.234)式那样，此时要考虑 $\bar{v}$ 和 $\bar{w}$，同时要考虑摩擦和加热.为了方便，在方程组(8.233)中，不考虑 $\dfrac{dv}{dt}$，即认为 y 方向存在一个地转关系.这样，对于方程组(8.233)，我们设

$$\begin{aligned}&u=\bar{u}+u',\quad v=\bar{v}+v',\quad w=\bar{w}+w',\\&\theta=\bar{\theta}+\theta',\quad \psi=\bar{\psi}+\psi'\quad (\psi=\phi/f_0),\end{aligned} \tag{8.242}$$

代入方程组(8.233)，并沿纬圈平均，在忽略 $\bar{v}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}$，$\bar{w}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z}$，$\bar{v}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(g\dfrac{\bar{\theta}}{\theta_0}\right)$和

$\overline{w}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(g\dfrac{\bar{\theta}}{\theta_0}\right)$等项后，化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial t}-f_0\bar{v}=-\dfrac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}-\dfrac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}+\bar{F}_x,\\ \bar{u}=-\dfrac{\partial\bar{\psi}}{\partial y},\\ f_0\dfrac{\partial\bar{\psi}}{\partial z}=g\dfrac{\bar{\theta}}{\theta_0},\\ \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\dfrac{\partial\overline{w}}{\partial z}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(g\dfrac{\bar{\theta}}{\theta_0}\right)+N^2\overline{w}=\dfrac{g}{\theta_0}\left(-\dfrac{\partial\overline{\theta'v'}}{\partial y}-\dfrac{\partial\overline{\theta'w'}}{\partial z}\right)+\dfrac{g}{c_pT_0}\bar{Q},\end{cases}\tag{8.243}$$

其中 $\bar{F}_x$ 表沿纬圈平均的 x 方向上的摩擦力，$\bar{Q}$ 表沿纬圈平均的非绝热加热.

为了方便，我们引进下列所谓次级经圈环流：

$$\begin{cases}\bar{v}^*=\bar{v}-\dfrac{1}{\partial\theta_0/\partial z}\dfrac{\partial\overline{\theta'v'}}{\partial z}-\dfrac{1}{f_0}\dfrac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z},\\ \overline{w}^*=\overline{w}+\dfrac{1}{\partial\theta_0/\partial z}\dfrac{\partial\overline{\theta'v'}}{\partial y}+\dfrac{1}{f_0}\dfrac{\partial\overline{u'w'}}{\partial y}.\end{cases}\tag{8.244}$$

利用(8.243)的第四式，并且不考虑 $\partial\theta_0/\partial z$ 随 z 的变化，显然有

$$\frac{\partial\bar{v}^*}{\partial y}+\frac{\partial\overline{w}^*}{\partial z}=0.\tag{8.245}$$

有了次级经圈环流$(\bar{v}^*,\overline{w}^*)$，方程组(8.243)的第一式和第五式不难化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial t}-f_0\bar{v}^*=\nabla\cdot\boldsymbol{J}_1+\bar{F}_x,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(g\dfrac{\bar{\theta}}{\theta_0}\right)+N^2\overline{w}^*=-\dfrac{N^2}{f_0}\nabla\cdot\boldsymbol{J}_2+\dfrac{g}{c_pT_0}\bar{Q}.\end{cases}\tag{8.246}$$

在(8.229)式和(8.246)式的第一式中都包含 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}_1$ 一项，它正好反映了波与基流之间的相互作用. 在 $\boldsymbol{J}_1$ 的辐散区域，$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_1>0$，扰动位涡拟能减小，纬向基流增加(西风增强，东风减弱)；在 $\boldsymbol{J}_1$ 的辐合区域，$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_1<0$，扰动位涡拟能增加，纬向基流减小(西风减弱，东风增强)；而在 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}_1=0$ 的区域，扰动位涡拟能不变，使得纬向基流不变，此时可称为无加速原理.

考虑(8.239)式，方程组(8.246)的第一式作$-\dfrac{\partial}{\partial y}$运算，第二式作$\dfrac{f_0}{N^2}\dfrac{\partial}{\partial z}$运算，然后相加得到

$$\frac{\partial\bar{q}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}\nabla\cdot\boldsymbol{J}_1-\frac{\partial}{\partial z}\nabla\cdot\boldsymbol{J}_2-\frac{\partial\bar{F}_x}{\partial y}-\frac{f_0g}{N^2c_pT_0}\frac{\partial\bar{Q}}{\partial z}.\tag{8.247}$$

这是考虑了摩擦和非绝热加热后确定$\dfrac{\partial\bar{q}}{\partial t}$的方程，即它是(8.240)式的推广.

若引进矢量

$$\boldsymbol{M}\equiv(\nabla\cdot\boldsymbol{J}_1+\bar{F}_x)\boldsymbol{j}+\left(\nabla\cdot\boldsymbol{J}_2+\frac{f_0 g}{N^2 c_p T_0}\bar{Q}\right)\boldsymbol{k}, \tag{8.248}$$

则方程(8.247)可以改写为

$$\frac{\partial\bar{q}}{\partial t}=-\nabla\cdot\boldsymbol{M}, \tag{8.249}$$

矢量 $\boldsymbol{M}$ 综合表征了摩擦、非绝热加热和动量热量的输送等因子的作用. 由方程(8.249)知，当 $\nabla\cdot\boldsymbol{M}<0$ 时，$\bar{q}$ 增加；$\nabla\cdot\boldsymbol{M}>0$ 时，$\bar{q}$ 减小.

至于平均经圈环流，由(8.245)式引入相应次级经圈环流($\bar{v}^*$，$\bar{w}^*$)的流函数 $\bar{\chi}^*$：

$$\bar{v}^*=\frac{\partial\bar{\chi}^*}{\partial z},\quad \bar{w}^*=-\frac{\partial\bar{\chi}^*}{\partial y}. \tag{8.250}$$

这样，方程组(8.246)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial t}-f_0\dfrac{\partial\bar{\chi}^*}{\partial z}=\nabla\cdot\boldsymbol{J}_1+\bar{F}_x,\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}\left(g\dfrac{\bar{\theta}}{\theta_0}\right)-N^2\dfrac{\partial\bar{\chi}^*}{\partial y}=-\dfrac{N^2}{f_0}\nabla\cdot\boldsymbol{J}_2+\dfrac{g}{c_p T_0}\bar{Q}.\end{cases} \tag{8.251}$$

(8.235)式(或方程组(8.243)的第二式和第三式)代入到上式，得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial t\partial y}+f_0\dfrac{\partial\bar{\chi}^*}{\partial z}=-\nabla\cdot\boldsymbol{J}_1-\bar{F}_x,\\[2ex] -f_0\dfrac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial t\partial z}+N^2\dfrac{\partial\bar{\chi}^*}{\partial y}=\dfrac{N^2}{f_0}\nabla\cdot\boldsymbol{J}_2-\dfrac{g}{c_p T_0}\bar{Q}.\end{cases} \tag{8.252}$$

将(8.252)的第一式作 $f_0\dfrac{\partial}{\partial z}$ 运算，第二式作 $\dfrac{\partial}{\partial y}$ 运算，然后相加得到

$$N^2\frac{\partial^2\bar{\chi}^*}{\partial y^2}+f_0^2\frac{\partial^2\bar{\chi}^*}{\partial z^2}=-f_0\frac{\partial}{\partial z}\nabla\cdot\boldsymbol{J}_1+\frac{N^2}{f_0}\frac{\partial}{\partial y}\nabla\cdot\boldsymbol{J}_2-f_0\frac{\partial\bar{F}_x}{\partial z}-\frac{g}{c_p T_0}\frac{\partial\bar{Q}}{\partial y}, \tag{8.253}$$

或

$$\frac{\partial^2\bar{\chi}^*}{\partial y^2}+\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2\bar{\chi}^*}{\partial z^2}=-\frac{f_0}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\nabla\cdot\boldsymbol{J}_1+\frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial y}\nabla\cdot\boldsymbol{J}_2-\frac{f_0}{N^2}\frac{\partial\bar{F}_x}{\partial z}-\frac{g}{c_p T_0 N^2}\frac{\partial\bar{Q}}{\partial y}. \tag{8.254}$$

(8.253)式或(8.254)式就是描写平均经圈环流变化的方程. 由方程可知，平均经圈环流的空间变化取决于：(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{J}_1$ 的垂直变化，(2) $\nabla\cdot\boldsymbol{J}_2$ 的经向变化，(3) $\bar{F}_x$ 的垂直变化，(4) $\bar{Q}$ 的经向变化. 因通常 $N^2>0$，所以，方程(8.253)或(8.254)是带有非齐次项的二阶椭圆型的偏微分方程. 根据右端四个强迫函数的实际值可以由方程解出 $\bar{\chi}^*$，得到与图 8.9 相似的三圈环流.

综上分析可知，大气东西风带和经圈环流都是 Rossby 波对动量和热量的输送，以及非绝热加热和摩擦因素共同作用的结果.

§8.11 Rossby 波的共振相互作用

前面三节我们分析了波与基本气流的相互作用，本节分析 Rossby 波之间的相互作用.

不考虑基本气流时，线性正压准地转位涡度守恒定律可写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_h^2\psi^{(0)}-\lambda_0^2\psi^{(0)})+\beta_0\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial x}=0, \tag{8.255}$$

它表征的正压 Rossby 波的圆频率是

$$\omega=-\beta_0 k/(K_h^2+\lambda_0^2). \tag{8.256}$$

线性方程(8.255)可以作为完全的准地转位涡度方程的零级近似，再进一步需要考虑非线性的作用. 这样，方程(8.255)可改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_h^2\psi^{(1)}-\lambda_0^2\psi^{(1)})+\beta_0\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial x}=-\mathrm{J}(\psi^{(0)},\nabla_h^2\psi^{(0)}). \tag{8.257}$$

上式可以视为完全准地转位涡度方程的一级近似，但其中的非线性项中的 ψ 用零级近似 $\psi^{(0)}$ 去代替，即上式中

$$\mathrm{J}(\psi^{(0)},\nabla_h^2\psi^{(0)})=\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial x}\frac{\partial\nabla_h^2\psi^{(0)}}{\partial y}-\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial y}\frac{\partial\nabla_h^2\psi^{(0)}}{\partial x}. \tag{8.258}$$

为了求方程(8.257)的解，特别是为了考查由 $\mathrm{J}(\psi^{(0)},\nabla_h^2\psi^{(0)})$ 所表征的非线性作用，我们设

$$\psi^{(0)}=\sum_{r=1}^{N}a_r\cos\theta, \tag{8.259}$$

其中 $a_r(r=1,2,\cdots,N)$ 为第 r 个 Rossby 波的振幅；θ_r 为其相位，即

$$\theta_r\equiv k_r x+l_r y-\omega_r t+\alpha\quad(r=1,2,\cdots,N), \tag{8.260}$$

k_r,l_r 分别为第 r 个 Rossby 波在 x,y 方向上的波数，其对应的波矢量和全波数分别是

$$\boldsymbol{K}_r=k_r\boldsymbol{i}+l_r\boldsymbol{j},\quad K_r=\sqrt{k_r^2+l_r^2}. \tag{8.261}$$

在(8.260)式中，α 为初相位，ω_r 为圆频率，它满足

$$\omega_r=-\beta_0 k_r/(K_r^2+\lambda_0^2)\quad(r=1,2,\cdots,N). \tag{8.262}$$

作为缓变波列的近似，我们认为 a_r,k_r,l_r,ω_r 都是常数.

将(8.259)式代入到方程(8.257)得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_h^2\psi^{(1)}-\lambda_0^2\psi^{(1)})+\beta_0\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial x}=F(x,y,t,p,q), \tag{8.263}$$

其中

$$F(x,y,t,p,q) \equiv \sum_p \sum_q a_p a_q K_p^2 (k_q l_p - k_p l_q) \sin\theta_p \sin\theta_q \tag{8.264}$$

是方程(8.263)的非齐次项或强迫项.因为

$$F(x,y,t,p,q) = F(x,y,t,q,p), \tag{8.265}$$

$$\sin\theta_p \sin\theta_q = \frac{1}{2}[\cos(\theta_p - \theta_q) - \cos(\theta_p + \theta_q)], \tag{8.266}$$

这样,(8.264)式可改写为

$$\begin{aligned} F(x,y,t,p,q) &= \frac{1}{2}\{F(x,y,t,p,q) + F(x,y,t,q,p)\} \\ &= \sum_p \sum_q \frac{a_p a_q}{4}(K_p^2 - K_q^2)(k_q l_p - k_p l_q)[\cos(\theta_q + \theta_q) - \cos(\theta_p - \theta_q)] \\ &= \sum_p \sum_q I(K_p, K_q) a_p a_q [\cos(\theta_p + \theta_q) - \cos(\theta_p - \theta_q)], \end{aligned} \tag{8.267}$$

其中

$$I(K_p, K_q) = \frac{1}{4}(K_p^2 - K_q^2)(\boldsymbol{K}_p \times \boldsymbol{K}_q) \cdot \boldsymbol{k}. \tag{8.268}$$

从强迫项 F 的表达式(8.267)知,这个强迫项也是一个振荡函数,其相位为

$$\theta_{pq} = \theta_p \pm \theta_q. \tag{8.269}$$

注意(8.260)式即知,强迫项 F 的波矢和圆频率分别是

$$\boldsymbol{K}_{pq} = \boldsymbol{K}_p \pm \boldsymbol{K}_q; \tag{8.270}$$

$$\omega_{pq} = \omega_p \pm \omega_q. \tag{8.271}$$

非线性项引起的强迫项表征了第 p 个波和第 q 个波之间的相互作用.显然,由(8.268)式知,当两个波的波长相同($K_p = K_q$)或波矢平行($\boldsymbol{K}_p \times \boldsymbol{K}_q = 0$)时,就有

$$I(\boldsymbol{K}_p, \boldsymbol{K}_q) = 0, \quad F = 0. \tag{8.272}$$

这样,这两个波之间就无相互作用.

方程(8.263)是非齐次方程.当 $F=0$ 时,方程化为齐次方程,此时,它有形式与(8.259)相似的解,其中第 r 个波有相位 θ_r(或 $-\theta_r$)和固有频率 ω_r.在 $F \neq 0$ 时,一般非齐次项所产生的特解与齐次方程的解形式相似,但只有当非齐次项 F 中的振荡与齐次方程的固有振荡发生共振时(此时非齐次项的振荡相位与齐次方程的固有振荡相位相同),特解的形式才与齐次方程的解形式不同.

由(8.267)式知,F 中包含相位分别是 $\theta_p + \theta_q$ 和 $\theta_p - \theta_q$ 的两大类波.例如,当 $\theta_p + \theta_q = -\theta_r$ 时,F 中的一项 $I(K_p, K_q) a_p a_q \cos(\theta_p + \theta_q)$ 就与齐次方程的波发生共振,此时,方程(8.263)有形式为 $A_{pq} t \cos(\theta_p + \theta_q)$ 的特解,这部分特解随着时间的增大而起主要作用,相比,非共振项 $I(K_p, K_q) a_p a_q \cos(\theta_p - \theta_q)$ 所引起的特解可以忽略.所以,共振要求

$$\theta_p + \theta_q + \theta_r = 0. \tag{8.273}$$

相应有

$$\begin{cases} k_p + k_q + k_r = 0, \\ l_p + l_q + l_r = 0, \\ \omega_p + \omega_q + \omega_r = 0, \end{cases} \tag{8.274}$$

这就是三波共振的条件. 利用它,我们可以研究由于非线性项而产生的波与波之间的相互作用.

基于上述分析,我们讨论 Rossby 波之间的相互作用,就直接从非线性准地转位涡度方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_h^2 \psi - \lambda_0^2 \psi) + \mathrm{J}(\psi, \nabla_h^2 \psi) + \beta_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{8.275}$$

出发. 而设解为下列三波的叠加:

$$\psi = a_1(t)\cos\theta_1 + a_2(t)\cos\theta_2 + a_3(t)\cos\theta_3, \tag{8.276}$$

其中 $a_1(t)$,$a_2(t)$,$a_3(t)$分别是三波的振幅;θ_1,θ_2,θ_3 分别是它们的相位,其中的圆频率 ω_1,ω_2,ω_3 都满足(8.262)式. 将(8.276)式代入到方程(8.275)得到

$$\begin{aligned} &(K_1^2 + \lambda_0^2)\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t}\cos\theta_1 + (K_2^2 + \lambda_0^2)\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}\cos\theta_2 + (K_3^2 + \lambda_0^2)\frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}t} \\ &\quad = \frac{1}{2}(K_2^2 - K_3^2)(k_2 l_3 - k_3 l_2)a_2 a_3[\cos(\theta_2 + \theta_3) - \cos(\theta_2 - \theta_3)] \\ &\qquad + \frac{1}{2}(K_3^2 - K_1^2)(k_3 l_1 - k_1 l_3)a_3 a_1[\cos(\theta_3 + \theta_1) - \cos(\theta_3 - \theta_1)] \\ &\qquad + \frac{1}{2}(K_1^2 - K_2^2)(k_1 l_2 - k_2 l_1)a_1 a_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned} \tag{8.277}$$

为了考查三波的振幅所满足的方程以分析能量,我们利用共振条件(8.273)式和(8.274)式,即

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0, \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0, \quad l_1 + l_2 + l_3 = 0, \end{cases} \tag{8.278}$$

而且忽略非共振项的作用,则求得下列 Euler 方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t} = \gamma_1 a_2 a_3 \quad \left(\gamma_1 = \dfrac{K_2^2 - K_3^2}{K_1^2 + \lambda_0^2}\gamma\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t} = \gamma_2 a_3 a_1 \quad \left(\gamma_2 = \dfrac{K_3^2 - K_1^2}{K_2^2 + \lambda_0^2}\gamma\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}t} = \gamma_3 a_1 a_2 \quad \left(\gamma_3 = \dfrac{K_1^2 - K_2^2}{K_3^2 + \lambda_0^2}\gamma\right), \end{cases} \tag{8.279}$$

其中

$$\gamma = \frac{1}{2}(k_2 l_3 - k_3 l_2) = \frac{1}{2}(k_3 l_1 - k_1 l_3) = \frac{1}{2}(k_1 l_2 - k_2 l_1). \tag{8.280}$$

但由(8.48)式知，Rossby 波的波能密度为

$$\mathscr{E}_j = (K_j^2 + \lambda_0^2) a_j^2 / 4 \quad (j = 1,2,3), \tag{8.281}$$

则将方程组(8.279)的三式分别乘以$(K_1^2+\lambda_0^2)a_1/2$，$(K_2^2+\lambda_0^2)a_2/2$，$(K_3^2+\lambda_0^2)a_3/2$，然后相加得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3) = 0. \tag{8.282}$$

因此，共振三波的总能量是守恒的，这充分说明，共振三波相互作用，彼此交换能量.

由方程组(8.279)还可求得

$$\frac{1}{K_2^2 - K_3^2}\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{K_3^2 - K_1^2}\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{K_1^2 - K_2^2}\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_3}{\mathrm{d}t}. \tag{8.283}$$

因而，不失一般性，若设

$$K_3 < K_2 < K_1; \tag{8.284}$$

相应，波长有

$$L_1 < L_2 < L_3. \tag{8.285}$$

则由(8.283)式知：

$$\begin{aligned} &\text{当}\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_2}{\mathrm{d}t}<0,\text{则}\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_1}{\mathrm{d}t}>0,\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_3}{\mathrm{d}t}>0; \\ &\text{当}\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_2}{\mathrm{d}t}>0,\text{则}\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_1}{\mathrm{d}t}<0,\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_3}{\mathrm{d}t}<0. \end{aligned} \tag{8.286}$$

由此便知：共振三波不但彼此交换能量，而且是波长中等的 Rossby 波向较小波长和较大波长的 Rossby 波传播能量，或者相反. 这反映了实际大气中高低指数环流中的能量转换.

因正压模式中的位涡拟能是

$$\frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}(\nabla_h^2\psi - \lambda_0^2\psi)^2, \tag{8.287}$$

则对第 j 个波，因 $\psi_j = a_j(t)\cos\theta_j$，则有

$$\frac{1}{2}q_j^2 = \frac{1}{2}(K_h^2 + \lambda_0^2)^2 a_j^2 \cos^2\theta_j. \tag{8.288}$$

注意 $\cos^2\theta$ 在一个周期内的平均值是 1/2，所以位涡拟能在一个周期内的平均值，即所谓位涡拟能密度是

$$\mathscr{F}_j = (K_h^2 + \lambda_0^2)^2 a_j^2 / 4 \quad (j = 1,2,3). \tag{8.289}$$

比较(8.289)式和(8.281)式有

$$\mathscr{F}_j = (K_j^2 + \lambda_0^2)\mathscr{E}_j \quad (j = 1,2,3). \tag{8.290}$$

类似(8.282)式，利用(8.279)式我们也可求得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2+\mathscr{F}_3)=0. \tag{8.291}$$

因此，共振三波的总位涡拟能也是守恒的.

设初始时刻三波的总能量密度为 $\mathscr{E}_0$. 则由(8.282)式有

$$\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_3=\mathscr{E}_0=\text{常数}, \tag{8.292}$$

再由(8.291)式和(8.292)式必有 $K_1^2\mathscr{E}_1+K_2^2\mathscr{E}_2+K_3^2\mathscr{E}_3$ 为常数，设这个常数为 $K_0^2\mathscr{E}_0$，即

$$K_1^2\mathscr{E}_1+K_2^2\mathscr{E}_2+K_3^2\mathscr{E}_3=K_0^2\mathscr{E}_0=\text{常数}. \tag{8.293}$$

(8.293)式除以(8.292)式即得到共振三波总位涡拟能与总能量之比为

$$K_0^2=\frac{K_1^2\mathscr{E}_1+K_2^2\mathscr{E}_2+K_3^2\mathscr{E}_3}{\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_3}=\text{常数}. \tag{8.294}$$

由此可知：由(8.293)式所定义的 K_0 为共振三波的波能加权平均波数，相应，(8.294)式所表征的是平均波数守恒原理或平均尺度守恒原理. 它表明：共振三波在彼此交换能量的过程中，必须遵从平均尺度守恒的约束.

除了(8.282)式和(8.291)式以外，Euler 方程组(8.279)还有下列守恒量：

$$\begin{cases} a_1^2-\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}a_2^2=A_1^2, \quad a_2^2-\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}a_1^2=A_2^2, \quad a_3^2-\dfrac{\gamma_3}{\gamma_2}a_2^2=A_3^2, \\ a_1^2-\dfrac{\gamma_1}{\gamma_3}a_3^2=A_1^2-\dfrac{\gamma_1}{\gamma_3}A_3^2, \quad a_2^2-\dfrac{\gamma_2}{\gamma_3}a_3^2=-\dfrac{\gamma_2}{\gamma_3}A_3^2, \quad a_3^2-\dfrac{\gamma_3}{\gamma_1}a_1^2=A_3^2-\dfrac{\gamma_3}{\gamma_1}A_1^2, \end{cases} \tag{8.295}$$

其中 A_1^2，A_2^2 和 A_3^2 为常数，且

$$A_2^2=-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}A_1^2. \tag{8.296}$$

下面我们求解 Euler 方程组(8.279). 设 a_1, a_2, a_3 的初值分别是 a_{10}, a_{20}, a_{30}，则有

$$A_1^2=a_{10}^2-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}a_{20}^2, \quad A_2^2=a_{20}^2-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}a_{10}^2, \quad A_3^2=a_{30}^2-\frac{\gamma_3}{\gamma_2}a_{20}^2, \tag{8.297}$$

和下列 a_1，a_2 和 a_3 三者之间的关系：

$$\begin{cases} a_1^2-a_{10}^2=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}(a_2^2-a_{20}^2)=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_3}(a_3^2-a_{30}^2), \\ a_2^2-a_{20}^2=\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}(a_1^2-a_{10}^2)=\dfrac{\gamma_2}{\gamma_3}(a_3^2-a_{30}^2), \\ a_3^2-a_{30}^2=\dfrac{\gamma_3}{\gamma_1}(a_1^2-a_{10}^2)=\dfrac{\gamma_3}{\gamma_2}(a_3^2-a_{20}^2). \end{cases} \tag{8.298}$$

这样，Euler 方程组(8.279)中的任何一个方程利用(8.295)式和(8.298)式都可以

化为单一未知函数的非线性常微分方程，这些方程为

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t}\right)^2=\dfrac{\omega^2}{A_1^2}(A_1^2-a_1^2)(m'^2A_1^2+m^2a_1^2),\\ \left(\dfrac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}\right)^2=\dfrac{\omega^2}{A_2^2}(A_2^2-a_2^2)(A_2^2-m^2a_2^2),\\ \left(\dfrac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}t}\right)^2=\dfrac{\omega^2}{A_3^2}(A_3^2-a_3^2)(a_3^2-m'^2A_3^2),\end{cases} \tag{8.299}$$

其中

$$\begin{cases}\omega^2=-\gamma_1\gamma_2A_3^2=\gamma_1(\gamma_3a_{20}^2-\gamma_2a_{30}^2),\\ m^2=\dfrac{\gamma_3A_1^2}{\gamma_1A_3^2}=\dfrac{\dfrac{a_{10}^2}{\gamma_1}-\dfrac{a_{20}^2}{\gamma_2}}{\dfrac{a_{30}^2}{\gamma_3}-\dfrac{a_{20}^2}{\gamma_2}},\quad m'^2\equiv1-m^2=\dfrac{\gamma_1A_3^2-\gamma_3A_1^2}{\gamma_1A_3^2}=\dfrac{\dfrac{a_{10}^2}{\gamma_1}-\dfrac{a_{30}^2}{\gamma_3}}{\dfrac{a_{20}^2}{\gamma_2}-\dfrac{a_{30}^2}{\gamma_3}}.\end{cases} \tag{8.300}$$

方程(8.299)的解正好分别是

$$\begin{cases}a_1(t)=A_1\mathrm{cn}(\omega t-\alpha),\\ a_2(t)=A_2\mathrm{sn}(\omega t-\alpha),\\ a_3(t)=A_3\mathrm{dn}(\omega t-\alpha),\end{cases} \tag{8.301}$$

其中 sn( ),cn( )和 dn( )分别为 Jacobi 椭圆正弦函数、Jacobi 椭圆余弦函数和第三类 Jacobi 椭圆函数，其模数和余模数分别为 m 和 m'($0<m,m'<1$)，α 为初相位.

因 sn$x$,cn$x$ 的周期为 4K(m)，dn$x$ 的周期为 2K(m)，则 $a_1(t),a_2(t),a_3(t)$的周期分别是

$$T_1=4\mathrm{K}(m)/\omega,\quad T_2=4\mathrm{K}(m)/\omega,\quad T_3=2\mathrm{K}(m)/\omega, \tag{8.302}$$

其中

$$\mathrm{K}(m)=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}\mathrm{d}x\quad(x=\sin\varphi) \tag{8.303}$$

为第一类 Legendre 完全椭圆积分.

$a_1(t)$,$a_2(t)$和 $a_3(t)$的图像见图 8.10. 从图可知，这里在任何时刻 $a_3(t)$都不为零.

我们知道，按一般线性理论，不稳定波动的振幅 a 应满足

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\sigma a\quad(\sigma>0), \tag{8.304}$$

相应，振幅 a 随时间 t 呈指数增长，即

$$a(t)=a_0\mathrm{e}^{\sigma t}, \tag{8.305}$$

σ 为线性波的增长率. 因而,线性波的振幅无限增长,这是不附合实际的,其原因是没有考虑到非线性项的作用. 但从本节的讨论看到,由于波之间的相互作用,波的振幅不能再无限制地增长,Landau 在 1944 年就预料到这个结果,他认为,最有可能的波的振幅应满足

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \sigma a - \frac{l}{2}a^3, \tag{8.306}$$

其中 l 称为 Landau 常数,方程(8.306)称为 Landau 方程. Landau 方程与我们的分析是一致的.

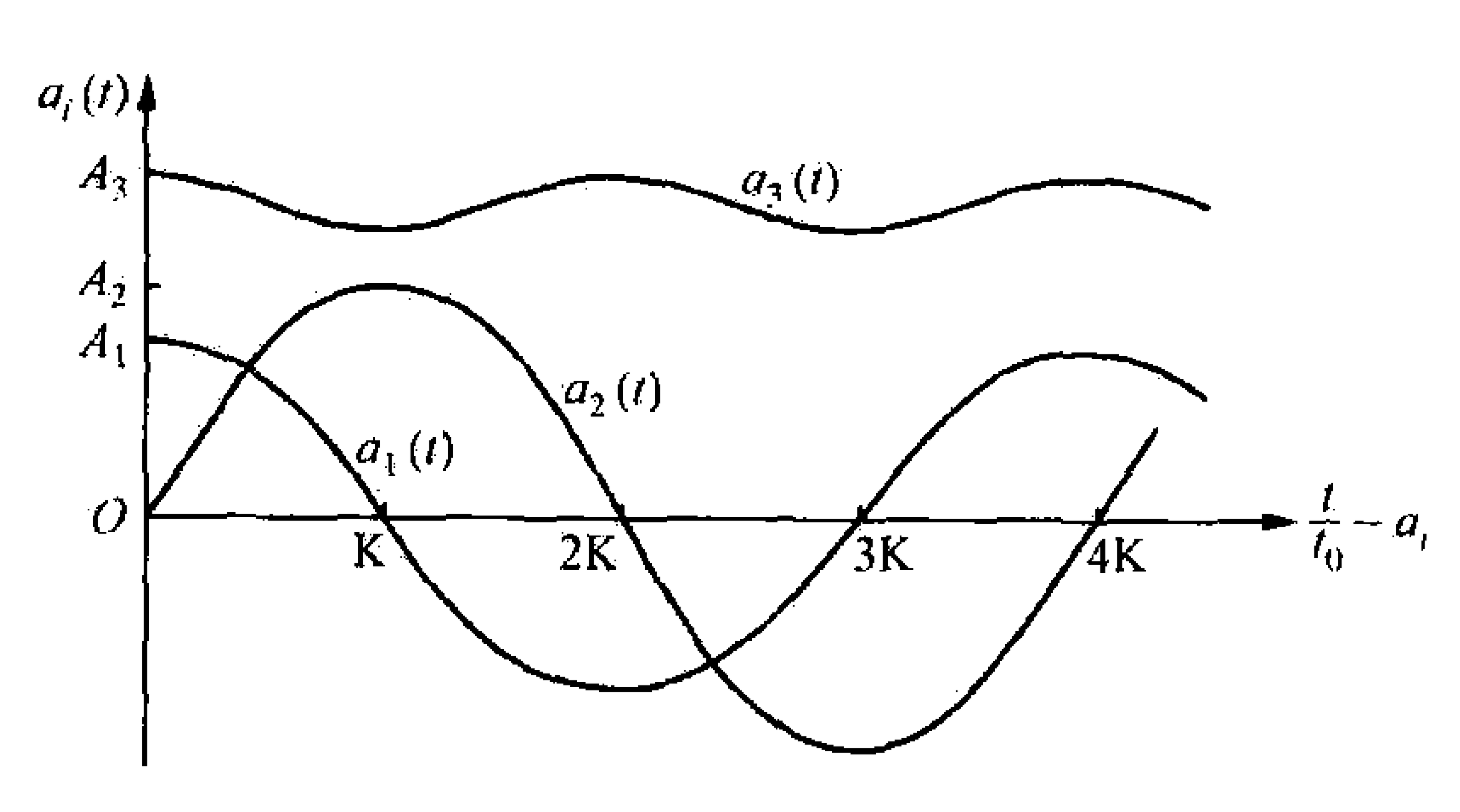


图 8.10 共振相互作用下 Rossby 波振幅的变化

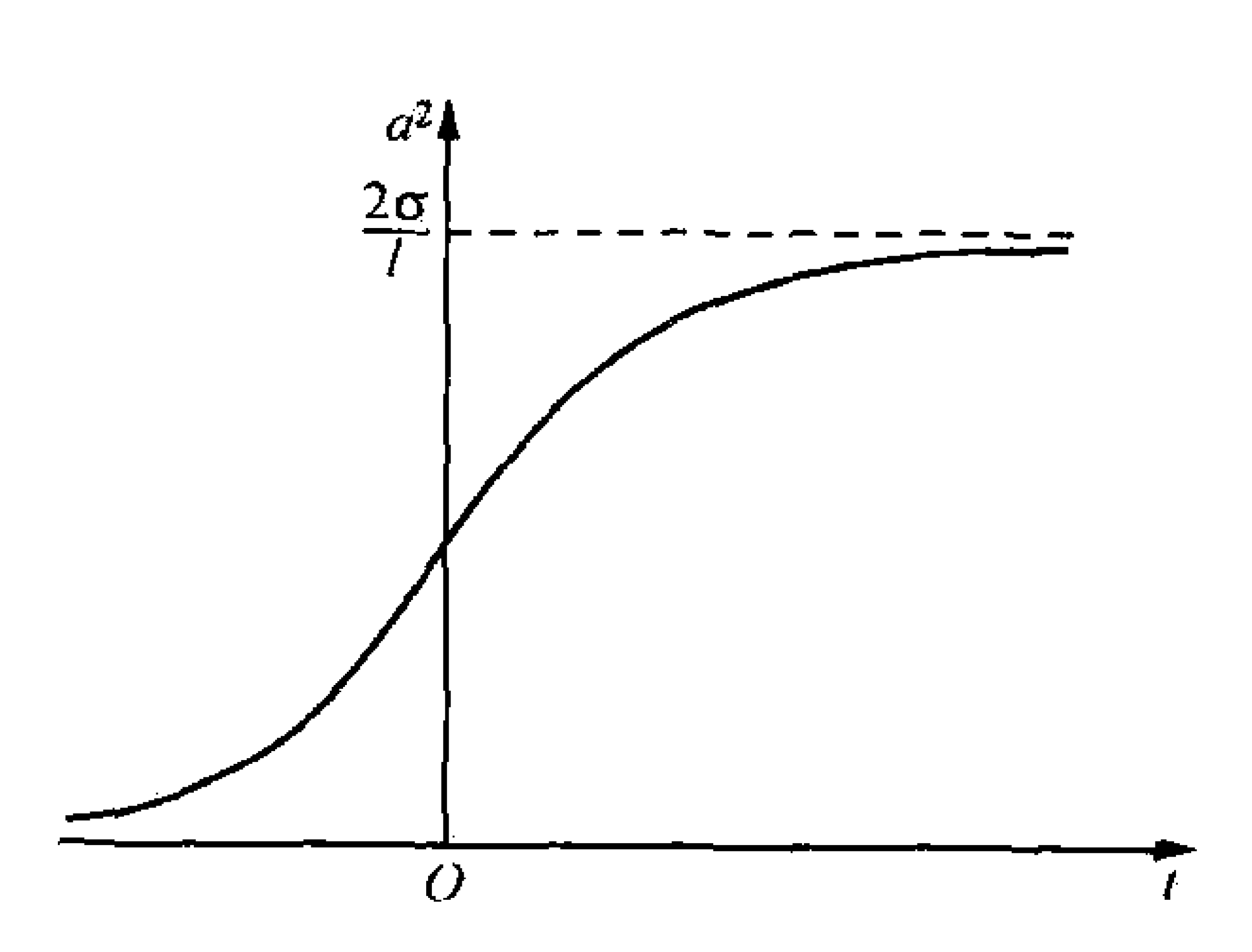


图 8.11 Landau 方程,a^2 随 t 的变化

Landau 方程(8.306)还可改写为

$$\frac{\mathrm{d}a^2}{\mathrm{d}t} = a^2(2\sigma - la^2), \tag{8.307}$$

a^2 随时间 t 的变化见图 8.11(参见本章末习题 15).

复习思考题

1. 将波列写为 $\psi = A(x,y,t)\mathrm{e}^{i\theta(x,y,t)}$ 的意义是什么?
2. 均匀介质中的波与非均匀介质中的波有何不同?
3. 什么是波能密度? 从物理上说明在均匀介质中它的守恒性.
4. 波能通量矢量与波的群速度有何关系?
5. 波作用量如何定义? 它与波能密度有何不同?
6. 引进平均 Lagrange 量有什么好处?
7. 用波的多尺度方法,波列应如何表示?
8. 正压 Rossby 波相速度与群速度在图像上有何联系?
9. 什么叫折射指数? 什么条件下 Rossby 波能够传播? 什么条件下 Rossby 波的传播受阻?
10. Rossby 波的动量和热量输送与其水平和空间结构(即槽脊线的水平和垂直分布)有什么联系?

11. 画图说明对导式 Rossby 波$\overline{u'v'}<0$；曳式 Rossby 波$\overline{u'v'}>0$，并说明正压 Rossby 波的演变及其在实际中的应用. 什么情况下$\overline{u'v'}=0$？

12. 画图说明：当槽线自下而上向东倾斜时，$\overline{u'w'}>0$；槽线自下而上向西倾斜时，$\overline{u'w'}<0$. 并说明斜压 Rossby 波的演变及其在实际中的应用.

13. E-P 通量的引入有什么作用？它与 Rossby 波对动量和热量的输送有何联系？

14. 说明波与基本气流相互作用的矛盾对立统一的关系.

15. 从物理上说明大气中的东西风带和平均经圈环流是如何形成和维持的？

16. 说明为什么 Rossby 波的相互作用使得波振幅不能像线性波那样无限增长？

习　题

1. 对缓变波列，求下列波动方程的 Lagrange 量和平均 Lagrange 量，并求出相应的频散关系：

(1) $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-c_0^2\nabla_h^2\psi=0$；　　(2) $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-c_0^2\nabla_h^2\psi-\lambda^2\nabla_h^2\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0$；

(3) $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\gamma^2\dfrac{\partial^4\psi}{\partial x^4}=0$；　　(4) $\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial\psi}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial^3\psi}{\partial x^3}=0$.

2. 利用 Boussinesq 近似下的方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}-fv=-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial x},\\[2mm]
\dfrac{\partial v}{\partial t}+fu=-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial y},\\[2mm]
\dfrac{\partial w}{\partial t}=-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial z}-g\dfrac{\rho'}{\rho_0},\\[2mm]
\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0,\\[2mm]
\dfrac{\partial}{\partial t}\left(-g\dfrac{\rho'}{\rho_0}\right)+N^2w=0
\end{cases}
$$

证明惯性-重力内波的波能密度为

$$\mathscr{E}=\frac{1}{2}\frac{K^2}{K_h^2}a^2.$$

若是重力内波，又如何？

提示：动能和有效势能分别是$\dfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)$，$\dfrac{g^2}{2N^2}\left(\dfrac{\rho'}{\rho_0}\right)^2$.

3. 利用上题和波的多尺度方法，证明惯性-重力内波的波能密度和波作用量

守恒原理.

4. 假定扰动风速满足水平无辐散的条件，而扰动流函数设为

$$\psi' = A\cos\frac{2\pi}{L_y}y\sin(kx+ly-\omega t);$$

又设初始时刻的平均西风为

$$\bar{u}\mid_{t=0} = B\left(1-\cos\frac{2\pi}{L_y}y\right),$$

其中 A,B,k,l,ω,L_y 均为常数. 试根据方程

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}$$

求 $\bar{u}(x,y,t)$ $\left(注：\overline{(\ )} = \frac{1}{L}\int_0^L(\ )\delta x, L = 2\pi/k\right)$.

5. 在准地转条件下，设

$$\psi' = a_\psi\cos(kx+ly-\omega t),\quad \theta' = a_\theta\cos(kx+ly-\omega t+\alpha),$$

证明

$$\overline{\theta' v'} = \frac{1}{2}ka_\psi a_\theta\sin\alpha,$$

并说明：当温度波落后于流场波时，$0<\alpha<\pi$，$\overline{\theta'v'}>0$；而当温度波超前流场波时，$-\pi<\alpha<0$，$\overline{\theta'v'}<0$ $\left(注：\overline{(\ )} = \frac{1}{L}\int_0^L(\ )\delta x, L = \frac{2\pi}{k}\right)$.

6. 在球坐标系中，设准地转流函数为

$$\psi' = A\cos(m\lambda+n\varphi-\omega t),$$

证明

$$\overline{u'v'} = -A^2mn/2a^2\cos\varphi\quad (a\ 为地球半径).$$

7. 设扰动速度(u',w')满足$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0$，因而 $u'=-\frac{\partial\psi'}{\partial z}$，$w'=\frac{\partial\psi'}{\partial x}$，同时设

$$\psi' = a_\psi\cos(kx+nz-\omega t),\quad \theta' = a_\theta\cos(kx+nz-\omega t+\alpha),$$

试求$\overline{u'w'}$和$\overline{\theta'w'}$，并分析结果且与图 8.3 和 8.4 相比较.

8. 在水平无辐散和无基本气流的条件下，若令

$$k = K_h\cos\alpha,\quad l = K_h\sin\alpha\quad (K_h^2 = k^2+l^2),$$

试证明：对 Rossby 波有

(1) $c_{gx}=\frac{\beta_0}{K_h^2}\cos2\alpha$，$c_{gy}=\frac{\beta_0}{K_h^2}\sin2\alpha$；

(2) $\left(k+\frac{\beta_0}{2\omega}\right)^2+l^2=\left(\frac{\beta_0}{2\omega}\right)^2$，并在波数平面上画图(注意 $\omega<0$)；

(3) $\boldsymbol{c}_g=\frac{2\beta_0k}{K_h^4}\overrightarrow{CW}$，其中 $C\left(-\frac{\beta_0}{2\omega},0\right)$为上图的圆心，$W$ 为圆上任一点.

9. 上题若考虑基本气流 $\bar{u}$，并设 $\bar{u}$=常数，证明

(1) $c_{gx}=\bar{u}+\dfrac{\beta_0}{K_h^2}\cos 2\alpha, c_{gy}=\dfrac{\beta_0}{K_h^2}\sin 2\alpha$；

(2) 对静止 Rossby 波有 $\bar{u}=\beta_0/K_h^2$，且 c_{gx}, c_{gy} 满足

$$c_{gx}=\bar{u}(1+\cos 2\alpha),\quad c_{gy}=\bar{u}\sin 2\alpha,$$

即

$$(c_{gx}-\bar{u})^2+c_{gy}^2=\bar{u}^2,$$

并在 (u,v) 平面上作图.

10. 对于水平无辐散和无基本气流的 Rossby 波，若入射到 $x=0$ 的刚性边界上，设入射波和反射波分别是

$$\psi_{\mathrm{I}}=\hat{\psi}_{\mathrm{I}}\exp\{\mathrm{i}(k_{\mathrm{I}}x+l_{\mathrm{I}}y-\omega_{\mathrm{I}}t)\},\quad \psi_{\mathrm{R}}=\hat{\psi}_{\mathrm{R}}\exp\{\mathrm{i}(k_{\mathrm{R}}x+l_{\mathrm{R}}y-\omega_{\mathrm{R}}t)\},$$

并取 $\psi=\psi_{\mathrm{I}}+\psi_{\mathrm{R}}$.

(1) 若取边条件为 $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=0$，证明

$$l_{\mathrm{I}}\hat{\psi}_{\mathrm{I}}\exp\{\mathrm{i}(l_{\mathrm{I}}y-\omega_{\mathrm{I}}t)\}+l_{\mathrm{R}}\hat{\psi}_{\mathrm{R}}\exp\{\mathrm{i}(l_{\mathrm{R}}y-\omega_{\mathrm{R}}t)\}=0;$$

(2) 若对所有 y 和 t，上式成立，必须

$$\omega_{\mathrm{R}}=\omega_{\mathrm{I}},\quad l_{\mathrm{R}}=l_{\mathrm{I}},\quad -\hat{\psi}_{\mathrm{R}}=\hat{\psi}_{\mathrm{I}};$$

(3) 取 $\omega_{\mathrm{R}}=\omega_{\mathrm{I}}=\omega, l_{\mathrm{R}}=l_{\mathrm{I}}=l$，证明

$$(k_{\mathrm{I}}k_{\mathrm{R}}-l^2)(k_{\mathrm{I}}-k_{\mathrm{R}})=0;$$

(4) 入射波 $(c_{gx})_I<0$，反射波 $(c_{gx})_R>0$，证明

$$k_{\mathrm{I}}^2<l^2<k_{\mathrm{R}}^2,\quad k_{\mathrm{I}}k_{\mathrm{R}}=l^2;$$

(5) 令 $k=\dfrac{1}{2}(k_{\mathrm{I}}+k_{\mathrm{R}}), \Delta k=\dfrac{1}{2}(k_{\mathrm{R}}-k_{\mathrm{I}})$，证明

$$\mathrm{Re}\psi=2\hat{\psi}_{\mathrm{I}}\sin(\Delta kx)\sin(kx+ly-\omega t).$$

11. 上题若边界改为 $y=0$，结果如何？

12. 直接利用正压模式的准地转位涡度守恒定律讨论正压 Rossby 波的演变.

13. 利用下列 Boussinesq 近似的方程组分析重力内波的垂直传播：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u'+\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial z}w'=-\dfrac{\partial\phi'}{\partial x}\quad(\phi'=p'/\rho_0),\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)v'=-\dfrac{\partial\phi'}{\partial y},\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)w'=-\dfrac{\partial\phi'}{\partial z}-g\dfrac{\rho'}{\rho_0},\\ \dfrac{\partial u'}{\partial x}+\dfrac{\partial v'}{\partial y}+\dfrac{\partial w'}{\partial z}=0,\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\left(-g\dfrac{\rho'}{\rho_0}\right)+N^2w'=0.\end{cases}$$

(1) 证明：它可以化为

$$\mathscr{L}w' = 0,$$

其中

$$\mathscr{L} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x} + N^2 \nabla_{\mathrm{h}}^2.$$

(2) 令

$$w' = W(z)\mathrm{e}^{ily}\mathrm{e}^{ik(x-ct)},$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}z^2} + n^2 W = 0, \quad n^2 \equiv \frac{N^2}{(\bar{u}-c)^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}/\partial z^2}{\bar{u}-c} - K_{\mathrm{h}}^2, \quad K_{\mathrm{h}}^2 = k^2 + l^2.$$

(3) 讨论重力内波垂直传播的条件. 定常情况下又如何？$\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}=0$ 时又如何？

14. 利用方程组(8.233)证明在静力平衡条件下有：

(1) 有效势能 $A=\dfrac{1}{2N^2}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2$ ($\phi \equiv p'/\rho_0$)，并与 p 坐标系中的有效势能表达式相比较；

(2) 绝热方程为$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial z}\right)+N^2 w=0$，并与 p 坐标系中的绝热方程作比较.

15. 设 $a|_{t=0}=a_0$，利用 Riccati 方程求解方程(8.308).

第九章　非线性波动

本章的主要内容有：

叙述非线性波动方程的特征线和 Riemann 不变量；

分别阐述非线性、耗散、频散等因子在非线性波动中的作用；

介绍几个著名的非线性演化方程的解析行波解，它们包括 Burgers 方程的冲击波解，KdV 方程的椭圆余弦波解和孤立波解，正弦-Gordon 方程的周期解、扭结波和反扭结波解，非线性 Schrödinger 方程的包络周期波解和包络孤立波解等；同时介绍求行波解的试探函数法、双曲函数展开法和 Jacobi 椭圆函数展开法；

讨论非线性波的一些参数和非线性方程的守恒律；

介绍近似求解非线性波动的奇异摄动法、约化摄动法和幂级数展开法；

介绍求解非线性演化方程孤立波解的一个特技——Bäcklund 变换和求解非线性演化方程初值问题的散射反演法.

§9.1　波动方程的特征线，Riemann 不变量

第七章，我们讨论了线性波动，在那里我们假定波是小振幅，这样可忽略非线性项的作用，因而非线性偏微分方程化成了线性偏微分方程. 实际的波动，振幅相对于波长并不很小，这时，我们必须考虑非线性项的作用，也就是考虑波振幅的作用，这样由非线性偏微分方程求得的波动就是非线性波动.

下面我们举例分析波动方程的一些特点，并由此阐述特征线和 Riemann 不变量.

［例 1］　一维线性平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c_0\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{9.1}$$

其中 c_0 为正的常数.

若作自变量变换，令

$$\xi=x-c_0t,\quad \eta=x+c_0t, \tag{9.2}$$

则有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial t}=-c_0\left(\dfrac{\partial u}{\partial \xi}-\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right),\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta},\end{cases} \tag{9.3}$$

这样，方程(9.1)化为

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=0. \tag{9.4}$$

因而，方程的通解为

$$u=f(\xi)=f(x-c_0t), \tag{9.5}$$

其中 f 是 ξ 的任意函数.

解(9.5)表示以常速度 c 沿 x 正方向传播的行波，$\xi\equiv x-c_0t$ 即是它的相位. 显然，如果

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=c_0, \tag{9.6}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-c_0=0. \tag{9.7}$$

所以，一个随波以速度 c_0 移动的观察者，永远看到波有相同的相位，因而 c 即是相速度.

若 f 是 ξ 的周期函数，则解(9.5)称为是周期性行波. 此时 u 达到最大值的点即是波脊(或波峰，ridge 或 crest)，最小值的点即是波槽(或波谷，trough). 因为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{9.8}$$

则比较(9.8)式和(9.1)式即知：沿方程(9.6)所表示的直线

$$\xi\equiv x-c_0t=\text{常数}, \tag{9.9}$$

有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0. \tag{9.10}$$

(9.9)式称为方程(9.1)的特征线. 上式表明：沿特征线 $x-c_0t=$ 常数，u 保持不变，u 就称为方程(9.1)的 Riemann 不变量. 由此可知，沿特征线方向

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a \tag{9.11}$$

的 Riemann 不变量 r 满足方程

$$\frac{\partial r}{\partial t}+a\frac{\partial r}{\partial x}=0. \tag{9.12}$$

［**例 2**］ 一维线性波动方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=c_0^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \tag{9.13}$$

其中 c_0 为正的常数.

若作(9.2)式的自变量变换，则方程(9.13)化为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{9.14}$$

所以,方程的通解为

$$\psi = f(\xi) + g(\eta) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t), \tag{9.15}$$

其中 f 和 g 分别是 ξ 和 η 的任意函数.(9.15)式表明:解 ψ 是以速度 c_0 沿 x 正方向传播的右行波 $f(\xi)$ 和以速度 c_0 沿 x 负方向传播的左行波 $g(\eta)$ 的叠加.

显然,方程(9.13)有两组特征线:

$$\begin{cases} \xi \equiv x - c_0 t = \text{常数}, \\ \eta \equiv x + c_0 t = \text{常数}. \end{cases} \tag{9.16}$$

它们分别满足

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c_0, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -c_0, \tag{9.17}$$

而且,沿特征线 $x - c_0 t$=常数,f=常数;沿特征线 $x + c_0 t$=常数,g=常数.

方程(9.13)可以改写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - c_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0, \tag{9.18}$$

也可改写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0. \tag{9.19}$$

由此可知,方程(9.13)有两个 Riemann 不变量:

$$r = \frac{\partial \psi}{\partial t} - c_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad s = \frac{\partial \psi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{9.20}$$

它们分别沿特征线方向 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c_0$ 和 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -c_0$ 保持不变.

事实上,若作函数变换,令

$$u \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad v \equiv c_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{9.21}$$

则方程(9.13)可改写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - c_0 \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} - c_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{9.22}$$

方程组(9.22)还可统一写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \boldsymbol{A} \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x} = 0, \tag{9.23}$$

其中

$$w \equiv \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{9.24}$$

和

$$A \equiv \begin{bmatrix} 0 & -c_0 \\ -c_0 & 0 \end{bmatrix}; \tag{9.25}$$

而矩阵 A 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -c_0 \\ -c_0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{9.26}$$

即

$$\lambda^2 = c_0^2. \tag{9.27}$$

它的根，即矩阵 A 的特征值 λ 为

$$\lambda = \pm c_0, \tag{9.28}$$

它与(9.17)式是等价的.

对矩阵 A，其特征向量 X 满足

$$AX = \lambda X. \tag{9.29}$$

由(9.25)式和(9.28)式，对特征方向 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=c_0$ 和 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-c_0$ 的特征向量可分别取为

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{9.30}$$

这样，若以 1 乘方程组(9.22)的第一式，以 -1 乘方程组(9.22)的第二式，然后相加得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)(u - v) = 0, \tag{9.31}$$

这就是(9.18)式，$u-v$ 就是 r. 类似，若以 1 乘方程组(9.22)的第一式，以 1 乘方程组(9.22)的第二式，然后相加得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)(u + v) = 0, \tag{9.32}$$

这就是(9.19)式，$u+v$ 就是 s.

上述两例对线性波的分析，我们可以推广到非线性波的问题中. 下面也举两例说明.

[例 3] 一维非线性声波.

我们仅考虑 x 方向，此种情况下，描写一维非线性声波的方程组(水平运动方程、连续性方程和绝热方程)可以写为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial x}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\rho'}{\mathrm{d}t} + \rho_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}t} = c_s^2 \dfrac{\mathrm{d}\rho'}{\mathrm{d}t}, \end{cases} \tag{9.33}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}. \tag{9.34}$$

由方程组(9.33)的第三式有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p' - c_s^2\rho') = 0, \tag{9.35}$$

因而,在运动过程中 $p' - c_s^2\rho'$ 为常数.我们假定它处处为常数,则代入方程组(9.33)的第一式消去 p',则方程组(9.33)化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{c_s^2}{\rho_0}\dfrac{\partial \rho'}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \rho'}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho'}{\partial x} + \rho_0\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{9.36}$$

这就是一维非线性声波满足的方程.仿[例 2],若令

$$\boldsymbol{w} \equiv \begin{bmatrix} u \\ \rho' \end{bmatrix} \tag{9.37}$$

和

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{bmatrix} u & c_s^2/\rho_0 \\ \rho_0 & u \end{bmatrix}, \tag{9.38}$$

则方程组(9.36)化为

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x} = 0; \tag{9.39}$$

而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} u-\lambda & c_s^2/\rho_0 \\ \rho_0 & u-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{9.40}$$

即

$$(\lambda - u)^2 - c_s^2 = 0. \tag{9.41}$$

因而,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 为

$$\lambda = u \pm c_s. \tag{9.42}$$

所以,方程组(9.36)的特征方向为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u \pm c_s, \tag{9.43}$$

而满足 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$ 的特征向量可分别取为

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{bmatrix} c_s \\ \rho_0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_2 = \begin{bmatrix} c_s \\ -\rho_0 \end{bmatrix}. \tag{9.44}$$

这样，以 $\boldsymbol{X}_1$ 的两个分量 ρ_0，c_s 分别乘方程组(9.36)的两式并相加，再以 $\boldsymbol{X}_2$ 的两个分量 $-\rho_0$，c_s 分别乘方程组(9.36)的两式并相加，则得

$$\begin{cases} c_s\left[\dfrac{\partial\rho'}{\partial t} + (u + c_s)\dfrac{\partial\rho'}{\partial x}\right] + \rho_0\left[\dfrac{\partial u}{\partial t} + (u + c_s)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] = 0, \\ c_s\left[\dfrac{\partial\rho'}{\partial t} + (u - c_s)\dfrac{\partial\rho'}{\partial x}\right] - \rho_0\left[\dfrac{\partial u}{\partial t} + (u - c_s)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] = 0. \end{cases} \tag{9.45}$$

若令

$$r = c_s\rho' + \rho_0 u, \quad s = c_s\rho' = \rho_0 u, \tag{9.46}$$

则方程组(9.45)可以改写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial t} + (u + c_s)\dfrac{\partial r}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} + (u - c_s)\dfrac{\partial s}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{9.47}$$

r，s 即是一维非线性声波方程(9.33)的 Riemann 不变量. 它们表示：沿着特征线方向 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u+c_s$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u-c_s$，$r$ 和 s 分别保持不变.

[例 4] 一维非线性重力外波.

与[例 3]相同，我们仅考虑 x 方向，而且采用描写重力外波的浅水模式原始方程组，即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + g\dfrac{\partial h}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + u\dfrac{\partial h}{\partial x} + h\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{9.48}$$

其中 h 为自由面的高度. 若令

$$\boldsymbol{w} \equiv \begin{bmatrix} u \\ h \end{bmatrix} \tag{9.49}$$

和

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{bmatrix} u & g \\ h & u \end{bmatrix}, \tag{9.50}$$

则方程组(9.48)可化为

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x} = 0; \tag{9.51}$$

而矩阵 A 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} u-\lambda & g \\ h & u-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{9.52}$$

即

$$\lambda = u \pm c, \tag{9.53}$$

其中

$$c = \sqrt{gh}. \tag{9.54}$$

所以,方程组(9.48)的特征方向为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u \pm c; \tag{9.55}$$

而且满足 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$ 的特征向量可取为

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{bmatrix} g \\ c \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_2 = \begin{bmatrix} g \\ -c \end{bmatrix}. \tag{9.56}$$

这样,以 $\boldsymbol{X}_1$ 的两个分量 c,g 分别乘方程组(9.48)的两式并相加,再以 $\boldsymbol{X}_2$ 的两个分量 $-c$,g 分别乘方程组(9.48)的两式并相加,则得

$$\begin{cases} g\left[\dfrac{\partial h}{\partial t} + (u+c)\dfrac{\partial h}{\partial x}\right] + c\left[\dfrac{\partial u}{\partial t} + (u+c)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] = 0, \\ g\left[\dfrac{\partial h}{\partial t} + (u-c)\dfrac{\partial h}{\partial x}\right] - c\left[\dfrac{\partial u}{\partial t} + (u-c)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] = 0. \end{cases} \tag{9.57}$$

若令

$$r = u + 2c, \quad s = u - 2c, \tag{9.58}$$

则方程组(9.57)可以改写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial t} + (u+c)\dfrac{\partial r}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} + (u-c)\dfrac{\partial s}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{9.59}$$

r,s 即是一维非线性重力外波方程(9.48)的 Riemann 不变量. 这意味着,沿着特征线方向 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u+c$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u-c$,$r$ 和 s 分别保持不变.

Riemann 不变量使我们可根据波的初始($t=0$)状态去确定移动波的未来状态. 就以[例 4]来说,设流体初始是静止的,深度为 H,即

$$t = 0, \quad u_0 = 0, \quad h_0 = H = \text{常数}, \tag{9.60}$$

则初始在(x,t)平面上有一条特征线

$$C_1^0: \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c_0 = \sqrt{gH}, \tag{9.61}$$

它表征向右移动的重力外波. 在 C_1^0 上的任意两点 A_0,B_0 均满足 $u=0$,$c=c_0$,即

$$u_{A_0} = u_{B_0} = 0, \quad c_{A_0} = c_{B_0} = c_0. \tag{9.62}$$

在(x,t)平面上，可以有任一条特征线

$$C_1: \frac{dx}{dt} = u + c, \tag{9.63}$$

通常 C_1 不一定与 C_1^0 平行，见图 9.1.

过点 A_0 和 B_0 分别作特征线 C_2，它们都满足

$$C_2: \frac{dx}{dt} = u - c, \tag{9.64}$$

它们分别与 C_1 交于点 A 和 B. 因在 C_1 上，$r=u+2c$ 保持不变，则有

$$u_A + 2c_A = u_B + 2c_B. \tag{9.65}$$

又在 C_2 上，$s=u-2c$ 保持不变，则有

$$u_A - 2c_A = u_{A_0} - 2c_{A_0} = -2c_0, \tag{9.66}$$

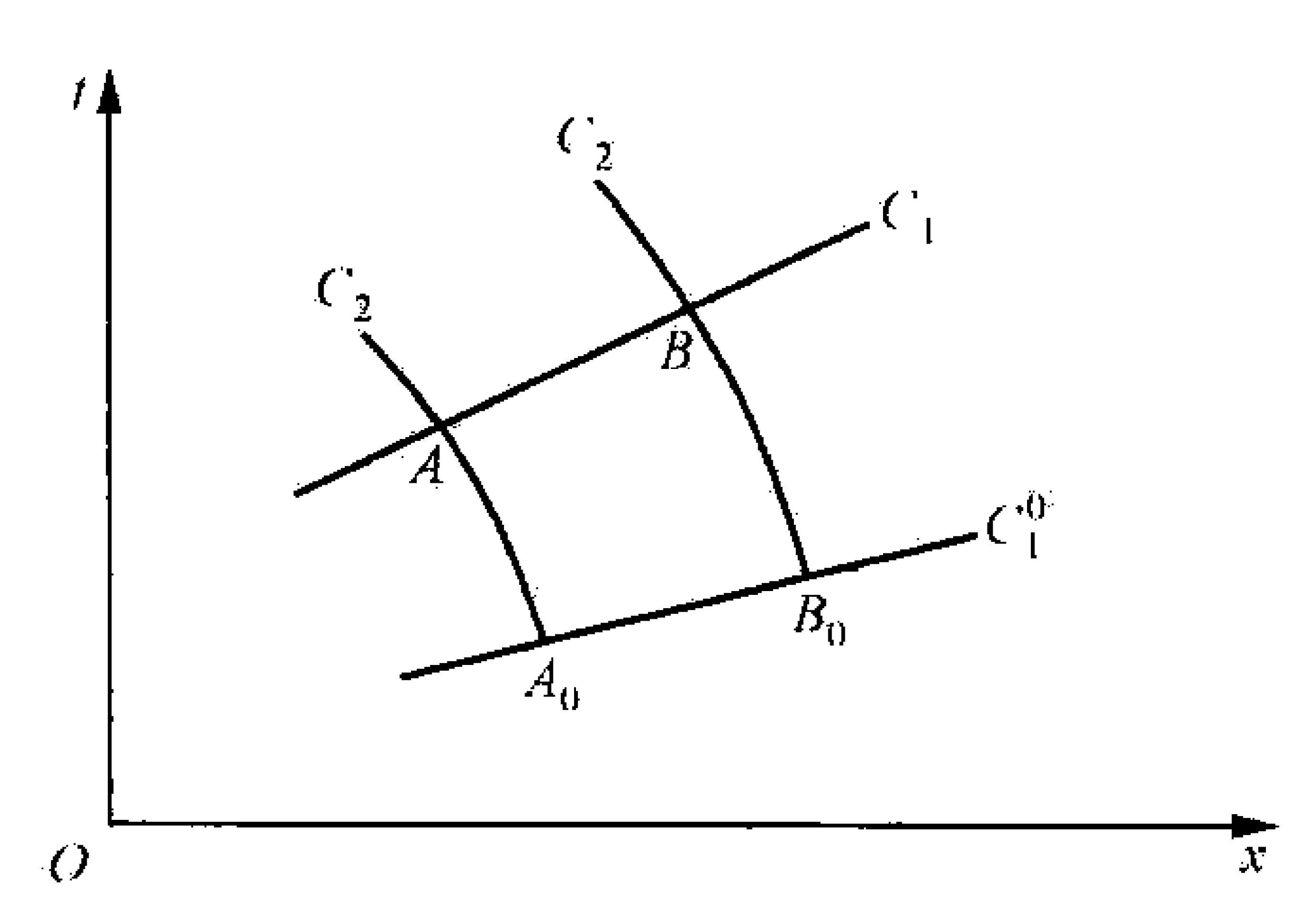


图 9.1 重力外波的特征线

$$u_B - 2c_B = u_{B_0} - 2c_{B_0} = -2c_0. \tag{9.67}$$

因此由(9.65)—(9.67)式很易得到

$$u_A = u_B, \quad c_A = c_B. \tag{9.68}$$

上式表示：在特征线 C_1 上，u 和 c 均保持不变，而且由(9.66)式和(9.67)式求得

$$u = u_A = u_B = 2(c - c_0), \tag{9.69}$$

这是向右移动的重力外波中流体的速度.

§ 9.2 浅水波的 KdV(Korteweg de Vries)方程和 Boussinesq 方程

在大气中讨论重力外波通常应用所谓浅水条件：流体的深度 h 远小于波长 L，即

$$h/L \ll 1. \tag{9.70}$$

这样，流体满足静力平衡，这相当于浅水重力波或长重力波的情况(见第七章习题 5).

在经典流体力学中，研究表面重力波一般不使用静力平衡假定，而应用下列均匀不可压缩流体($\rho=$常数)的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p'}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p'}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{9.71}$$

以及下列边界条件

$$w\big|_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial p'}{\partial t} - \rho g w\right)\Bigg|_{z=h} = 0. \tag{9.72}$$

方程组(9.71)通过消元,很易化为

$$\mathscr{L} w = 0, \tag{9.73}$$

其中

$$\mathscr{L} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right). \tag{9.74}$$

应用正交模方法,我们令

$$w = W(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \tag{9.75}$$

将其代入方程(9.73)得

$$\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}z^2} - k^2 W = 0. \tag{9.76}$$

因而

$$W(z) = A\mathrm{e}^{kz} + B\mathrm{e}^{-kz}, \tag{9.77}$$

其中 A,B 为二任意常数.

将上式代入(9.75)式求得

$$w = (A\mathrm{e}^{kz} + B\mathrm{e}^{-kz})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}. \tag{9.78}$$

再将(9.78)式代入方程组(9.71)的第二式求得

$$p' = \frac{\mathrm{i}\omega\rho}{k}(A\mathrm{e}^{kz} - B\mathrm{e}^{-kz})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \tag{9.79}$$

这里我们已取积分常数为零.

利用(9.72)式中的下边界条件,由(9.78)式定得

$$B = -A; \tag{9.80}$$

再利用(9.72)式中的自由面边条件,由(9.78)—(9.80)式得到

$$\left\{\left(\frac{\omega^2}{k} - g\right)\mathrm{e}^{kh} - \left(\frac{\omega^2}{k} + g\right)\mathrm{e}^{-kh}\right\}A = 0.$$

要求方程(9.73)有非零解,$A \neq 0$,则由上式求得圆频率 ω 满足

$$\omega^2 = gk\tanh(kh). \tag{9.81}$$

相应,x 方向波的移速满足

$$c^2 \equiv \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k}\tanh(kh). \tag{9.82}$$

对于深水重力波，流体的深度 h 远大于波长 L，即

$$h/L \gg 1, \tag{9.83}$$

因而

$$kh \gg 1, \quad \tanh(kh) \to 1, \tag{9.84}$$

则(9.81)式和(9.82)式分别化为

$$\omega^2 = gk, \quad c^2 = g/k. \tag{9.85}$$

我们仍重点分析浅水重力波. 由条件(9.70)有

$$kh \ll 1, \quad \tanh(kh) \to kh, \tag{9.86}$$

则(9.81)式和(9.82)式分别化为

$$\omega^2 = ghk^2, \quad c^2 = gh. \tag{9.87}$$

因 $h=H+h'\approx H$，则上式近似为

$$\omega^2 = k^2 c_0^2, \quad c^2 = c_0^2 = gH. \tag{9.88}$$

由频率方程 $\omega^2=k^2c_0^2$，不难判断，线性浅水波满足方程

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \tag{9.89}$$

实际上，浅水波用 kh 去逼近 $\tanh(kh)$是太粗糙了，如提高准确度，对浅水波我们取

$$\tanh(kh) = kh - \frac{1}{3}(kh)^3. \tag{9.90}$$

这样，(9.81)式化为

$$\omega^2 = gk\left[kh - \frac{1}{3}(kh)^3\right] = ghk^2 - \frac{1}{3}gh^3k^4. \tag{9.91}$$

取 $h=H$，上式近似化为

$$\omega^2 = k^2 c_0^2 - \frac{1}{3}k^4 c_0^2 H^2. \tag{9.92}$$

类似，由上式也不难判断，相应于(9.92)式的线性浅水波方程，通常称为线性 Boussinesq 方程，即为

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{3}c_0^2 H^2 \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} = 0, \tag{9.93}$$

而且，(9.93)式也可视为是下列方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + g\dfrac{\partial h}{\partial x} + \dfrac{1}{3}c_0^2 H \dfrac{\partial^3 h}{\partial x^3} = 0, \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + H\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{9.94}$$

消去 u 的结果. 它好像是在水平运动方程中，除压力梯度力 $-g\dfrac{\partial h}{\partial x}$ 外，又外加了一

个力$-\frac{1}{3}c_0^2 H\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}$.

而方程组(9.94)又可视为下列方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{3}c_0^2 H\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}=0,\\ \frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial u}{\partial x}=0\end{cases}\tag{9.95}$$

线性化的结果.方程组(9.95)的第一式左端最后一项再以(9.89)式代入,则得

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{3}H\frac{\partial^3 h}{\partial t^2\partial x}=0,\\ \frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial u}{\partial x}=0.\end{cases}\tag{9.96}$$

方程组(9.96)称为浅水波的 Boussinesq 方程组.线性的 Boussinesq 方程(9.93)还可改写为

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-\frac{1}{3}H^2\frac{\partial^4 h}{\partial t^2\partial x^2}=0.\tag{9.97}$$

这个方程是将方程(9.89)代入线性 Boussinesq 方程(9.93)后而得到的.考虑(9.93)式和(9.95)式,非线性的 Boussinesq 方程通常可以写为

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial^4 h}{\partial x^4}-\beta\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}=0,\tag{9.98}$$

其中,α,β为常数.

浅水波的 Boussinesq 方程(9.96)和(9.97)是基于(9.92)式的分析而建立的,它表征向两个方向传播的非线性浅水波.对于向一个方向(如x正方向)传播的表面重力波,ω应取(9.81)式的算术根,即

$$\omega=\sqrt{gk\tanh(kh)}.\tag{9.99}$$

在浅水条件下,它近似有

$$\begin{aligned}\omega&=\sqrt{gk\left[kh-\frac{1}{3}(kh)^3\right]}\approx\sqrt{k^2c_0^2\left(1-\frac{1}{3}k^2H^2\right)}\\&=kc_0\left(1-\frac{1}{6}k^2H^2\right)=kc_0-\frac{1}{6}k^3c_0H^2.\end{aligned}\tag{9.100}$$

此时,对应频率关系(9.100)的线性方程为

$$\frac{\partial h}{\partial t}+c_0\frac{\partial h}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}=0\quad\left(\beta=\frac{1}{6}c_0H^2\right).\tag{9.101}$$

但由在§9.1中的分析,对非线性浅水波方程(9.48),向右移动的重力外波满足(9.69)式.则将(9.69)式代入方程组(9.48)的第二式得到

$$\frac{\partial h}{\partial t}+2(c-c_0)\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial}{\partial x}[2(c-c_0)]=0.\tag{9.102}$$

注意 $c=\sqrt{gh}$，则上式化为

$$\frac{\partial h}{\partial t}+(3c-2c_0)\frac{\partial h}{\partial x}=0. \tag{9.103}$$

仿(9.101)式，考虑(9.100)式，则上式可改写为

$$\frac{\partial h}{\partial t}+(3c-2c_0)\frac{\partial h}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}=0. \tag{9.104}$$

注意

$$h=H+h' \quad (h'\ll H) \tag{9.105}$$

和

$$\begin{aligned}3c-2c_0&=3\sqrt{gh}-2c_0=3\sqrt{gH\left(1+\frac{h'}{H}\right)}-2c_0\\&\approx 3c_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{h'}{H}\right)-2c_0=c_0\left(1+\frac{3h'}{2H}\right),\end{aligned} \tag{9.106}$$

则方程(9.104)可以改写为

$$\frac{\partial h'}{\partial t}+c_0\left(1+\frac{3h'}{2H}\right)\frac{\partial h'}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 h'}{\partial x^3}=0, \tag{9.107}$$

它称为浅水波的 KdV 方程，表征向右传播的非线性浅水波. 线性的 KdV 方程通常写为

$$\frac{\partial h'}{\partial t}+c_0\frac{\partial h'}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 h'}{\partial x^3}=0. \tag{9.108}$$

类似，若以最简单的向右传播的浅水波频率 $\omega=kc_0$ 所对应的方程

$$\frac{\partial h'}{\partial t}+c_0\frac{\partial h'}{\partial x}=0$$

代入到方程(9.107)的左端最后一项，则得

$$\frac{\partial h'}{\partial t}+c_0\left(1+\frac{3h'}{2H}\right)\frac{\partial h'}{\partial x}-\frac{1}{6}H^2\frac{\partial^3 h'}{\partial x^2\partial t}=0, \tag{9.109}$$

它称为正规化的长波(regular long wave)方程，其线性方程是

$$\frac{\partial h'}{\partial t}+c_0\frac{\partial h'}{\partial x}-\frac{1}{6}H^2\frac{\partial^3 h'}{\partial x^2\partial t}=0. \tag{9.110}$$

§9.3 非线性的作用：波的变形

本节对比线性平流方程和非线性平流方程，在一定的初条件下分析波的传播特征，从而说明非线性的作用在于引起波的变形.

一、线性平流方程的 Cauchy 问题

我们先分析一维线性平流方程(9.1)在下列初条件

$$u\big|_{t=0}=u_0(x) \tag{9.111}$$

的 Cauchy 问题(初值问题):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+c_0\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\\ u\big|_{t=0}=u_0(x).\end{cases} \tag{9.112}$$

在 § 9.1 中我们已经分析,线性平流方程的特征线满足 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=c_0$,在 (x,t) 平面内,它是平行的直线,见图 9.2. 而且,沿特征线,u 保持不变.

图 9.2 线性平流方程的特征线

因为线性平流方程的通解是沿 x 方向以速度 c_0 传播的行波 $u=f(x-c_0t)$,所以,其 Cauchy 问题(9.112)的解为

$$u(x,t)=u_0(x-c_0t). \tag{9.113}$$

若我们假定在初始时刻,$u_0(x)$ 在有限区域 $|x|\leqslant a$ 内为一抛物线脉冲(pulse),即

$$u_0(x)=\begin{cases}a^2-x^2, & |x|\leqslant a,\\ 0, & |x|>a,\end{cases} \tag{9.114}$$

则代入(9.113)式求得

$$u(x,t)=\begin{cases}a^2-(x-c_0t)^2, & |x-c_0t|\leqslant a,\\ 0, & |x-c_0t|>a.\end{cases} \tag{9.115}$$

上式表示:线性平流方程的解是一个以速度 c_0 向 x 正方向移动的波,并且在波移动中,扰动形状与初始扰动一样,即保持波不变形,见图 9.3. 其中取 $a=1$.

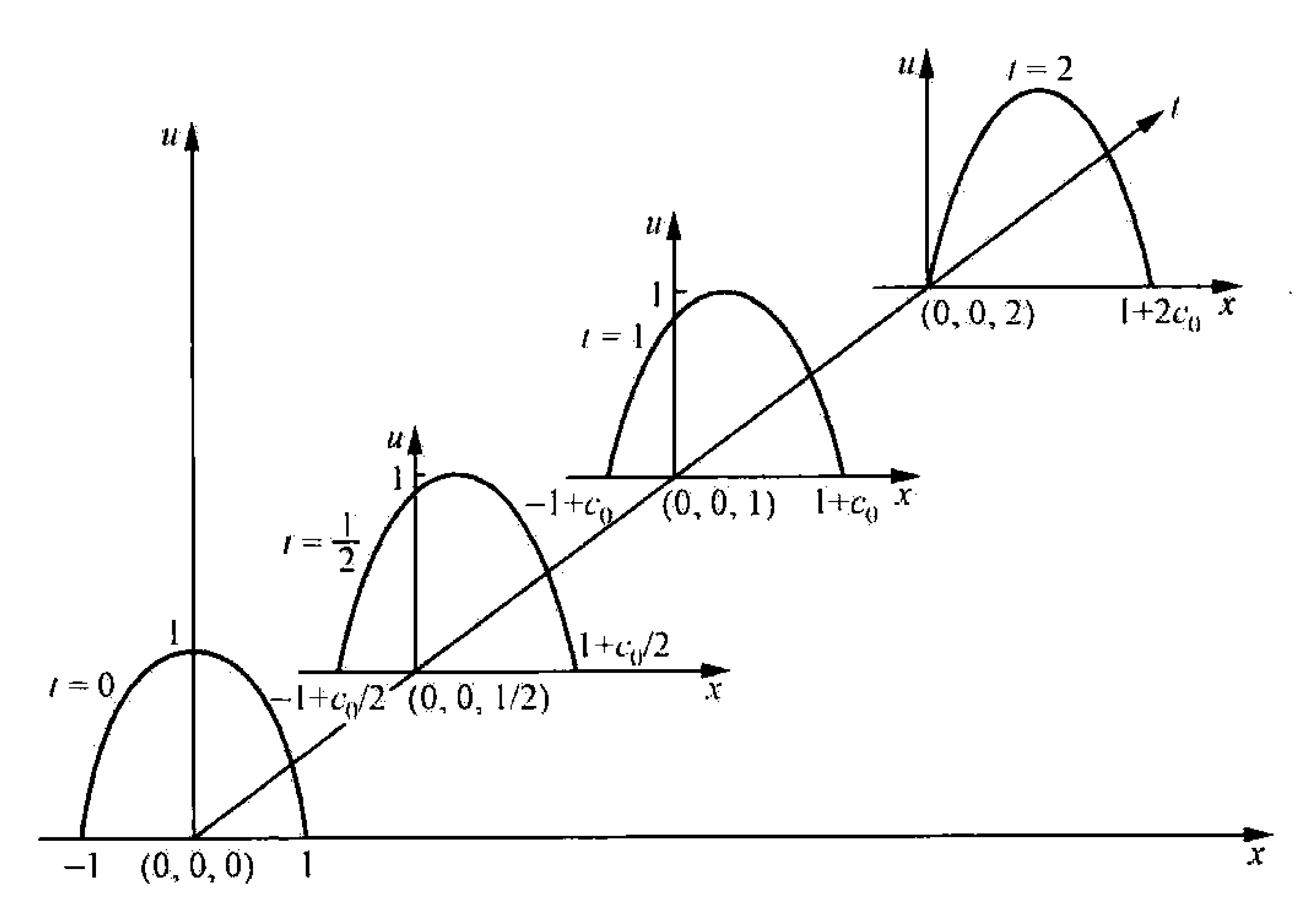


图 9.3 线性平流方程波的传播

二、非线性平流方程的 Cauchy 问题

非线性平流方程可以表示为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{9.116}$$

显然,其特征线满足

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u(x,t), \tag{9.117}$$

与线性平流方程相同,在特征线上 u 保持不变. 但因为这里 u 是变量,因而由上式求出的特征线不再像线性平流方程的特征线是平行的,而是相交的,见图 9.4.

与线性平流方程一样,非线性平流方程(9.116)u 的解沿特征线是不变的. 而且,因为特征线相对于 t 轴的斜率就是 u,因而,特征线对于 t 轴的斜率越大,u 的值越大.

显然,非线性平流方程(9.116)的通解为

$$u(x,t)=f(x-ut). \tag{9.118}$$

上式表示：解是以速度 u 向 x 正方向传播的非线性波. 不过,这里 u 是变量,因而波有不同的移动速度,较大的 u 值比较小的 u 值有较快的传播速度,所以,它也不能像线性波那样保持波的形状不变,此时波形变陡或会聚(convergence),见图 9.5.

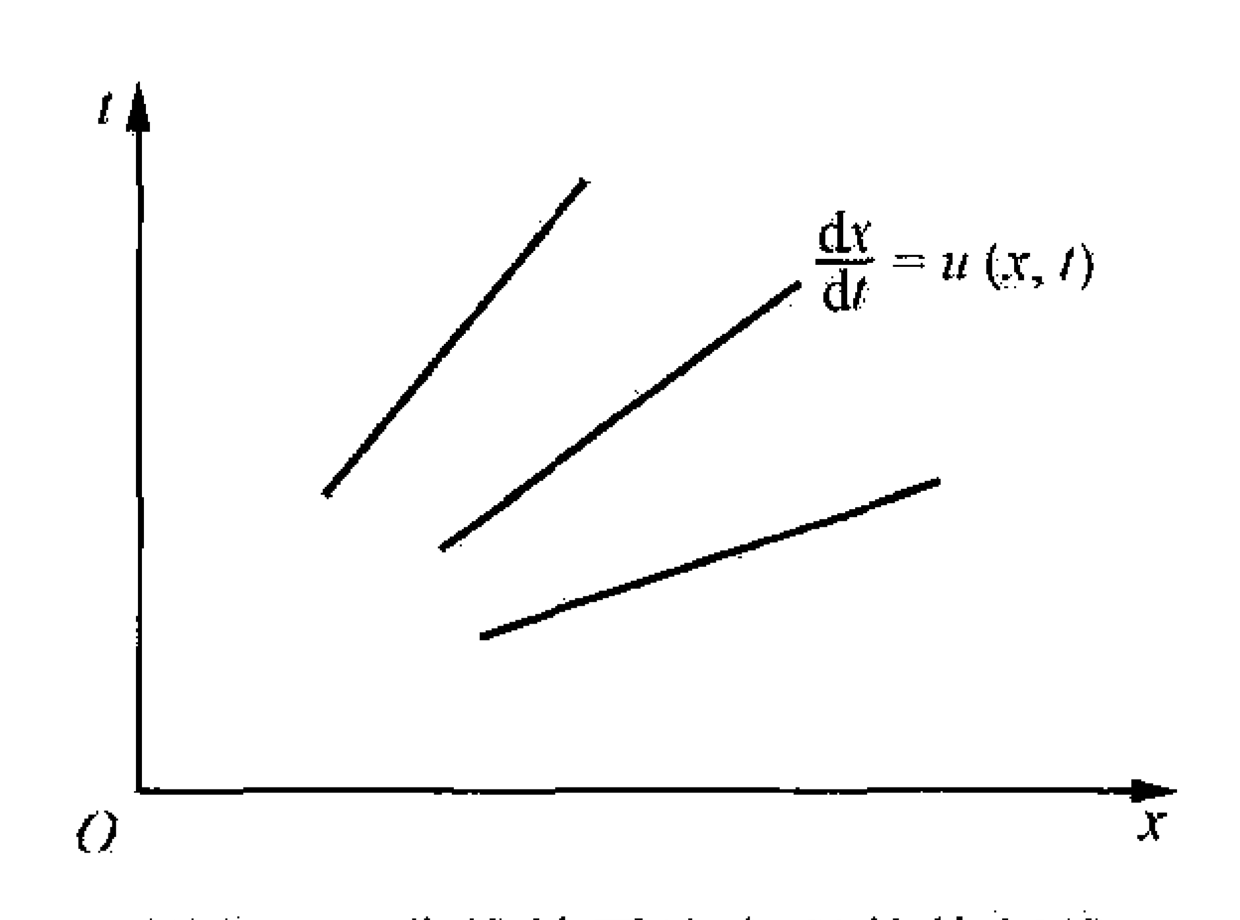


图 9.4　非线性平流方程的特征线

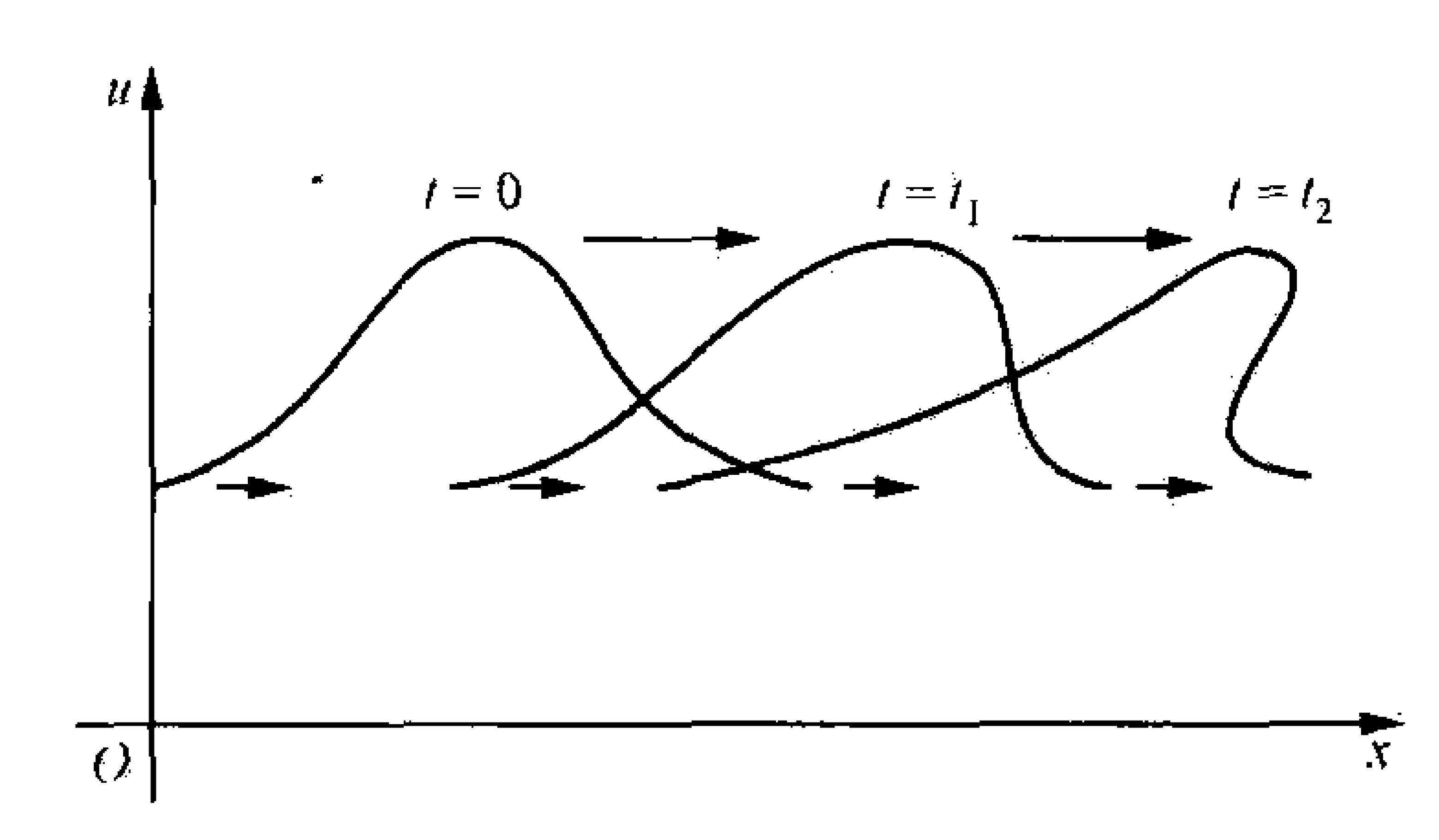


图 9.5　非线性平流方程中波的会聚

考虑非线性平流方程(9.116)的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\\ u\,|_{t=0}=u_0(x).\end{cases} \tag{9.119}$$

根据通解(9.118)式可知,Cauchy 问题(9.119)的解为

$$u(x,t)=u_0(x-ut). \tag{9.120}$$

若取(9.114)式的初条件,则上式化为

$$u(x,t)=\begin{cases}a^2-(x-ut)^2, & |x-ut|\leqslant a,\\ 0, & |x-ut|>a.\end{cases} \tag{9.121}$$

这是隐式解,将它写为显式即是

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2t^2}[(2xt-1)\pm\sqrt{1-4xt+4a^2t^2}], & |x-ut|\leqslant a,\\ 0, & |x-ut|>a.\end{cases}$$

(9.122)

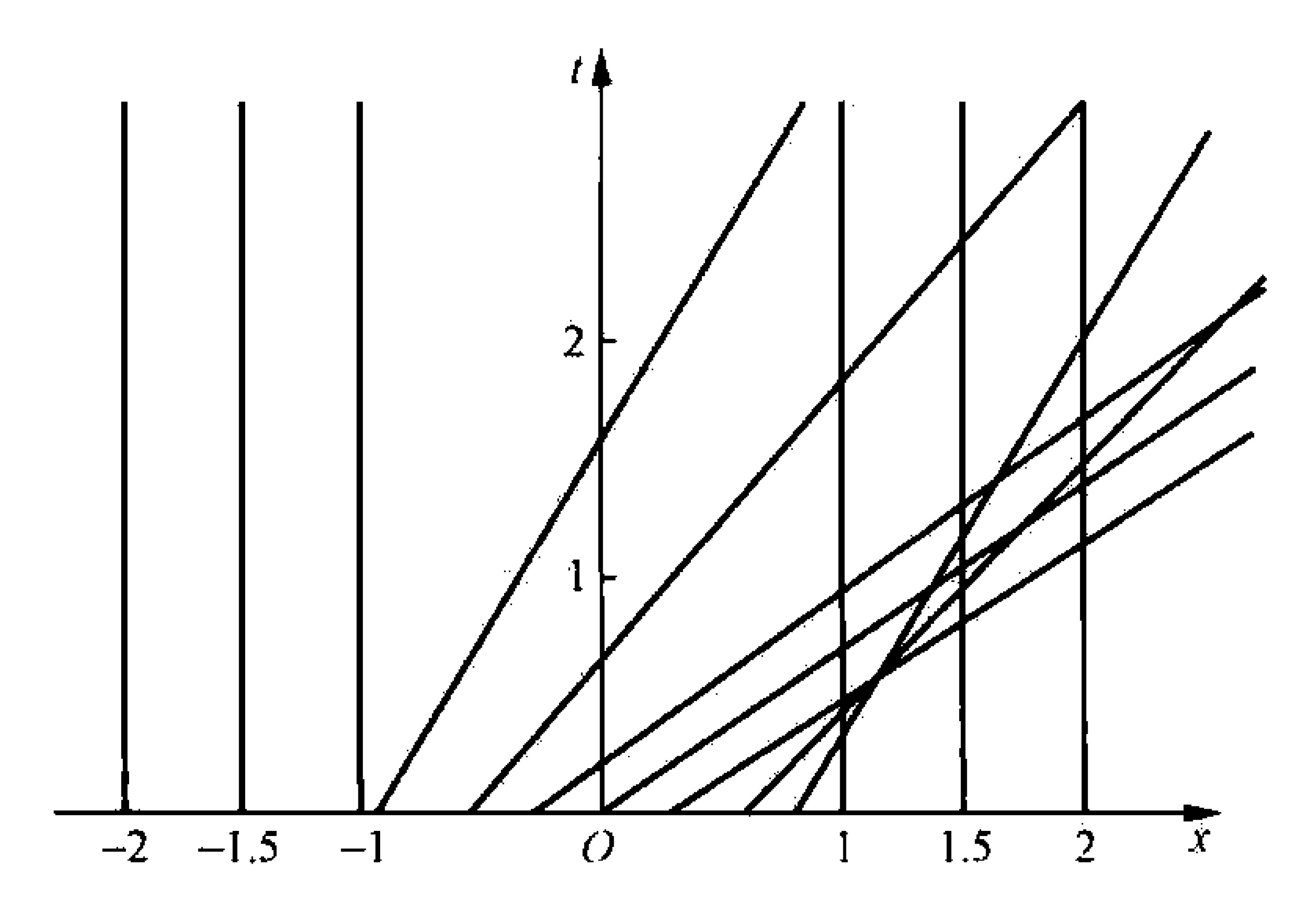


图 9.6 (9.37)式确定的特征线

图 9.6 就是根据上式，由(9.117)式所确定的特征线，其中同样取 $a=1$. 从图 9.6 看到，在(x,t)平面上，对 $x\leqslant-1$ 和 $x\geqslant1$，特征线都是平行于 t 轴的直线，而在 $-1<x<1$，从点$(x,0)$出发的特征线和 $x\geqslant1$ 的特征线相交. 这就表示，在交点上，对应的 u 值不止一个，从而使 u 成为多值函数. 所以，在这样的情况下，不论初值 $u_0(x)$如何光滑，Cauchy 问题(9.119)的连续光滑解，只能在局部范围中存在. 而在某些点上，特别是当 t 充分大时，解是不连续的，这种解称为弱解(weak solution)，它允许解存在不连续的跳跃，在流体力学中，它称为激波或冲击波(shock waves). 相反，Cauchy 问题(9.119)的连续光滑解称为强解(strong solution).

图 9.7 给出了非线性平流方程对初始抛物线脉冲的传播图像. 从图 9.7 看到，随着时间 t 的增加，初始扰动越来越变形(变陡)，当 t 足够大时，形成激波. 这说明非线性的作用是使得波变形，而且对于非线性方程，即便有光滑的初条件，它也不能在全部时间内存在光滑解，这就是非线性的作用. 这里，我们仅考虑了非线性因子，未考虑黏性(或扩散)、频散等因子的作用. 下面分别说明.

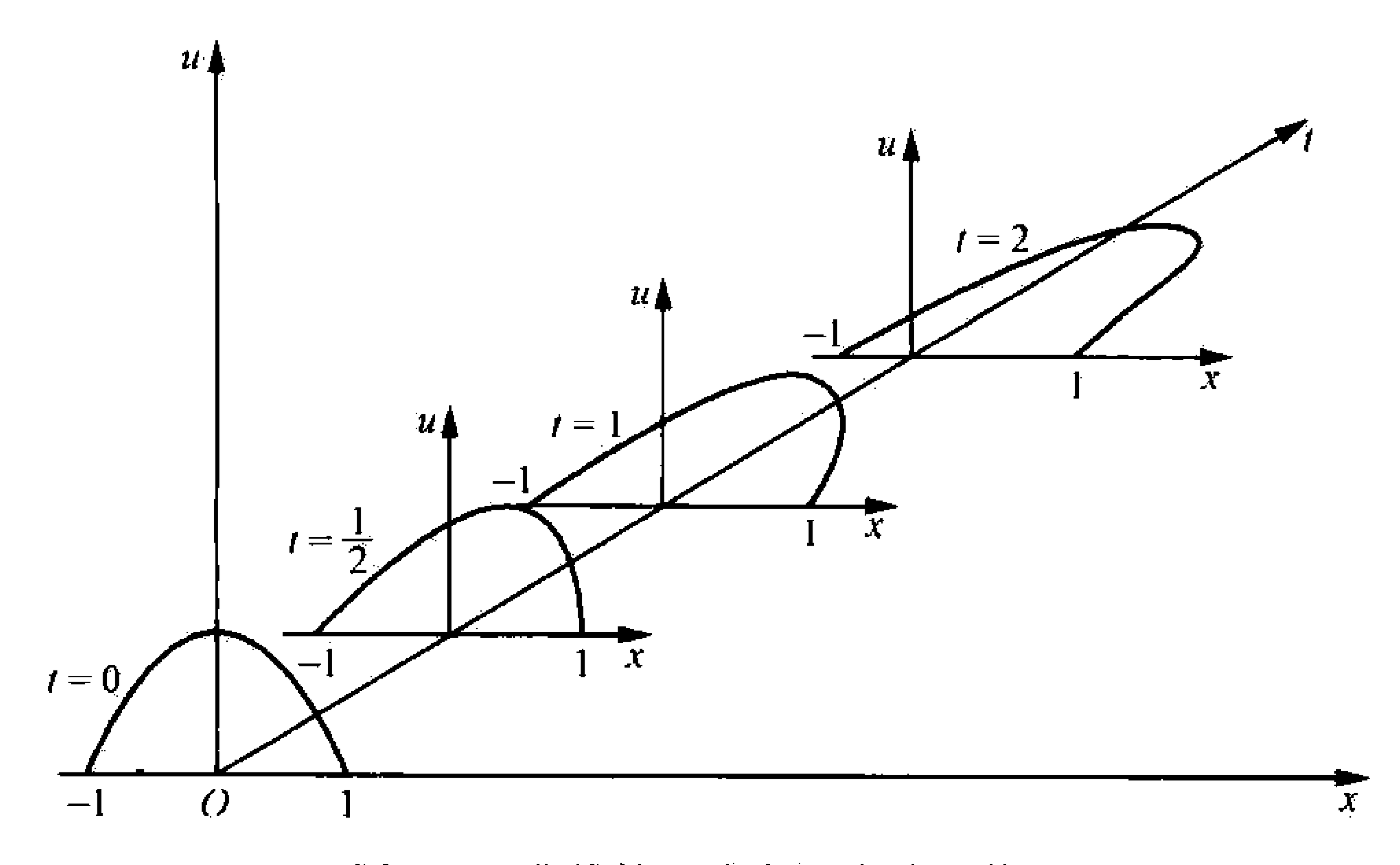


图 9.7 非线性平流方程中波的传播

§9.4 耗散的作用,Burgers 方程的求解,冲击波(shock waves)

前一节我们说明了非线性的作用,它使波廓线变陡.这一节,我们在非线性平流方程中加进耗散因子,考察非线性与耗散的共同作用.为此,我们引进包含此二因子的所谓 Burgers 方程.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad (\nu>0), \tag{9.123}$$

其中含 u 对 x 的二阶导数项 $\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 反映了黏性或扩散的作用,也就是耗散的作用.

Burgers 方程(9.123)相应的线性方程是

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c_0\frac{\partial u}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \tag{9.124}$$

对线性 Burgers 方程(9.124),我们应用正交模方法设

$$u=Ae^{i(kx-\omega t)}, \tag{9.125}$$

将其代入方程(9.142),导得

$$\omega=kc_0-i\nu k^2, \tag{9.126}$$

这是线性 Burgers 方程的频散关系.因而

$$\text{Re}\,\omega=kc_0,\quad \text{Im}\,\omega=-\nu k^2<0. \tag{9.127}$$

这样,波廓线(9.125)式可以写为

$$u=Ae^{-k^2\nu t}e^{ik(x-c_0t)}. \tag{9.128}$$

所以,耗散的作用使得线性波的振幅随时间呈指数衰减.使振幅变为原有振幅 e^{-1} 的衰减时间为

$$t_0=1/\nu k^2. \tag{9.129}$$

耗散系数 ν 越大波长越短(k 越大),波衰减得越快.这种波动称为耗散波(dissipative waves).

为了阐述耗散因子和非线性因子的共同作用,我们求 Burgers 方程(9.123)的行波解.为此,我们设

$$u(x,t)=u(\xi),\quad \xi=x-ct, \tag{9.130}$$

其中 c 为常数.上式表明我们求的是在 x 方向以常速度 c 移动的行波.

将(9.130)式代入方程(9.123),得

$$-c\frac{du}{d\xi}+u\frac{du}{d\xi}-\nu\frac{d^2u}{d\xi^2}=0. \tag{9.131}$$

再将上式对 ξ 积分一次有

$$-cu+\frac{1}{2}u^2-\nu\frac{du}{d\xi}=A, \tag{9.132}$$

其中 A 是积分常数.

将方程(9.132)改写为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\frac{1}{2\nu}(u^2-2cu-2A), \tag{9.133}$$

并设 $\xi\to+\infty$ 和 $\xi\to-\infty$ 时,解 u 的渐近状态分别是 u_2 和 u_1,相应,$\mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi\to0$,即假定

$$\begin{cases}\xi\to+\infty, & u\to u_2, & \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\to0,\\ \xi\to-\infty, & u\to u_1, & \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\to0,\end{cases} \tag{9.134}$$

则由方程(9.133)可知,$u_{1,2}$ 满足方程

$$u_{1,2}^2-2cu_{1,2}-2A=0. \tag{9.135}$$

即 u_1 和 u_2 是方程(9.135)的两个根,因而

$$\begin{cases}u_1=c+\sqrt{c^2+2A},\\ u_2=c-\sqrt{c^2+2A}.\end{cases} \tag{9.136}$$

为了保证 u_1,u_2 是实的,而且不相等,我们假设

$$c^2+2A>0,$$

因而

$$u_1>u_2. \tag{9.137}$$

这样,方程(9.133)可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\frac{1}{2\nu}(u-u_2)(u-u_1) \tag{9.138}$$

或

$$\frac{1}{(u-u_1)(u-u_2)}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\nu}\mathrm{d}\xi.$$

将上式对 ξ 积分一次,取积分常数为零,并注意

$$\int\frac{1}{(x-a)(x-b)}\mathrm{d}x=-\frac{2}{a-b}\operatorname{arctanh}\frac{2x-(a+b)}{a-b}\quad(a>b),$$

则得

$$\operatorname{arctanh}\frac{2u-(u_1+u_2)}{u_1-u_2}=-\frac{1}{4\nu}(u_1-u_2)\xi.$$

因而,

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left\{(u_1+u_2)-(u_1-u_2)\tanh\frac{u_1-u_2}{4\nu}(x-ct)\right\}. \tag{9.139}$$

且由(9.135)式或(9.136)式可知

$$c=(u_1+u_2)/2. \tag{9.140}$$

由(9.139)式表征的Burgers方程(9.123)解的图像见图9.8.因此,Burgers方程通过连续变化的曲线将两个均匀的渐近状态u_1和u_2光滑地连接起来,而且ν越大,这种连接越平缓.这是一种连续的激波结构,而(9.140)式就是Burgers方程出现激波的Rankine-Hugoniot条件.当然,当$\nu\to 0$时,Burgers方程蜕化为非线性平流方程,而解(9.139)成为阶梯函数,它在$\xi=0$不连续.

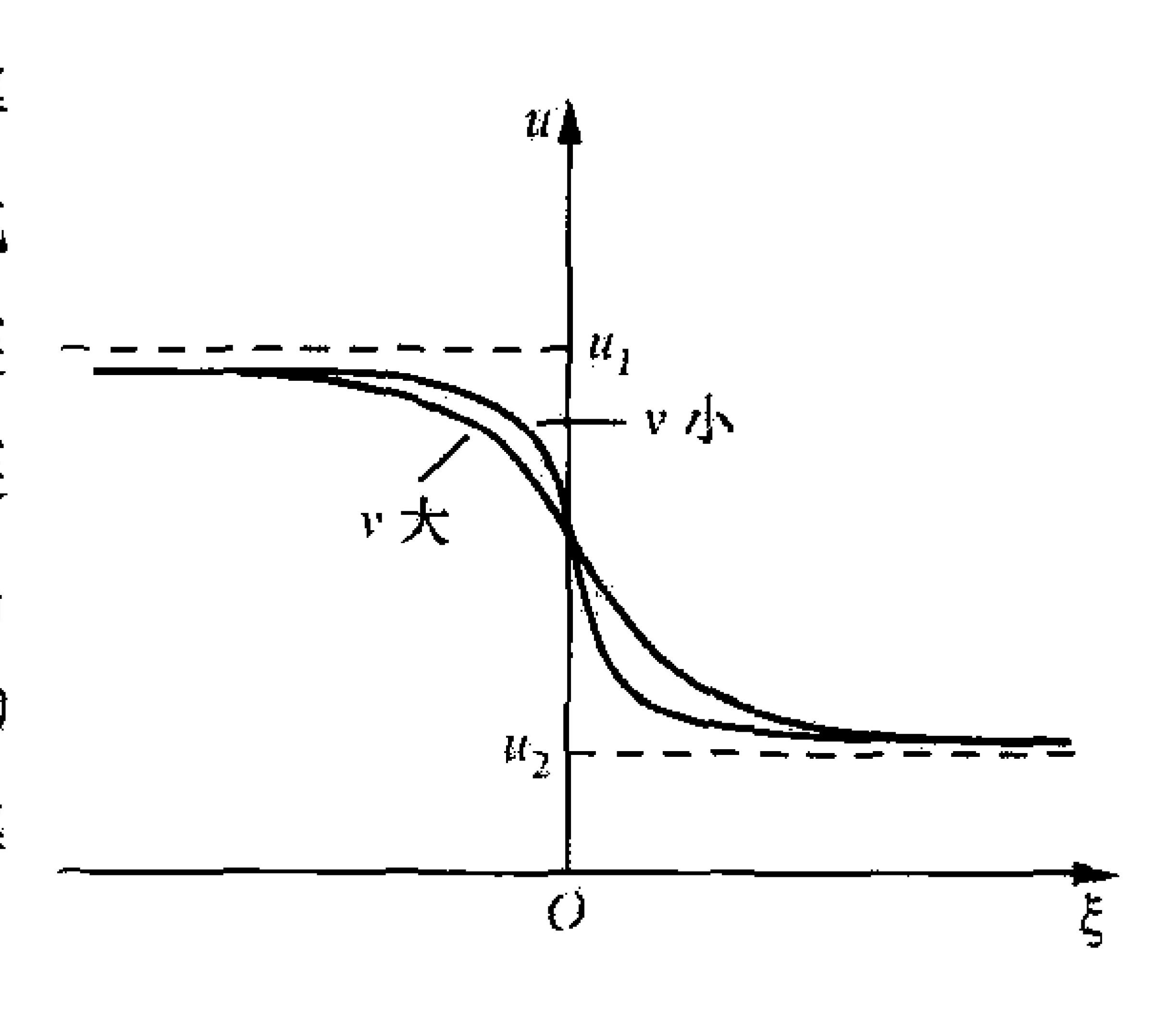


图9.8 Burgers方程的解

应该指出,上述解将u_1和u_2连接起来,主要是Burgers方程中非线性项的作用所致.为了说明它,我们去掉Burgers方程中的非线性项而得

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \tag{9.141}$$

以(9.130)形式的解代入方程(9.141),很易求得

$$u(x,t)=A+Be^{-c\xi/\nu}. \tag{9.142}$$

若取$c>0$,则

$$\begin{cases}\xi\to+\infty, & u\to A,\\ \xi\to-\infty, & u\to\infty.\end{cases} \tag{9.143}$$

这就说明方程(9.141)的解不能通过连续变化的曲线连接两个均匀的状态.所以,Burgers方程(9.123)中非线性项的作用在于光滑地连接两个均匀的状态.

当然,上述非线性的作用只有通过耗散因子才能实现.即是说,与非线性项使波变陡的作用相反,耗散项阻止波变陡并对波起扩展的作用.因而,在非线性平流方程中加进耗散项后,使得非线性的尖锐不连续状态耗散或扩散为平滑的状态.这意味着:非线性因子和耗散因子两者平衡才形成如图9.8所示的Burgers方程的所谓冲击波解.

在(9.139)式中,若令

$$u^*\equiv u-c=u-(u_1+u_2)/2, \tag{9.144}$$

则u^*在$\xi\to\pm\infty$时的值分别是

$$\begin{cases}\xi\to+\infty, & u^*\to u_2^*=-(u_1-u_2)/2,\\ \xi\to-\infty, & u^*\to u_1^*=(u_1-u_2)/2.\end{cases} \tag{9.145}$$

这样,(9.139)式可改写为

$$u^*(x,t)=u_2^*\tanh\left(-\frac{u_2^*}{2\nu}(x-ct)\right). \tag{9.146}$$

因此,在新的函数系统中,u^*是振幅.由上式,我们定义Burgers方程冲击波的宽度为

$$d = 2\nu / \mid u_2^* \mid = 4\nu(u_1 - u_2). \tag{9.147}$$

因而，宽度与 ν 成正比，与振幅成反比. 即振幅越大和耗散越小时，宽度也越小.

§ 9.5　频散的作用，KdV 方程的求解，椭圆余弦波(cnoidal waves)与孤立波(solitary waves)

上一节，我们在非线性平流方程中加进了 $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，分析了耗散的作用；本节，在非线性平流方程中加进含$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$的频散项并分析它的作用. 我们就以 § 9.2 引进的浅水波的 KdV 方程为例来说明.

浅水波的 KdV 方程(9.107)可以写为

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + c_0(1 + \lambda h')\frac{\partial h'}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 h'}{\partial x^3} = 0, \tag{9.148}$$

其中

$$\lambda = 3/2H, \quad \beta = c_0 H^2/6. \tag{9.149}$$

若在方程(9.148)中，令

$$\eta = 1 + \lambda h' = 1 + \frac{3}{2H}h', \tag{9.150}$$

则方程(9.148)就化为

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0\eta\frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \tag{9.151}$$

这就在形式上消去了方程(9.148)中所含的线性平流项. 所以，KdV 方程的一般形式可写为

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \alpha v\frac{\partial v}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \tag{9.152}$$

若再令

$$u = \alpha v, \tag{9.153}$$

则 KdV 方程(9.152)可以化为更为简洁的形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (\beta > 0), \tag{9.154}$$

这里 $\beta>0$. 对于 $\beta<0$ 的 KdV 方程，很容易化为 $\beta>0$ 的形式，见本章末习题 3.

KdV 方程(9.154)相应的线性方程是

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{9.155}$$

若以(9.125)形式的解代入方程(9.155)，则导得频散关系为

$$\omega = kc_0 - \beta k^3, \tag{9.156}$$

这里 ω 为实数. 由此求得相速度 c_p 和群速度 c_g 分别是

$$c_p \equiv \frac{\omega}{k} = c_0 - \beta k^2, \quad c_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = c_0 - 3\beta k^2. \tag{9.157}$$

因而 $\beta \neq 0$ 时, $c_g \neq c_p$, 它充分说明 KdV 方程中 $\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ 一项表征频散的作用. 而且, 因为

$$\frac{dc_g}{dk} = -6\beta k, \tag{9.158}$$

所以, $\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ 的作用使得波频散, 而且, β 越大, 波长越短(k 越大), 波频散越强, 这种波动就是频散波(dispersive waves). 当然, 对长波而言(k 小), 它是弱频散波, 其特点是 ω 中仅含 k 的奇数次项.

为了阐述频散因子和非线性因子的共同作用, 我们求 KdV 方程(9.154)的行波解, 与 Burgers 方程类似, 令

$$u(x,t) = u(\xi), \quad \xi = x - ct, \tag{9.159}$$

其中 c 是常数.

将(9.159)式代入方程(9.154), 得

$$-c\frac{du}{d\xi} + u\frac{du}{d\xi} + \beta\frac{d^3u}{d\xi^3} = 0.$$

将上式对 ξ 积分一次有

$$-cu + \frac{1}{2}u^2 + \beta\frac{d^2u}{d\xi^2} = A, \tag{9.160}$$

其中 A 是积分常数. 将上式乘以 $\frac{du}{d\xi}$ 后, 再对 ξ 积分一次有

$$-\frac{1}{2}cu^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{\beta}{2}\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = Au + B$$

或

$$\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = -\frac{1}{3\beta}F(u), \tag{9.161}$$

其中

$$F(u) \equiv u^3 - 3cu^2 - 6Au - 6B \tag{9.162}$$

是 u 的三次多项式, B 为积分常数.

为了求 KdV 方程的周期解, 我们把方程(9.160)视为一个二阶保守系统. 由(9.160)式有

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = \frac{1}{\beta}\left(A + cu - \frac{1}{2}u^2\right) = -\frac{1}{6\beta}F'(u), \tag{9.163}$$

其中 $F'(u)$表 $F(u)$对 u 的微商.

根据(9.163)式,$-\frac{1}{6\beta}F'(u)$可视为外力,则求得“势能”为

$$\phi(u)=\int\frac{1}{6\beta}F'(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{6\beta}F(u). \tag{9.164}$$

它说明形式为(9.162)式的 $F(u)$表征“势能”的作用.若令

$$v\equiv\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}, \tag{9.165}$$

则方程(9.163)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}=-\dfrac{1}{6\beta}F'(u),\\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=v.\end{cases} \tag{9.166}$$

因而,系统(9.166)的平衡点(u_0,v_0)满足

$$F'(u_0)=0,\quad v_0=0, \tag{9.167}$$

即平衡点在相图(u,v)的 u 轴上,而且在 u 轴的坐标是势能$\phi(u)$或 $F(u)$的极值点.这样,我们可根据常微分方程的性质,分析 $F(u)$的极大或极小,以确定平衡点的性质,并说明在什么条件下,KdV 方程有周期解.

若 $F(u)$只有一个实的零点 $u=u_1$(见图 9.9),因为,$u\leqslant u_1$ 时,$-F(u)>0$;$u>u_1$ 时,$-F(u)<0$,所以,只有 $u\leqslant u_1$ 时,方程(9.161)才有实函数解.但此时,u 没有限制,甚至它可以变为无穷大,不存在周期解.

这样,为了求得周期解,我们设 $F(u)$有三个实的零点 u_1,u_2 和 u_3,而且不失一般性,设

$$u_1\geqslant u_2\geqslant u_3, \tag{9.168}$$

因而 $F(u)$可表为

$$F(u)=(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3). \tag{9.169}$$

比较(9.162)式和(9.169)式有

$$\begin{cases}c=(u_1+u_2+u_3)/3,\\ A=-(u_1u_2+u_2u_3+u_3u_1)/6,\\ B=u_1u_2u_3/6.\end{cases} \tag{9.170}$$

因

$$\begin{aligned}c^2+2A&=\frac{1}{9}(u_1+u_2+u_3)^2-\frac{1}{3}(u_1u_2+u_2u_3+u_3u_1)\\&=\frac{1}{18}\{(u_1-u_2)^2+(u_2-u_3)^2+(u_3-u_1)^2\},\end{aligned}$$

所以,当 u_1,u_2,u_3 是实数时,

$$c^2 + 2A \geqslant 0.$$

图 9.10 描绘了 $F(u)$ 有三个实根的三种不同的情况，其中曲线(Ⅰ)表示 $F(u)$ 有三个不等实根，曲线(Ⅱ)表示 $F(u)$ 有一个重实根为 $u_2=u_3$，曲线(Ⅲ)表示 $F(u)$ 有一个重实根为 $u_1=u_2$.

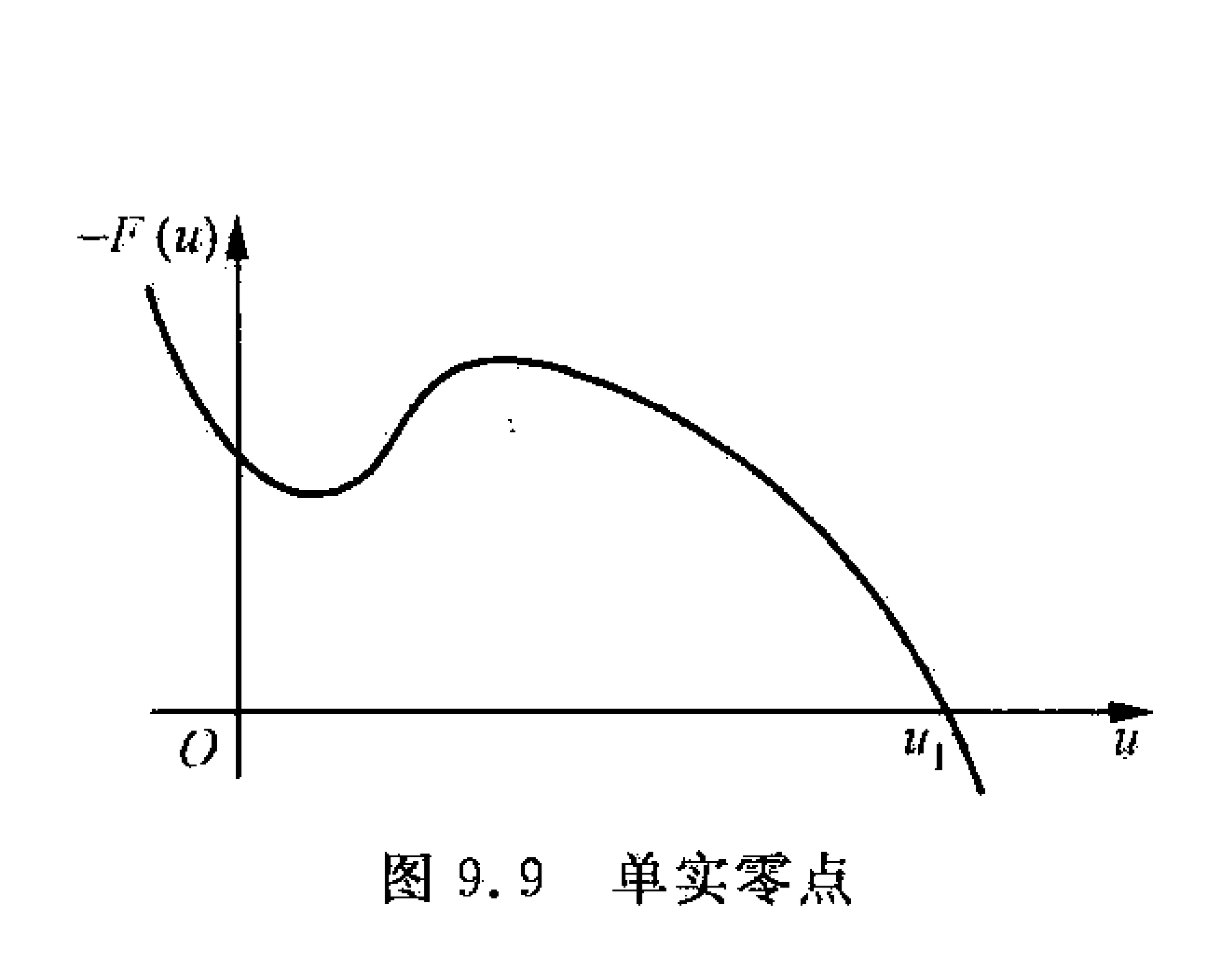


图 9.9 单实零点

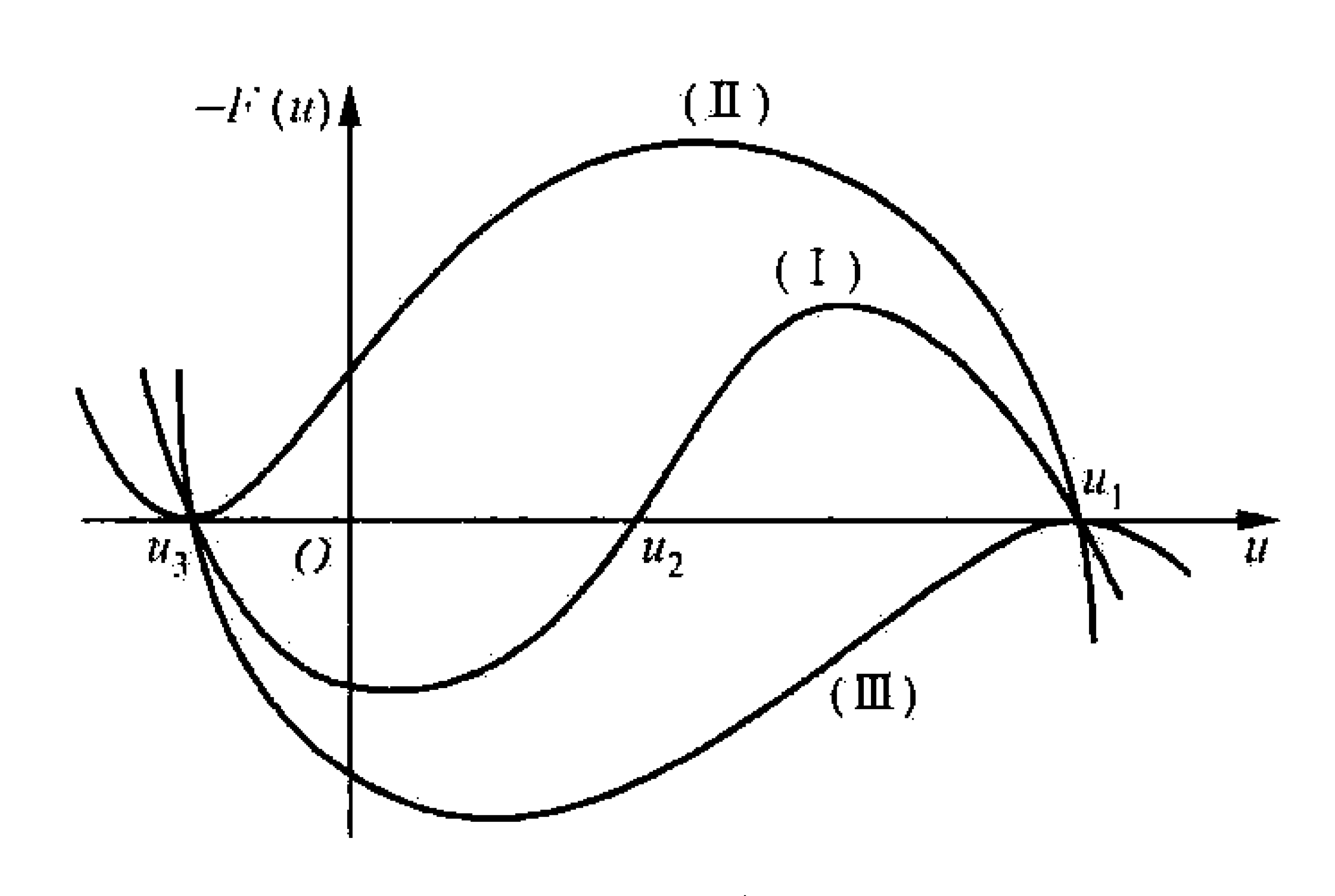


图 9.10 三个实零点

曲线(Ⅰ)，由于在区间 (u_2, u_1)，$-F(u)>0$，符合方程(9.161)的要求，而且，其中 $-F(u)$ 有一极大值点，相应它是势能 $\phi(u)$ 的极小值点. 因而，平衡点 $(u_0, 0)$ 是中心点，在 (u_2, u_1) 内，轨线是闭合的，所以存在周期解. 下面将看到，这个周期解叫椭圆余弦波(cnoidal waves).

曲线(Ⅱ)，它是曲线(Ⅰ)中 $u_2=u_3$ 的特例. 此时，在 (u_3, u_1) 内势能 $\phi(u)$ 有一极小值点，但由于 $u_2=u_3$ 是势能 $\phi(u)$ 的极大值点，因此，在 (u_3, u_1) 内，平衡点 $(u_0, 0)$ 仍是中心点，但轨线属分型线，且当 $\xi\to\pm\infty$ 时，u 都趋向于 $u_2=u_3$. 下面，我们把这个解叫孤立波(solitary waves).

曲线(Ⅲ)，它是曲线(Ⅰ)中 $u_1=u_2$ 的特例. 此时，在 (u_3, u_1) 上，$-F(u)<0$，不符合方程(9.161)的要求，只有一点 $u=u_1=u_2$，$F(u)=0$；它是势能的极小值点，该点就是中心点本身，它对应通常的线性波解.

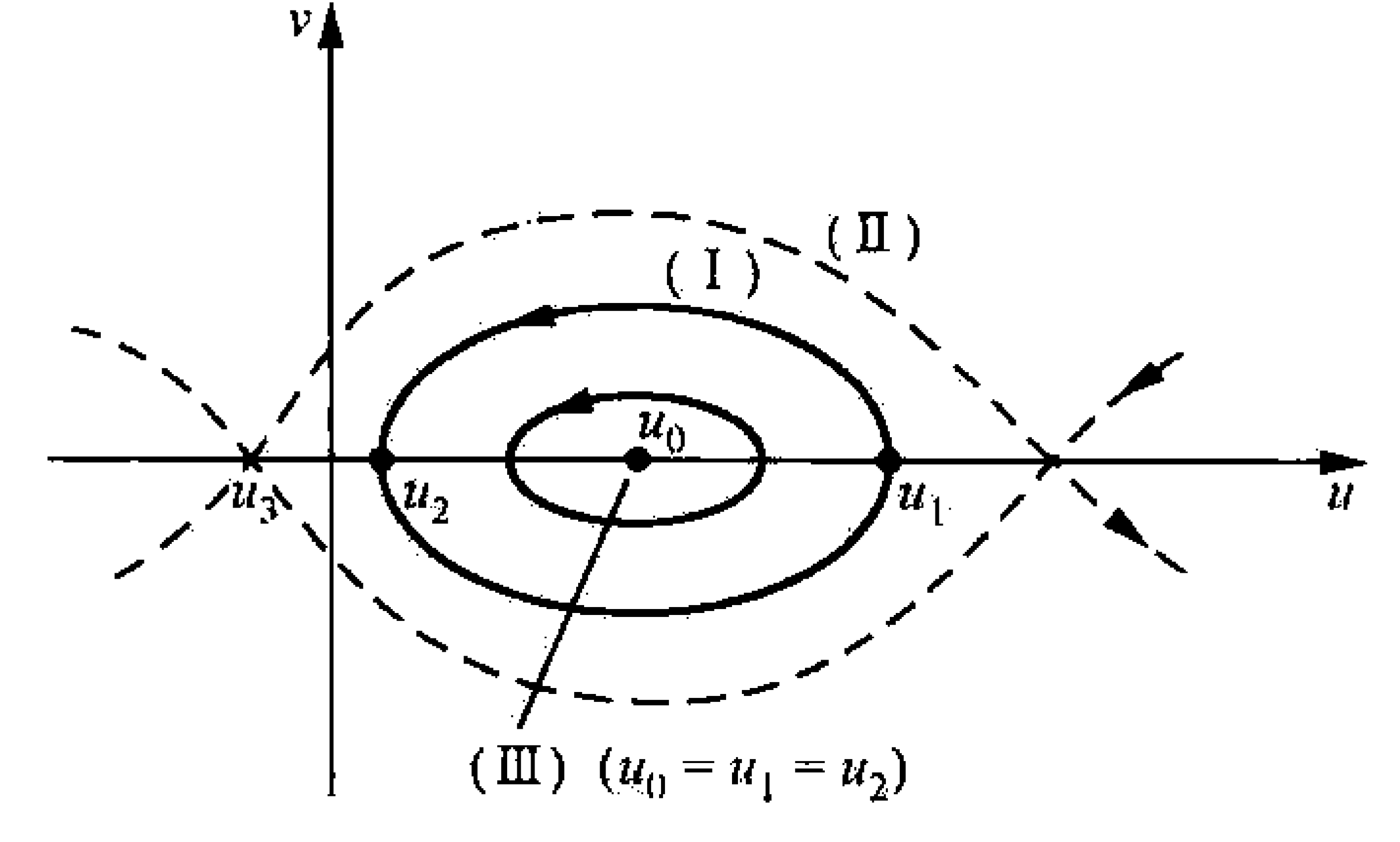


图 9.11 KdV 方程的相图

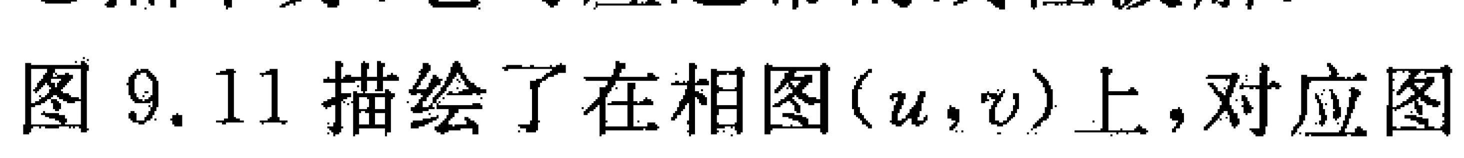


图 9.11 描绘了在相图 (u, v) 上，对应图 9.10 中曲线(Ⅰ)，(Ⅱ)和(Ⅲ)的轨线，图中箭头代表了 ξ 增加的方向. 下面我们分别讨论这三种情况.

一、椭圆余弦波

这是曲线(Ⅰ)的情况. 将方程(9.161)两边开方有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = \pm\sqrt{-F(u)/3\beta}. \tag{9.171}$$

上式右端根号外取负号，并注意(9.169)式，得

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{3\beta}}=-\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u_1-u)(u-u_2)(u-u_3)}}\quad(u_2<u<u_1).\tag{9.172}$$

(9.171)式右端根号外取正号也一样讨论. 令

$$u_1-u=p^2,\tag{9.173}$$

则

$$\begin{cases}u-u_2=(u_1-u_2)-(u_1-u)=(u_1-u_2)-p^2,\\u-u_3=(u_1-u_3)-(u_1-u)=(u_1-u_3)-p^2.\end{cases}\tag{9.174}$$

注意$-\mathrm{d}u=2p\mathrm{d}p$，则(9.172)式化为

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{3\beta}}=\frac{2\mathrm{d}p}{\sqrt{[(u_1-u_3)-p^2][(u_1-u_2)-p^2]}}.\tag{9.175}$$

若再令

$$p=\sqrt{u_1-u_2}\,q,\tag{9.176}$$

相应

$$q=p/\sqrt{u_1-u_2}=\sqrt{(u_1-u)/(u_1-u_2)}.\tag{9.177}$$

这样就有

$$\begin{cases}u=u_1\text{ 时，}\quad q=0,\\u=u_2\text{ 时，}\quad q=1.\end{cases}\tag{9.178}$$

因而，方程(9.175)化为

$$\sqrt{\frac{u_1-u_3}{3\beta}}\mathrm{d}\xi=\frac{2}{\sqrt{(1-q^2)(1-m^2q^2)}}\mathrm{d}q,\tag{9.179}$$

其中

$$m^2=\frac{u_1-u_2}{u_1-u_3}\quad(0<m^2<1).\tag{9.180}$$

将方程两边积分，选择$q=0$时，$\xi=0$，相当$u=u_1$，则得

$$\xi=\sqrt{\frac{12\beta}{u_1-u_3}}\int_0^q\frac{1}{(1-q^2)(1-m^2q^2)}\mathrm{d}q.\tag{9.181}$$

上式右端的积分称为第一类 Legendre 椭圆积分，它是上限q和参数m(称为模数)的函数. 反过来，也可把积分上限q视为积分值的函数，它称为 Jacobi 椭圆正弦函数. 因而，(9.181)式可以写为

$$q=\mathrm{sn}\sqrt{\frac{u_1-u_3}{12\beta}}\xi,\tag{9.182}$$

其中 $\mathrm{sn}x$ 表示x的 Jacobi 椭圆正弦函数，在§8.11中，我们也应用过. 这里详细说明了它的来历.

将(9.177)式代入(9.182)式有

$$\frac{u_1-u}{u_1-u_2}=q^2=\mathrm{sn}^2\sqrt{\frac{u_1-u_3}{12\beta}}\xi=1-\mathrm{cn}^2\sqrt{\frac{u_1-u_3}{12\beta}}\xi, \tag{9.183}$$

其中 $\mathrm{cn}x$ 表示 x 的 Jacobi 椭圆余弦函数($\mathrm{cn}^2x=1-\mathrm{sn}^2x$),由上式解得

$$u(x,t)=u_2+(u_1-u_2)\mathrm{cn}^2\sqrt{\frac{u_1-u_3}{12\beta}}(x-ct), \tag{9.184}$$

它就称为椭圆余弦波,其振幅为 u_1-u_2. 因 cn^2x 的周期为 $2\mathrm{K}(m)$,其中

$$\mathrm{K}(m)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-q^2)(1-m^2q^2)}}\mathrm{d}q, \tag{9.185}$$

称为第一类 Legendre 完全椭圆积分(参见(8.303)式). 所以,由(9.184)式所表征的椭圆余弦波的波长为

$$L=\frac{2\mathrm{K}(m)}{\sqrt{(u_1-u_3)/12\beta}}; \tag{9.186}$$

而波速 c 就是(9.170)的第一式.

图 9.12 描绘了椭圆余弦波的图像.

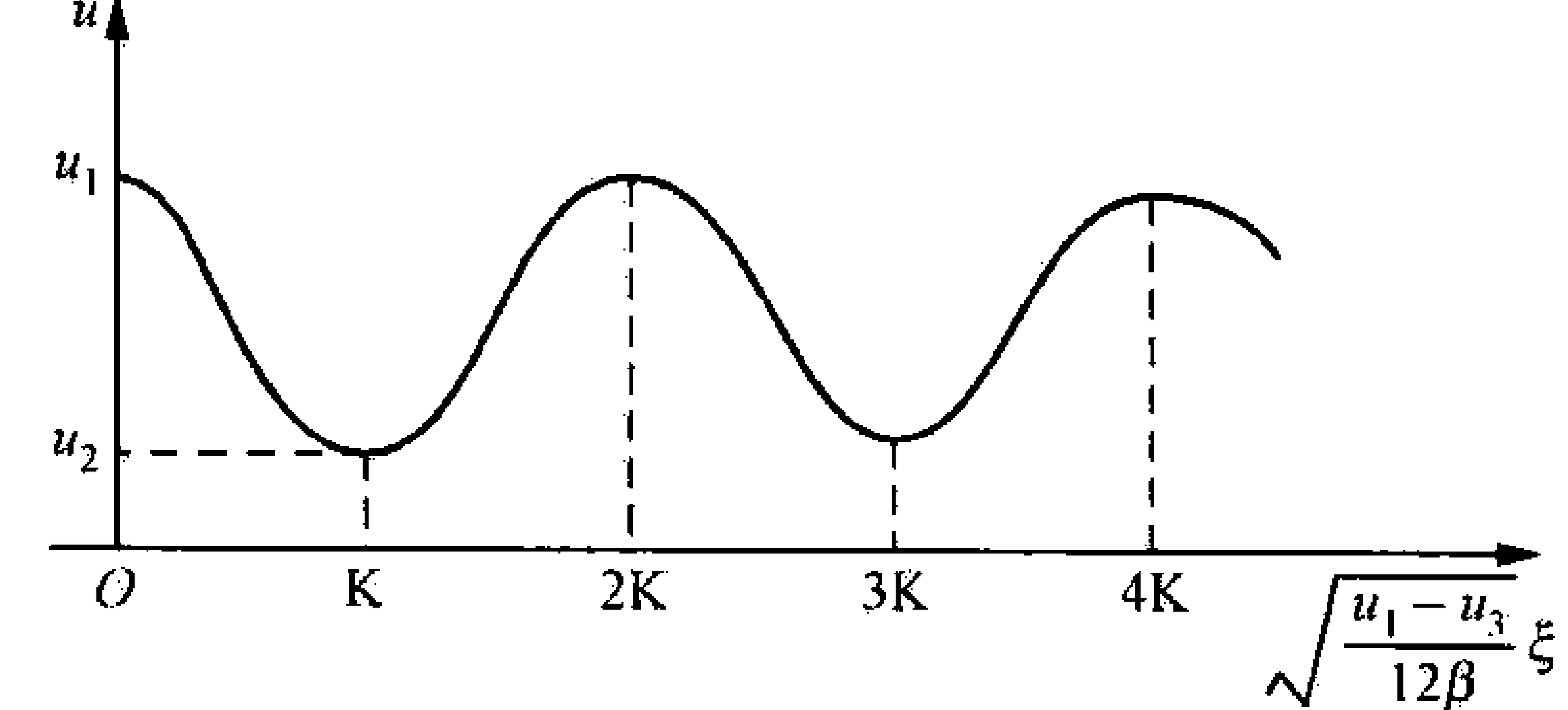


图 9.12 椭圆余弦波

二、孤立波

这是曲线(Ⅱ)的情况. 它是椭圆余弦波中

$$u_2=u_3 \tag{9.187}$$

的特例. 将上式代入(9.180)式可知,此时

$$m=1. \tag{9.188}$$

而(9.181)式右端的积分为 $\mathrm{arctanh}q$,相应,椭圆正弦函数退化为双曲正切函数,椭圆余弦函数退化为双曲正割函数,即

$$\begin{cases}\mathrm{sn}x\to\tanh x,\\ \mathrm{cn}x\to\mathrm{sech}x\end{cases}\quad(m\to1). \tag{9.189}$$

因而,(9.184)式化为

$$u(x,t)=u_2+(u_1-u_2)\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{u_1-u_2}{12\beta}}(x-ct). \tag{9.190}$$

它称为孤立波,是椭圆余弦波在 $m\to1$ 时的极限. 一般我们把非线性演化方程在无穷远处趋于确定常数(包括零)的解都称为孤立波. 但因为 $\mathrm{K}(1)\to\infty$,因而 $L\to\infty$. 所以,孤立波是波长为 ∞ 的一个孤立的非线性波. 又因 $\xi\to0$ 时,$\mathrm{sech}\xi\to1$;$\xi\to\pm\infty$ 时,$\mathrm{sech}\xi\to0$,则由(9.190)式有

$$u|_{\xi=0}=u_1,\quad u|_{\xi\to\pm\infty}=u_2.$$

因而,孤立波在 $\xi\to\pm\infty$ 时达到一个均匀状态.若记

$$u_2=u_\infty,\tag{9.191}$$

并用 a 表示孤立波的振幅,即

$$a=u_1-u_2,\tag{9.192}$$

这样,孤立波解(9.190)可表为

$$u=u_\infty+a\operatorname{sech}^2\sqrt{\frac{a}{12\beta}}(x-ct).\tag{9.193}$$

其中,孤立波的速度 c,根据(9.170)的第一式得

$$c=\frac{1}{3}(u_1+2u_2)=u_2+\frac{1}{3}(u_1-u_2)=u_\infty+\frac{1}{3}a.\tag{9.194}$$

因而,孤立波相对于 u_∞ 的速度与波的振幅成正比.这是非线性波的一个特色,其圆频率或波速不仅像线性波那样与波数有关,而且也与振幅有关.

通常,我们把孤立波解(9.193)中的 $\sqrt{12\beta/a}$ 称为孤立波的宽度,记为 d,即

$$d=\sqrt{12\beta/a},\tag{9.195}$$

它与 $\sqrt{\beta}$ 成正比,与 $\sqrt{a}$ 成反比.由此说明:KdV 方程中频散项的作用是扩大波的宽度,非线性波的频散就是通过它来实现的.

图 9.13 描绘了孤立波的图像.

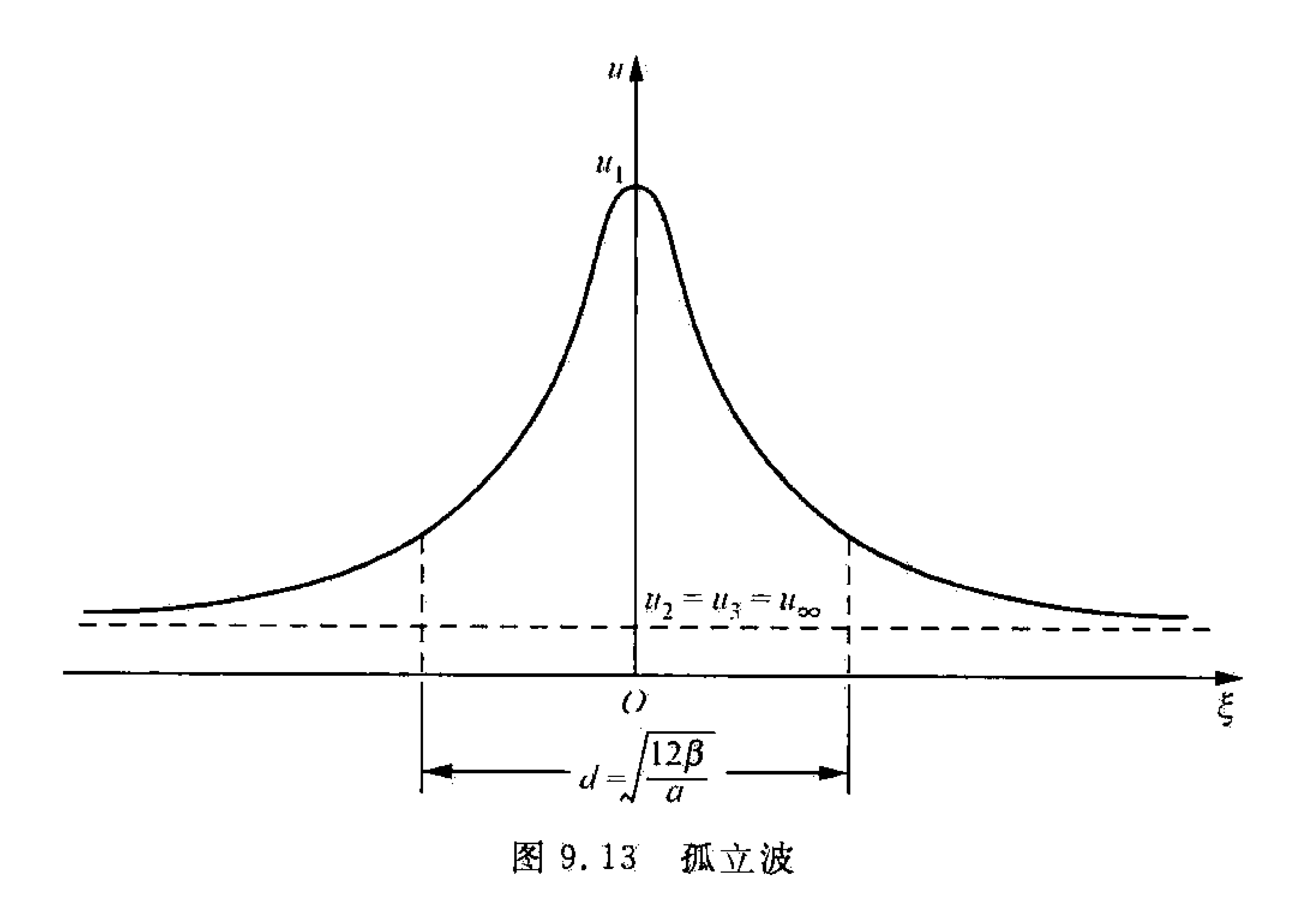


图 9.13 孤立波

我们知道,非线性的作用使波变陡而集中,而前面分析,频散的作用使波加宽,在 KdV 方程中的非线性因子和频散因子两者平衡时,就得到如图 9.13 的孤立波.它在运动过程中,始终保持这个形状,具有粒子的性质,正由于此,我们把孤立波称为孤立子(soliton).孤立波可以携带信息在很长距离内不被歪曲.

最早对孤立波现象的描述是1844年.英国科学家Russell在写给第14届英国科学促进协会的报告中说："我观察过一次船的运动，这条船被两匹马拉着，沿着狭窄的河道迅速前进.船突然停下时，被船体带过来的水流聚集在船头周围，并处于急剧运动状态，而后形成一个圆而光滑且轮廓分明的巨大水峰，以极大的速度离开船头向前移动.这个水峰大约长30英尺，高1至1.5英尺，行进的速度每小时约8至9英里.在行进过程中，速度和波形都保持不变.我骑着马紧紧跟随，后来发觉波的高度逐渐减小，在跟踪了1至2英里以后，它终于消失在蜿蜒曲折的河道之中."①

孤立波和孤立子的概念已广泛应用于流体力学、固体力学、晶格力学、非线性光学、基本粒子物理、分子生物学、等离子体物理和地球物理的广大自然科学领域中.

三、线性波

这是曲线(Ⅲ)的情况，它是椭圆余弦波中

$$u_1 = u_2 \tag{9.196}$$

的特例.将上式代入(9.180)式可知，此时

$$m = 0, \tag{9.197}$$

而(9.181)式右端的积分为 $\arcsin q$，相应，椭圆正弦函数和椭圆余弦函数分别退化为正弦函数和余弦函数，即

$$\begin{cases} \mathrm{sn}x \to \sin x, \\ \mathrm{cn}x \to \cos x \end{cases} \quad (m \to 0). \tag{9.198}$$

因而(9、184)式化为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_2 + (u_1 - u_2)\cos^2\sqrt{\frac{u_1 - u_3}{12\beta}}(x - ct) \\ &= \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2}\cos\sqrt{\frac{u_1 - u_3}{3\beta}}(x - ct). \end{aligned} \tag{9.199}$$

这就是线性波，是椭圆余弦波在 $m \to 0$ 时的极限，其振幅为 $(u_1 - u_2)/2 \to 0$，波数和波长分别是

$$k = \sqrt{\frac{u_1 - u_3}{3\beta}}, \quad L = 2\pi\sqrt{\frac{3\beta}{u_1 - u_3}}. \tag{9.200}$$

由上面分析可知，KdV方程所表征的非线性波的基本形式是椭圆余弦波，它的特殊情况是孤立波($m \to 1$)和线性波($m \to 0$)，在这个意义上，m 值表征非线性的

① 见Russell, J.S., Report on Waves, Rep. Mett. Brit. Assoc. Adv. Sci. 14th York, 1844, 311, London, John Murry.

作用，m 值越大（m 最大为 1），非线性作用越大. 而且，非线性波的圆频率和波速不仅和波数有关，且与波的振幅有关，这是非线性波的特色.

对于一般的 KdV 方程(9.152)的求解，可以按(9.153)式的变换求解，也可以直接求解. 若令

$$v(x,t) = v(\xi), \quad \xi = x - ct. \tag{9.201}$$

将其代入方程(9.152)，很易得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = -\frac{\alpha}{3\beta}F_1(v), \tag{9.202}$$

其中

$$F_1(v) \equiv v^3 - \frac{3c}{\alpha}v^2 - \frac{6\beta A}{\alpha} - \frac{6\beta B}{\alpha} \tag{9.203}$$

是 v 的三次多项式，A，B 为积分常数.

这样，很易求得一般 KdV 方程(9.152)的椭圆余弦波解为

$$v(x,t) = v_2 + (v_1 - v_2)\mathrm{cn}^2\sqrt{\frac{\alpha}{12\beta}(v_1 - v_3)}(x - ct), \tag{9.204}$$

其中 v_1，v_2，v_3 是 $F_1(v)$的三个实的零点. 显然波速 c 满足

$$c = \frac{\alpha}{3}(v_1 + v_2 + v_3). \tag{9.205}$$

而且，当 $v_2 = v_3$ 时，(9.204)式退化为孤立波解，即

$$v(x,t) = v_\infty + a\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{\alpha a}{12\beta}}(x - ct), \tag{9.206}$$

其中

$$\begin{cases} v_\infty = v_2, \quad a = v_1 - v_2, \\ c = \dfrac{\alpha}{3}(v_1 + 2v_2) = \alpha v_\infty + \dfrac{\alpha}{3}a. \end{cases} \tag{9.207}$$

对于浅水波的 KdV 方程(9.148)的求解，可以按(9.150)式的变换求解，也可以直接求解. 若令

$$h' = H\eta(\xi), \quad \xi = x - ct, \tag{9.208}$$

η 是 h'的无量纲量. 将(9.208)式代入方程(9.148)，不难得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = -\frac{3}{H^2}F_2(\eta), \tag{9.209}$$

其中

$$F_2(\eta) \equiv \eta^3 - 2\left(\frac{c}{c_0} - 1\right)\eta^2 + 4A\eta + B \tag{9.210}$$

是 η 的三次多项式，A，B 为积分常数.

不失一般性，我们取 $B=0$，从而选 $F_2(\eta)$ 的三个实零点为 a，0，$a-b$（其中

$0<a<b$),即

$$F_2(\eta)=\eta(\eta-a)(\eta-a+b)\quad(0<a<b). \tag{9.211}$$

比较(9.210)式和(9.211)式可得

$$2a-b=2\left(\frac{c}{c_0}-1\right). \tag{9.212}$$

这样,可求得浅水波 KdV 方程(9.148)关于 η 的椭圆余弦波解为

$$\eta=a\mathrm{cn}^2\sqrt{\frac{3b}{4H^2}}(x-ct). \tag{9.213}$$

其模数

$$m=\sqrt{a/b}; \tag{9.214}$$

波长为

$$L=\frac{2\mathrm{K}(m)}{\sqrt{3b/4H^2}}=\frac{4H}{\sqrt{3b}}\mathrm{K}(m). \tag{9.215}$$

由(9.208)式,则对 h' 的椭圆余弦波解为

$$h'=a^*\mathrm{cn}^2\sqrt{\frac{3b}{4H^2}}(x-ct). \tag{9.216}$$

其中振幅为

$$a^*=aH; \tag{9.217}$$

波速 c 由(9.212)式决定.

当 $a-b=0$,即 $a=b$ 时,(9.216)式退化为孤立波解,即

$$h'=a^*\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{3a}{4H^2}}(x-ct), \tag{9.218}$$

其中波速由(9.212)式定得为

$$c=c_0\left(1+\frac{a}{2}\right)=c_0\left(1+\frac{a^*}{2H}\right). \tag{9.219}$$

当 $a\to0$ 时,$m\to0$,(9.216)式蜕化为线性浅水波解,即

$$h'=a^*\cos^2\frac{\sqrt{3b}}{2H}(x-ct)=\frac{a^*}{2}+\frac{a^*}{2}\cos\frac{\sqrt{3b}}{H}(x-ct). \tag{9.220}$$

相应的波速由(9.212)式求得为

$$c=c_0\left(1-\frac{b}{2}\right). \tag{9.221}$$

由(9.220)式知,此时线性浅水波的波数为

$$k=\sqrt{3b}/H, \tag{9.222}$$

则代入(9.221)式有

$$c=c_0\left(1-\frac{1}{6}k^2H^2\right). \tag{9.223}$$

相应,圆频率为

$$\omega = kc = kc_0\left(1 - \frac{1}{6}k^2H^2\right), \tag{9.224}$$

这与(9.100)式完全一致.

§9.6 正弦-Gordon 方程的周期解、扭结波(kink waves)与反扭结波(anti-kink waves)

正弦-Gordon 方程的一般形式是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0^2\sin u = 0, \tag{9.225}$$

它是普遍的 Klein-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V'(u) = 0 \tag{9.226}$$

中

$$V(u) = f_0^2(1-\cos u) \tag{9.227}$$

的特例,这里 $V(u)$ 相当于势能. 若令

$$u(x,t) = u(\xi), \quad \xi = x - ct, \tag{9.228}$$

将其代入方程(9.226)得

$$(c^2 - c_0^2)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} + V'(u) = 0. \tag{9.229}$$

上式等价于下列方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = v, \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} = -\dfrac{V'(u)}{c^2 - c_0^2} \quad (c^2 \neq c_0^2). \end{cases} \tag{9.230}$$

方程组(9.230)的平衡点(u_0, v_0)满足

$$V'(u_0) = 0, \quad v_0 = 0, \tag{9.231}$$

即平衡点使得 $v = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = 0$,同时是势能 $V(u)$ 的极值点. 在相平面(u,v)上的轨道满足方程:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = -\frac{V'(u)}{(c^2 - c_0^2)v}.$$

由此求得

$$\frac{1}{2}(c^2 - c_0^2)v^2 + V(u) = A, \tag{9.232}$$

A 是积分常数.

将方程组(9.229)的第二式对 ξ 微商,并利用第一式,得

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{V''(u)}{c^2 - c_0^2} v = 0. \tag{9.233}$$

由此可知,只有

$$\frac{V''(u_0)}{c^2 - c_0^2} > 0, \tag{9.234}$$

v 和 u 才有周期解.这意味着 $V''(u_0)$ 与 $c^2 - c_0^2$ 有同样的符号.即 $c^2 - c_0^2 > 0$ 时伴有势能的极小值点($V''(u_0) > 0$),$c^2 - c_0^2 < 0$ 时伴有势能的极大值点($V''(u_0) < 0$).

设相平面(u,v)上的轨道与 u 轴的交点为 u_1 和 u_2,它满足

$$v\big|_{u_1,u_2} = \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right|_{u_1,u_2} = 0. \tag{9.235}$$

由(9.232)式知,上式表示 u_1 和 u_2 是

$$A - V(u) = 0 \tag{9.236}$$

的两个实根.这样,当满足条件(9.234)式时,u 在(u_1,u_2)上平衡点 u_0 附近振荡.

由上分析,对于正弦-Gordon 方程(9.225),

$$V'(u) = f_0^2 \sin u, \tag{9.237}$$

则其平衡点(u_0,v_0)满足

$$\sin u_0 = 0, \quad v_0 = 0. \tag{9.238}$$

因而

$$u_0 = n\pi \quad (n = 0,1,2,\cdots). \tag{9.239}$$

相应,方程(9.232)化为

$$\frac{1}{2}(c^2 - c_0^2)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + f_0^2(1 - \cos u) = A, \tag{9.240}$$

因此时

$$V''(u_0) = f_0^2 \cos u_0 = \begin{cases} f_0^2 > 0, & u_0 = 0, 2\pi, \cdots, \\ -f_0^2 < 0, & u_0 = \pi, 3\pi, \cdots, \end{cases} \tag{9.241}$$

所以,由(9.234)式知:当 $c^2 - c_0^2 > 0$ 时,在平衡点 $u_0 = 0, 2\pi, \cdots$ 附近有周期解;而当 $c^2 - c_0^2 < 0$ 时,在平衡点 $u_0 = \pi, 3\pi, \cdots$ 附近有周期解.

注意 $1 - \cos u = 2\sin^2 \dfrac{u}{2}$,则(9.240)式化为

$$\frac{1}{2}(c^2 - c_0^2)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + 2f_0^2 \sin^2 \frac{u}{2} = A. \tag{9.242}$$

由(9.242)式知,若 $c^2 - c_0^2 > 0$,要求 $A - 2f_0^2 \sin^2 \dfrac{u}{2} > 0$,则 $A > 0$;若 $c^2 - c_0^2 < 0$,

要求 $A-2f_0^2\sin^2\frac{u}{2}<0$,则 $A<2f_0^2$. 因而一般我们设 $0\leqslant A\leqslant 2f_0^2$. 下面分几种情况说明.

(1) $c^2-c_0^2>0$,但 $0<A<2f_0^2$. 此时,正弦-Gordon 方程(9.225)在平衡点 $u_0=0,2\pi,\cdots$附近有周期解. 此时,方程(9.242)写为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=\frac{4f_0^2}{c^2-c_0^2}\left(\frac{A}{2f_0^2}-\sin^2\frac{u}{2}\right). \tag{9.243}$$

根据 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi=0$,求得在平衡点 $u_0=0$ 点附近的两个 u 值是

$$u_1=2\arcsin\sqrt{\frac{A}{2f_0^2}},\quad u_2=-u_1. \tag{9.244}$$

因而 u 在$(-u_1,u_1)$围绕平衡点 $u_0=0$ 作周期运动. 而且此时(9.243)式化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\pm\frac{2f_0}{\sqrt{c^2-c_0^2}}\sqrt{\frac{A}{2f_0^2}-\sin^2\frac{u}{2}},$$

或

$$\pm\mathrm{d}\xi=\frac{1}{\dfrac{2f_0}{c^2-c_0^2}\cdot\sqrt{\dfrac{A}{2f_0^2}-\sin^2\dfrac{u}{2}}}\mathrm{d}u. \tag{9.245}$$

若令

$$\sin\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{A}{2f_0^2}}\sin\varphi=\sin\frac{u_1}{2}\sin\varphi, \tag{9.246}$$

注意 $\frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{A}{2f_0^2}}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi,\cos\frac{u}{2}=\sqrt{1-m^2\sin\varphi}$,则(9.245)式化为

$$\pm\mathrm{d}\xi=\frac{\sqrt{c^2-c_0^2}}{f_0}\frac{1}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi, \tag{9.247}$$

其中 m 称为模数$(0<m<1)$,它满足

$$m^2=\sin^2\frac{u_1}{2}=\frac{A}{2f_0^2}. \tag{9.248}$$

对(9.247)式两边自 $\xi=0(u=0)$到 $\xi=\xi(u=u)$积分得

$$\pm\xi=\frac{\sqrt{c^2-c_0^2}}{f_0}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi. \tag{9.249}$$

上式右端的积分是第一类 Legendre 椭圆积分(令 $q=\sin\varphi$,它即化为(9.181)式右端的积分),则

$$\sin\varphi=\pm\,\mathrm{sn}\frac{f_0}{\sqrt{c^2-c_0^2}}\xi \tag{9.250}$$

或

$$\sin\frac{u}{2}=\pm\sqrt{\frac{A}{2f_0^2}}\mathrm{sn}\frac{f_0}{\sqrt{c^2-c_0^2}}\xi=\pm m\,\mathrm{sn}\frac{f_0}{\sqrt{c^2-c_0^2}}\xi, \tag{9.251}$$

其模数为 $m=\sqrt{\dfrac{A}{2f_0^2}}$. 因 $\mathrm{sn}x$ 以 $4\mathrm{K}(m)$为周期,因而上述椭圆正弦波的波长为

$$L=\frac{4\mathrm{K}(m)}{f_0}\sqrt{c^2-c_0^2}. \tag{9.252}$$

(2) $c^2-c_0^2<0$,但 $0<A<2f_0^2$. 此时,正弦-Gordon 方程(9.225)在平衡点 π, 3π,…附近有周期解. 此时,方程(9.242)改写为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=\frac{4f_0^2}{c_0^2-c^2}\left(\sin^2\frac{u}{2}-\frac{A}{2f_0^2}\right)=\frac{4f_0^2}{c_0^2-c^2}\left(1-\frac{A}{2f_0^2}-\cos^2\frac{u}{2}\right). \tag{9.253}$$

(9.253)式与(9.243)式比较,左端相同,右端(9.243)式中的$\dfrac{4f_0^2}{c^2-c_0^2}$变成了(9.253)式中的$\dfrac{4f_0^2}{c_0^2-c^2}$,$\dfrac{A}{2f_0^2}=m^2$ 变成了 $1-\dfrac{A}{2f_0^2}=1-m^2=m'^2$($m'$称为余模数),$\sin^2\dfrac{u}{2}$变成了 $\cos^2\dfrac{u}{2}$. 这样,类似地求得方程(9.253)的解为

$$\cos\frac{u}{2}=\pm\sqrt{1-\frac{A}{2f_0^2}}\,\mathrm{sn}\,\frac{f_0}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\xi=\pm m'\,\mathrm{sn}\,\frac{f_0}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\xi, \tag{9.254}$$

其模数为 m'. 这是在$(\pi-u_1,\pi+u_1)$围绕平衡点 $u_0=\pi$ 作周期运动的解.

(3) $c^2-c_0^2<0$,但 $A=0$,这是一种极限情况. 因此时

$$m'\to1,\quad \mathrm{sn}\,\frac{f_0}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\xi\to\tanh\frac{f_0}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\xi,$$

则(9.254)式化为

$$\cos\frac{u}{2}=\pm\tanh\frac{f_0}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\xi. \tag{9.255}$$

注意由上式很容易得到 $\exp\left\{\mp\dfrac{f_0}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\xi\right\}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{u}{2}}{1+\cos\frac{u}{2}}}$,又因为

$$\sqrt{\frac{1-\cos\frac{u}{2}}{1+\cos\frac{u}{2}}}=\tan\frac{u}{4},$$

则

$$\tan\frac{u}{4}=\exp\left\{\mp\frac{f_0}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\xi\right\}, \tag{9.256}$$

因而求得

$$u=4\arctan\left(\exp\left\{\mp\frac{f_0}{\sqrt{c_0^2-c^2}}(x-ct)\right\}\right). \tag{9.257}$$

其中的正号对应于 $\xi\to-\infty, u\to0$；$\xi\to+\infty, u\to2\pi$，它称为扭结解(kink solution)，或扭结孤立波，速度为 c，宽度为 $\sqrt{(c_0^2-c^2)/f_0^2}$. 负号对应于 $\xi\to-\infty, u\to2\pi$；$\xi\to+\infty, u\to0$，它称为反扭结解(anti-kink solution)或反扭结孤立波. 分别见图 9.14(a) 和 9.14(b).

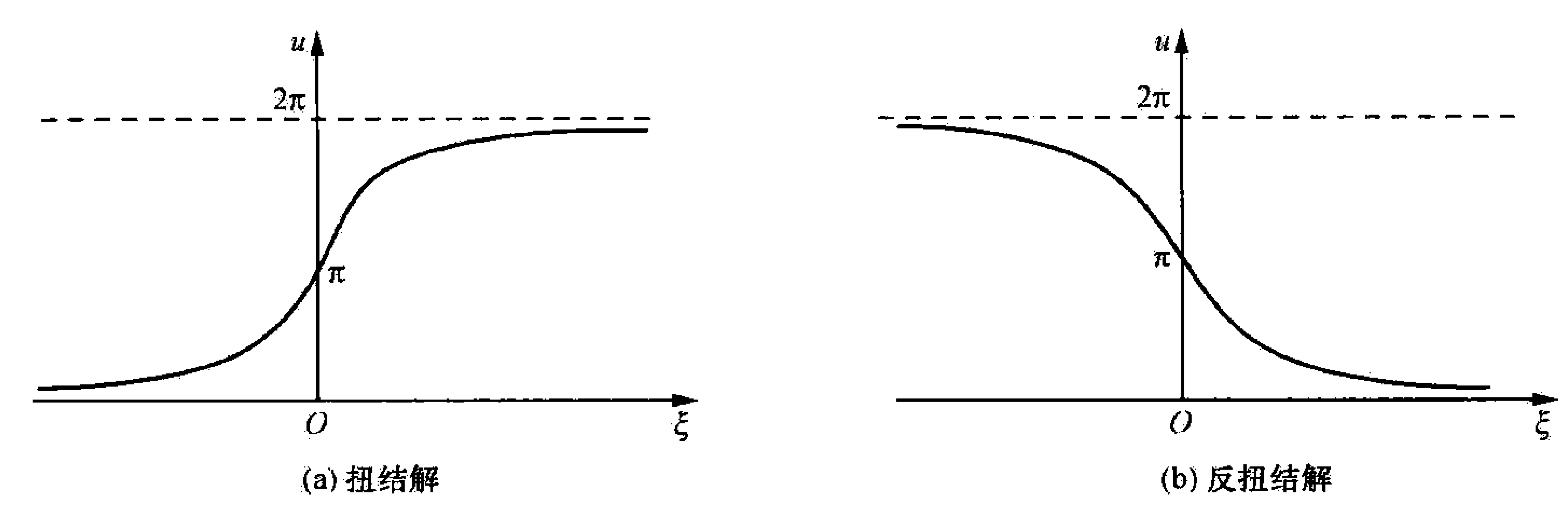


图 9.14 正弦-Gordon 方程的解

若把解(9.257)两边对 x 微商，则得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{4\exp\left\{\pm\frac{f_0}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\xi\right\}}{1+\exp\left\{\pm\frac{2f_0}{c_0^2-c^2}\xi\right\}}\left(\pm\frac{f_0}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right)=\pm\frac{2f_0}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\operatorname{sech}\frac{f_0}{\sqrt{c_0^2-c^2}}(x-ct),\tag{9.258}$$

这是孤立波解.

(4) $c^2-c_0^2>0$，但 $A=2f_0^2$，这也是一种极限情况. 因此时 $m\to1$，

$$\operatorname{sn}\frac{f_0}{\sqrt{c^2-c_0^2}}\xi\to\tanh\frac{f_0}{\sqrt{c^2-c_0^2}}\xi,$$

则(9.251)式化为

$$\sin\frac{u}{2}=\pm\tanh\frac{f_0}{\sqrt{c^2-c_0^2}}\xi.\tag{9.259}$$

注意由上式很容易得到 $\exp\left\{\pm\frac{f_0}{\sqrt{c^2-c_0^2}}\xi\right\}=\sqrt{\frac{1+\sin\frac{u}{2}}{1-\sin\frac{u}{2}}}$. 又因为

$$\sqrt{\frac{1+\sin\frac{u}{2}}{1-\sin\frac{u}{2}}}=\frac{1+\tan\frac{u}{4}}{1-\tan\frac{u}{4}}=\tan\left(\frac{u}{4}+\frac{\pi}{4}\right),$$

则

$$\tan\left(\frac{u}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\exp\left\{\pm\frac{f_0}{\sqrt{c^2-c_0^2}}\xi\right\}, \tag{9.260}$$

因而求得

$$u=-\pi+4\arctan\left(\exp\left\{\pm\frac{f_0}{\sqrt{c^2-c_0^2}}(x-ct)\right\}\right). \tag{9.261}$$

其中正号对应于 $\xi\to-\infty, u\to-\pi; \xi\to+\infty, u\to\pi$，这是正扭结解. 负号对应于 $\xi\to-\infty, u\to\pi; \xi\to+\infty, u\to-\pi$，这是反扭结解. 其图像相当于将图 9.14 的曲线向下位移 π.

同样，将(9.261)式对 x 微商得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\pm\frac{2f_0}{\sqrt{c^2-c_0^2}}\operatorname{sech}\frac{f_0}{\sqrt{c^2-c_0^2}}(x-ct), \tag{9.262}$$

这也是孤立波解.

§9.7 试探函数法(trial function method)，双曲函数展开法(hyperbolic function expansion method)

有些非线性方程的解析行波解很难求，例如 KdV-Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0. \tag{9.263}$$

首先我们来分析方程(9.263)的定性特征. 设

$$u=u(\xi),\quad \xi=x-ct. \tag{9.264}$$

将其代入方程(9.263)得

$$-c\frac{du}{d\xi}+u\frac{du}{d\xi}-\nu\frac{d^2u}{d\xi^2}+\beta\frac{d^3u}{d\xi^3}=0, \tag{9.265}$$

将上式对 ξ 积分一次得

$$-cu+\frac{1}{2}u^2-\nu\frac{du}{d\xi}+\beta\frac{d^2u}{d\xi^2}=A, \tag{9.266}$$

A 为积分常数. 上式等价于下列方程组

$$\begin{cases}\dfrac{du}{d\xi}=v\equiv F(u,v),\\[2mm]\dfrac{dv}{d\xi}=\mu v-\dfrac{1}{2\beta}(u^2-2cu-2A)\equiv G(u,v),\end{cases} \tag{9.267}$$

其中

$$\mu\equiv\nu/\beta. \tag{9.268}$$

因方程组(9.267)的第二个方程右端

$$u^2 - 2cu - 2A = 0 \tag{9.269}$$

的两个根为

$$\begin{cases} u_1 = c + \sqrt{c^2 + 2A}, \\ u_2 = c - \sqrt{c^2 + 2A}, \end{cases} \tag{9.270}$$

(9.270)式与(9.136)式相同.则我们设

$$c^2 + 2A > 0, \quad u_1 > u_2.$$

显然,依常微分方程的定性理论(参见§11.7)可知,方程组(9.267)有两个平衡点

$$E_1(u_1, 0) \quad 和 \quad E_2(u_2, 0).$$

因为由方程组(9.267)有

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{1}{\beta}(c - u), \quad \frac{\partial G}{\partial v} = \mu, \tag{9.271}$$

则在平衡点 $E_2(u_2, 0)$ 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ \frac{1}{\beta}(c - u_2) & \mu - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{9.272}$$

将其展开后得

$$\lambda^2 - \mu\lambda - \frac{1}{\beta}\sqrt{c^2 + 2A} = 0, \tag{9.273}$$

因而特征根为

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 + \frac{4}{\beta}\sqrt{c^2 + 2A}}\right). \tag{9.274}$$

这是两个不等实根且不同符号,平衡点 $E_2(u_2, 0)$ 是鞍点(saddle),其中正的 λ 值使得 $\xi \to +\infty$ 时,$u \to +\infty$,负的 λ 值使得 $\xi \to +\infty$ 时,$u \to 0$;$\xi \to -\infty$ 时正相反.

类似,求得平衡点 $E_1(u_1, 0)$ 的特征方程为

$$\lambda^2 - \mu\lambda + \frac{1}{\beta}\sqrt{c^2 + 2A} = 0, \tag{9.275}$$

因而特征根为

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \frac{4}{\beta}\sqrt{c^2 + 2A}}\right). \tag{9.276}$$

此时,特征根的性质依 μ 的相对大小有三种不同情况:

(1) 当 $\mu^2 \geqslant \frac{4}{\beta}\sqrt{c^2 + 2A}$ 时,λ 为两不等或相等实根,且同符号,即

$$\nu^2 \geqslant 4\beta\sqrt{c^2 + 2A},$$

此时相当于耗散大于频散的情况,平衡点 $E_1(u_1, 0)$ 是结点(node),它使得 $\xi \to -\infty$ 时,$u \to u_1$;$\xi \to +\infty$ 时,$u \to u_2$.

(2) 当 $\mu^2<\frac{4}{\beta}\sqrt{c^2+2A}$ 时,λ 为两共轭复根,即

$$0<\nu^2<4\beta\sqrt{c^2+2A},$$

此时相当于频散大于耗散的情况,平衡点 $E_1(u_1,0)$ 是焦点(focus),它在平衡点附近有振荡,但 $\xi\to-\infty$ 时,仍是 $u\to u_1$;$\xi\to+\infty$ 时,仍是 $u\to u_2$.

(3) 当 $\mu=0$ 时,λ 为两纯共轭虚根,即

$$\nu=0,$$

此时相当于无耗散的情况,平衡点 $E_1(u_1,0)$ 是中心(centre),在孤立波时,$\xi\to\pm\infty$ 时都有 $u\to u_2$.

图 9.15 描绘了上述三种情况的解的大致状况.不管是图 9.15 的哪一种情况,我们都可以设

$$u=u_1+u' \quad (u_1=c+\sqrt{c^2+2A}), \tag{9.277}$$

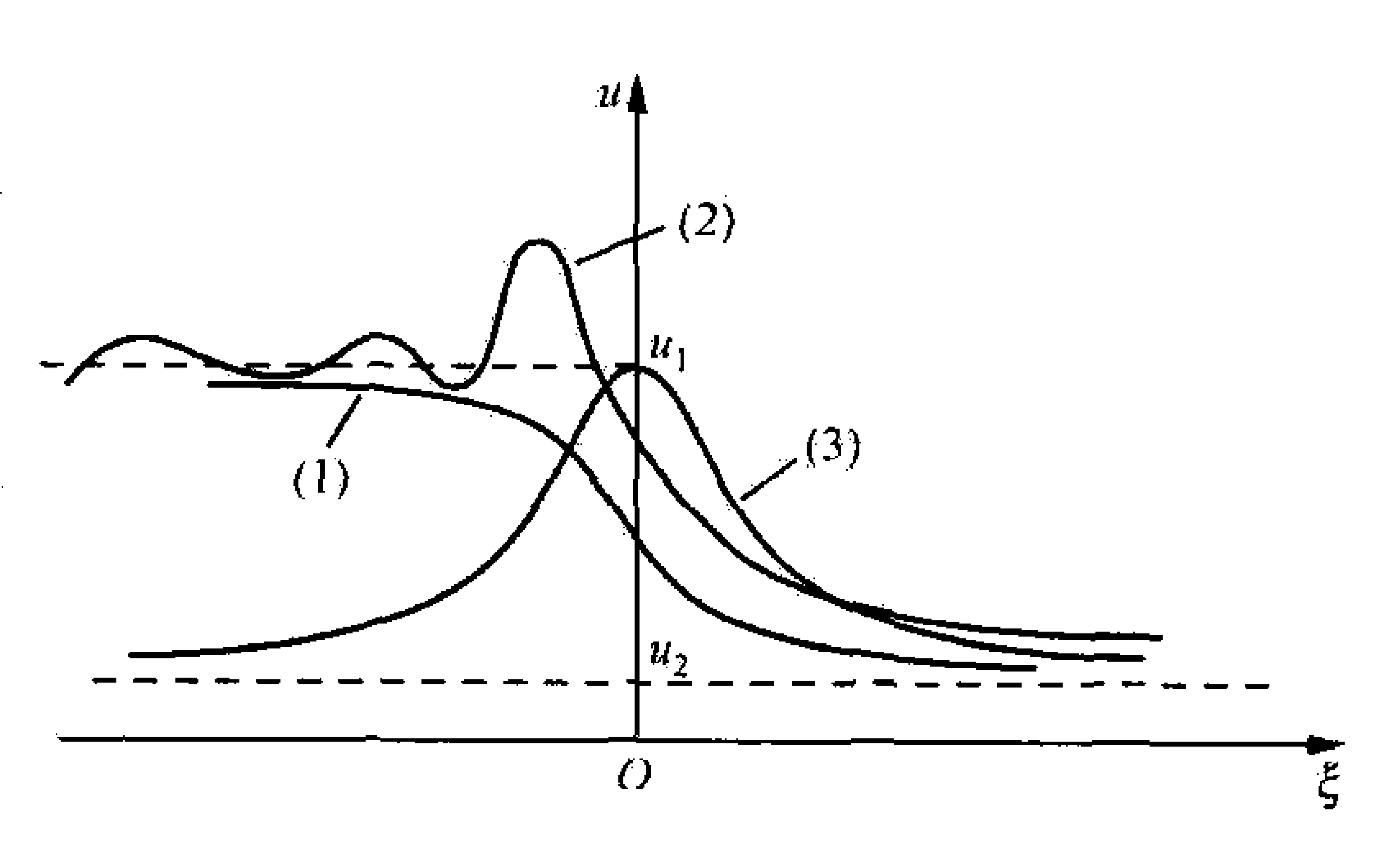


图 9.15 KdV-Burgers 方程的解

上式代入方程(9.266)得到

$$\frac{d^2u'}{d\xi^2}-\frac{\nu}{\beta}\frac{du'}{d\xi}+\frac{1}{2\beta}u'^2+\frac{\sqrt{c^2+2A}}{\beta}u'=0. \tag{9.278}$$

为了求解 KdV-Burgers 方程等类似的方程,我们可以应用下列两种方法.

一、试探函数法

对于图 9.15 中(1)的情况,我们设解为下列试探函数

$$u'=\frac{Be^{b\xi}}{(1+e^{a\xi})^n} \quad (n=2), \tag{9.279}$$

其中 B,a 和 b 为待定常数.(9.279)式代入方程(9.278),注意

$$\frac{du'}{d\xi}=B\cdot\frac{e^{b\xi}[b+2(b-a)e^{a\xi}+(b-2a)e^{2a\xi}]}{(1+e^{a\xi})^4},$$

$$\frac{d^2u'}{d\xi^2}=B\cdot\frac{e^{b\xi}[b^2-2(a^2-b^2-2ab)e^{a\xi}+(2a-b)^2e^{2a\xi}]}{(1+e^{a\xi})^4},$$

则得到

$$b^2+\frac{\sqrt{c^2+2A}}{\beta}-\frac{\nu}{\beta}b+\frac{B}{2\beta}e^{b\xi}+\left[\frac{2}{\beta}(\sqrt{c^2+2A}+a\nu-b\nu)-2(a^2-b^2-2ab)\right]e^{a\xi}$$
$$+\left[\frac{1}{\beta}(2a\nu-b\nu)+\sqrt{c^2+2A}+(2a-b)^2\right]e^{2a\xi}=0. \tag{9.280}$$

取 $b=0$,上式化为

$$\left(\frac{B}{2\beta}+\frac{\sqrt{c^2+2A}}{\beta}\right)-2\left(a^2-\frac{\nu}{\beta}a-\frac{\sqrt{c^2+2A}}{\beta}\right)e^{a\xi}$$
$$+2\left(2a^2+\frac{\nu}{\beta}a+\frac{\sqrt{c^2+2A}}{2\beta}\right)e^{2a\xi}=0, \tag{9.281}$$

由此得

$$a=-\frac{\nu}{5\beta},\quad \beta=-\frac{12\nu^2}{25\beta},\quad \sqrt{c^2+2A}=\frac{6\nu^2}{25\beta}. \tag{9.282}$$

代入(9.279)式求得

$$u'=-\frac{12\nu^2}{25\beta}\cdot\frac{1}{(1+e^{-\frac{\nu}{5\beta}\xi})^2}=-\frac{3\nu^2}{25\beta}\left(1+\tanh\frac{\nu}{10\beta}\xi\right)^2, \tag{9.283}$$

所以

$$u=u_1-\frac{3\nu^2}{25\beta}\left[1+\tanh\frac{\nu}{10\beta}(x-ct)\right]^2. \tag{9.284}$$

因由(9.282)的第三式 $\nu^2=\frac{25}{6}\beta\sqrt{c^2+2A}>4\beta\sqrt{c^2+2A}$，所以，由(9.284)式表征的就是 KdV-Burgers 方程(9.263)的冲击波解，即图 9.15 中的(1)的情况.

对于图 9.15 中(2)的情况，考虑在鞍点附近(即图 9.15 中(2)的右半部分)类似于孤立波解，则根据(9.190)式有

$$u=u_2+(u_1-u_2)\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{u_1-u_2}{12\beta}}\xi\quad(\xi>0), \tag{9.285}$$

其中 u_1 和 u_2 可由(9.170)式和孤立波条件($u_2=u_3$)得到，

$$u_2=c-\sqrt{c^2+2A},\quad u_1=3c-2u_2=c+2\sqrt{c^2+2A}. \tag{9.286}$$

这样，(9.285)式可改写为

$$u=u_2+3\sqrt{c^2+2A}\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{\sqrt{c^2+2A}}{4\beta}}\xi=u_2+\frac{3}{2}(u_1-u_2)\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{u_1-u_2}{8\beta}}\xi. \tag{9.287}$$

而图 9.15 中(2)的左半部分类似于衰减振动，则忽略方程(9.278)中的非线性项而化为下列线性阻尼振动方程：

$$\frac{d^2u'}{d\xi^2}-\frac{\nu}{\beta}\frac{du'}{d\xi}+\frac{\sqrt{c^2+2A}}{\beta}u'=0, \tag{9.288}$$

它的解为

$$u'=a_0e^{\frac{\nu}{2\beta}\xi}\cos k\xi\quad(\xi<0), \tag{9.289}$$

因而

$$u=u_1+a_0e^{\frac{\nu}{2\beta}\xi}\cos k\xi\quad(\xi<0). \tag{9.290}$$

在 $\xi=0$ 处连接解(9.285)和(9.290)有

$$u_2 + 3\sqrt{c^2+2A} = u_1 + a_0,$$

因而

$$a_0 = u_2 - u_1 + 3\sqrt{c^2+2A} = \sqrt{c^2+2A} = \frac{1}{2}(u_1 - u_2). \tag{9.291}$$

这样，我们最后求得 KdV-Burgers 方程(9.263)的另一个冲击波解，即用图 9.15 中(2)所描述的鞍-焦异宿轨道为

$$u = \begin{cases} u_1 + \dfrac{1}{2}(u_1 - u_2)\mathrm{e}^{\frac{\nu}{2\beta}\xi}\cos\sqrt{\dfrac{u_1-u_2}{2\beta} - \dfrac{\nu^2}{4\beta^2}}\xi, & \xi < 0, \\ u_2 + \dfrac{3}{2}(u_1 - u_2)\operatorname{sech}^2\sqrt{\dfrac{u_1-u_2}{8\beta}}\xi, & \xi > 0. \end{cases} \tag{9.292}$$

二、双曲函数展开法

对于 KdV-Burgers 方程(9.263)，我们用试探函数法，准确地求得了它的形如(9.284)式的冲击波解，即用图 9.15(1)所描述的鞍-结异宿轨道. 受此启发，我们设形如 KdV-Burgers 方程的非线性偏微分方程的行波解是

$$u = u(\xi), \quad \xi = k(x - ct), \tag{9.293}$$

其中 k 和 c 分别为波数和波速.

(9.293)式代入非线性偏微分方程后，就是 $u(\xi)$ 的非线性常微分方程. 为了解它，可以用双曲函数展开法，此方法是将 $u(\xi)$ 展为双曲函数的有限级数，例如将 $u(\xi)$ 展为双曲正切函数 $\tanh\xi$ 的下列有限级数：

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^{n} a_j\eta^j, \quad \eta \equiv \tanh\xi, \tag{9.294}$$

其中 $a_j(j=0,1,2,\cdots,n)$ 为展开系数. 上式的最高阶数为 n，写为

$$\mathrm{D}(u(\xi)) = n. \tag{9.295}$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = \sum_{j=1}^{n} ja_j\tanh^{j-1}\xi\operatorname{sech}^2\xi = \sum_{j=1}^{n} ja_j\tanh^{j-1}\xi(1-\tanh^2\xi), \tag{9.296}$$

则可以认为

$$\begin{cases} \mathrm{D}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right) = n+1, \quad \cdots, \quad \mathrm{D}\left(\dfrac{\mathrm{d}^q u}{\mathrm{d}\xi^q}\right) = n+q, \\ \mathrm{D}\left(u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right) = 2n+1, \quad \cdots, \quad \mathrm{D}\left(u^p\dfrac{\mathrm{d}^q u}{\mathrm{d}\xi^q}\right) = (p+1)n+q. \end{cases} \tag{9.297}$$

对于 KdV-Burgers 方程(9.263)，以(9.293)式代入后化为

$$-c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} - \nu k\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2} + \beta k^2\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\xi^3} = 0. \tag{9.298}$$

在(9.294)式中，我们选择 n 使得方程(9.298)中的非线性项和最高阶导数项相平

衡.但由(9.297)式知

$$\mathrm{D}\left(u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)=2n+1,\quad \mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\xi^3}\right)=n+3. \tag{9.299}$$

两者平衡有

$$n=2. \tag{9.300}$$

这里的 n 就是试探函数法(9.279)式中的 n. 由(9.300)式可设方程(9.298)的解为

$$u=a_0+a_1\eta+a_2\eta^2,\quad \eta\equiv\tanh\xi. \tag{9.301}$$

注意

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=(1-\eta^2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\eta}=(1-\eta^2)(a_1+2a_2\eta)=a_1+2a_2\eta-a_1\eta^2-2a_2\eta^3,$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}&=(1-\eta^2)\left[-2\eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\eta}+(1-\eta^2)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\eta^2}\right]\\&=(1-\eta^2)[-2\eta(a_1+2a_2\eta)+2a_2(1-\eta^2)]\\&=2a_2-2a_1\eta-8a_2\eta^2+2a_1\eta^3+6a_2\eta^4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\xi^3}&=-2\eta(1-\eta^2)\left[-2\eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\eta}+(1-\eta^2)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\eta^2}\right]\\&\quad+(1-\eta^2)^2\left[-2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\eta}-4\eta\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\eta^2}+(1-\eta^2)\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\eta^3}\right]\\&=-2\eta(1-\eta^2)[-2\eta(a_1+2a_2\eta)+2a_2(1-\eta^2)]\\&\quad+(1-\eta^2)^2[-2(a_1+2a_2\eta)-8a_2\eta]\\&=-2a_1-16a_2\eta+8a_1\eta^2+40a_2\eta^3-6a_1\eta^4-24a_2\eta^5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}&=(a_0+a_1\eta+a_2\eta^2)(a_1+2a_2\eta-a_1\eta^2-2a_2\eta^3)\\&=a_0a_1+(a_1^2+2a_0a_2)\eta+a_1(-a_0+3a_2)\eta^2+(-2a_0a_2-a_1^2+2a_2^2)\eta^3\\&\quad-3a_1a_2\eta^4-2a_2^2\eta^5,\end{aligned}$$

则(9.301)式代入方程(9.298),得到

$$\begin{aligned}&[(-c+a_0-2\beta k^2)a_1-2\nu ka_2]+[a_1(a_1+2\nu k)+2a_2(-c+a_0-8\beta k^2)]\eta\\&\quad+[-a_1(-c+a_0-8\beta k^2)+3a_1a_2+8\nu ka_2]\eta^2\\&\quad+[-a_1(a_1+2\nu k)+2a_2(c-a_0+a_2+20\beta k^2)]\eta^3\\&\quad-3(2\beta k^2a_1+a_1a_2+2\nu ka_2)\eta^4-2a_2(a_2+12\beta k^2)\eta^5=0.\end{aligned} \tag{9.302}$$

由此定得

$$\begin{aligned}&k=\frac{\nu}{10\beta},\quad a_2=-12\beta k^2=-\frac{3\nu^2}{25\beta},\quad a_1=-\frac{12}{5}\nu k=-\frac{6\nu^2}{25\beta},\\&a_0=c+\frac{\nu^2}{25\beta}+8\beta k^2=c+\frac{3\nu^2}{25\beta}.\end{aligned} \tag{9.303}$$

上式代入到(9.301)式,最后求得

$$u = c + \frac{3\nu^2}{25\beta} - \frac{6\nu^2}{25\beta}\tanh k(x-ct) - \frac{3\nu^2}{25\beta}\tanh^2 k(x-ct)$$
$$= c + \frac{6\nu^2}{25\beta} - \frac{3\nu^2}{25\beta}[1+\tanh k(x-ct)]^2, \tag{9.304}$$

比较(9.284)式和(9.304)式，若取 $A=0, u_1=2c, c=\frac{6\nu^2}{25\beta}$，则两者完全一致.

最后我们要指出的是：对于非线性偏微分方程，试探函数法的双曲函数展开法只能求它的冲击波解和孤立波解的情形.

§9.8 Jacobi 椭圆函数展开法(Jacobi elliptic function expansion method)

因为不少非线性偏微分方程存在用 Jacobi 椭圆函数表征的准确的周期行波解，加上受双曲函数展开法的启示，作者 2001 年提出了 Jacobi 椭圆函数展开法.

考虑非线性偏微分方程

$$N\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \cdots\right) = 0, \tag{9.305}$$

我们寻求它的行波解

$$u = u(\xi), \quad \xi = k(x-ct), \tag{9.306}$$

其中 k 和 c 分别为波数和波速.

(9.306)代入方程(9.305)就得到 $u(\xi)$ 的非线性常微分方程，用 Jacobi 椭圆函数展开法求解它，是将 $u(\xi)$ 展为 Jacobi 椭圆函数的有限级数. 例如将 $u(\xi)$ 展为 Jacobi 椭圆正弦函数 $\mathrm{sn}\xi$ 的下列有限级数：

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^{n} a_j \mathrm{sn}^j \xi, \tag{9.307}$$

其中 $a_j (j=0,1,2,\cdots,n)$ 为展开系数，上式 $\mathrm{sn}\xi$ 的最高阶数为 n，即

$$\mathrm{D}(u(\xi)) = n. \tag{9.308}$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = \sum_{j=1}^{n} j a_j \mathrm{sn}^{j-1}\xi \mathrm{cn}\xi \mathrm{dn}\xi, \tag{9.309}$$

其中 $\mathrm{cn}\xi$ 和 $\mathrm{dn}\xi$ 分别为 Jacobi 椭圆余弦函数和第三种 Jacobi 椭圆函数，且

$$\mathrm{cn}^2\xi = 1 - \mathrm{sn}^2\xi, \quad \mathrm{dn}^2\xi = 1 - m^2\mathrm{sn}^2\xi, \tag{9.310}$$

这里 $m(0<m<1)$ 为模数. 由(9.308)式和(9.309)式可以认为

$$\begin{cases} \mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right) = n+1, \quad \cdots, \quad \mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{d}^q u}{\mathrm{d}\xi^q}\right) = n+q, \\ \mathrm{D}\left(u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right) = 2n+1, \quad \cdots, \quad \mathrm{D}\left(u^p\frac{\mathrm{d}^q u}{\mathrm{d}\xi^q}\right) = (p+1)n+q. \end{cases} \tag{9.311}$$

在(9.307)式中，我们选择 n 使得非线性常微分方程中的非线性项和最高阶导数项相平衡.

应该指出的是，因 $m\to 1$ 时，$\mathrm{sn}\xi\to\tanh\xi$，则(9.307)式就退化为

$$u(\xi)=\sum_{j=0}^{n}a_j\tanh^j\xi. \tag{9.312}$$

因此，Jacobi 椭圆正弦函数展开法就退化为上节叙述的双曲函数展开法.

下面举例说明.

一、KdV 方程

KdV 方程的最简形式为(9.154)式，即

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0. \tag{9.313}$$

将(9.306)式代入方程(9.313)，得

$$-c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+\beta k^2\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\xi^3}=0. \tag{9.314}$$

但由(9.311)式知

$$\mathrm{D}\left(u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)=2n+1,\quad \mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\xi^3}\right)=n+3, \tag{9.315}$$

两者平衡有

$$n=2. \tag{9.316}$$

因而，KdV 方程(9.313)有下列形式的周期解：

$$u=a_0+a_1\mathrm{sn}\xi+a_2\mathrm{sn}^2\xi, \tag{9.317}$$

注意

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=(a_1+2a_2\mathrm{sn}\xi)\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi,$$

$$u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=[a_0a_1+(a_1^2+2a_0a_2)\mathrm{sn}\xi+3a_1a_2\mathrm{sn}^2\xi+2a_2^2\mathrm{sn}^3\xi]\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}=2a_2-(1+m^2)a_1\mathrm{sn}\xi-4(1+m^2)a_2\mathrm{sn}^2\xi+2m^2a_1\mathrm{sn}^3\xi+6m^2a_2\mathrm{sn}^4\xi,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\xi^3}=[-(1+m^2)a_1-8(1+m^2)a_2\mathrm{sn}\xi+6m^2a_1\mathrm{sn}^2\xi+24m^2a_2\mathrm{sn}^3\xi]\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi,$$

则(9.317)式代入方程(9.314)，得到

$$\{[-c+a_0-(1+m^2)\beta k^2]a_1+[a_1^2+2(-c+a_0-4(1+m^2)\beta k^2)a_2]\mathrm{sn}\xi$$
$$+3a_1(a_2+2m^2\beta k^2)\mathrm{sn}^2\xi+2a_2(a_2+12m^2\beta k^2)\mathrm{sn}^3\xi\}\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi=0. \tag{9.318}$$

由此定得

$$a_1=0,\quad a_2=-12m^2\beta k^2,\quad a_0=c+4(1+m^2)\beta k^2. \tag{9.319}$$

上式代入到(9.317)式，求得 KdV 方程(9.313)的周期行波解为

$$\begin{aligned} u &= c + 4(1+m^2)\beta k^2 - 12m^2\beta k^2 \mathrm{sn}^2\xi \\ &= c + 4(1-2m^2)\beta k^2 + 12m^2\beta k^2 \mathrm{cn}^2\xi \\ &= c - 4(2-m^2)\beta k^2 + 12\beta^2 k^2 \mathrm{dn}^2\xi. \end{aligned} \tag{9.320}$$

乍看起来，这里的解(9.320)式好像与 KdV 方程的椭圆余弦波解(9.184)式不一样，但在(9.184)式中，$k=\sqrt{\frac{u_1-u_3}{12\beta}}$，因而

$$u_1 - u_3 = 12\beta k^2. \tag{9.321}$$

再由(9.180)式，有

$$u_1 - u_2 = 12m^2\beta k^2. \tag{9.322}$$

(9.321)式与(9.322)式相加有

$$2u_1 - (u_2 + u_3) = 12(1+m^2)\beta k^2. \tag{9.323}$$

但由(9.170)的第一式，$u_2+u_3=3c-u_1$，代入上式求得

$$u_1 = c + 4(1+m^2)\beta k^2. \tag{9.324}$$

上式代入(9.322)式和(9.321)式求得

$$u_2 = c + 4(1-2m^2)\beta k^2, \quad u_3 = c - 4(2-m^2)\beta k^2. \tag{9.325}$$

(9.324)式和(9.325)式代入到(9.184)式就得到(9.320)式. 因此，(9.320)式与(9.184)式完全一样.

二、mKdV 方程

这个方程的最简形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{9.326}$$

利用 Jacobi 椭圆正弦函数展开法，我们寻求形式为(9.306)式的行波解. 将(9.306)式代入方程(9.326)，有

$$-c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + \alpha u^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + \beta k^2 \frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}\xi^3} = 0. \tag{9.327}$$

但由(9.311)式知

$$\mathrm{D}\left(u^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right) = 3n+1, \quad \mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}\xi^3}\right) = n+3, \tag{9.328}$$

两者平衡有

$$n = 1. \tag{9.329}$$

因而，mKdV 方程(9.326)有下列形式的周期解：

$$u = a_0 + a_1 \mathrm{sn}\xi, \tag{9.330}$$

注意

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=a_1\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi,\quad u^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=(a_0^2a_1+2a_0a_1^2\mathrm{sn}\xi+a_1^3\mathrm{sn}^2\xi)\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}=-(1-m^2)a_1\mathrm{sn}\xi+2m^2a_1\mathrm{sn}^3\xi,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\xi^3}=[-(1+m^2)a_1+6m^2a_1\mathrm{sn}^2\xi]\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi,$$

则(9.330)式代入方程(9.327)，得到

$$\{[-c+\alpha a_0^2-(1+m^2)\beta k^2]a_1+2\alpha a_0a_1^2\mathrm{sn}\xi+(\alpha a_1^2+6m^2\beta k^2)a_1\mathrm{sn}^2\xi\}\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi=0,\tag{9.331}$$

由此定得

$$a_0=0,\quad a_1=\pm\sqrt{-\frac{6\beta}{\alpha}}mk,\quad c=-(1+m^2)\beta k^2.\tag{9.332}$$

上式代入到(9.330)式，求得 mKdV 方程(9.326)的 Jacobi 椭圆正弦函数形式的周期解为

$$u=\pm\sqrt{-\frac{6\beta}{\alpha}}mk\,\mathrm{sn}k(x-ct),\quad c=-(1+m^2)\beta k^2.\tag{9.333}$$

若 u 为实函数，则要求 α 与 β 异号；同样，k 为实数要求 β 与 c 异号.

当 $m\to1$ 时，(9.333)式退化为

$$u=\pm\sqrt{-\frac{6\beta}{\alpha}}k\tanh k(x-ct),\quad c=-2\beta k^2,\tag{9.334}$$

这就是 mKdV 方程(9.240)的冲击波解.

类似于(9.330)式，我们设

$$u=a_0+a_1\mathrm{cn}\xi,\quad \xi=k(x-ct)\tag{9.335}$$

和

$$u=a_0+a_1\mathrm{dn}\xi,\quad \xi=k(x-ct),\tag{9.336}$$

则可分别求得 mKdV 方程(9.326)用 Jacobi 余弦函数和第三种 Jacobi 椭圆函数表征的周期解分别为

$$u=\pm\sqrt{\frac{6\beta}{\alpha}}mk\,\mathrm{cn}k(x-ct),\quad c=(2m^2-1)\beta k^2\tag{9.337}$$

和

$$u=\pm\sqrt{\frac{6\beta}{\alpha}}k\,\mathrm{dn}k(x-ct),\quad c=(2-m^2)\beta k^2.\tag{9.338}$$

若 u 为实函数，上两式要求 α 与 β 同号；k 为实数要求 $\frac{c}{(2m^2-1)\beta}>0$，$\frac{c}{(2-m^2)\beta}>0$.

当 $m\to1$ 时，因 $\mathrm{cn}\xi\to\mathrm{sech}\xi$，$\mathrm{dn}\xi\to\mathrm{sech}\xi$，则(9.337)式和(9.338)式都退化为

$$u=\pm\sqrt{\frac{6\beta}{\alpha}}k\,\mathrm{sech}k(x-ct),\quad c=\beta k^2,\tag{9.339}$$

这就是 mKdV 方程(9.326)的孤立波解.

最后要指出的是,若把方程(9.327)两边对 ξ 积分一次,取积分常数为零,得

$$-cu+\frac{\alpha}{3}u^3+\beta k^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}=0.\tag{9.340}$$

此时,用(9.330)式、(9.335)式和(9.336)式分别代入到方程(9.340),同样可以得到(9.333)式、(9.337)式和(9.338)式,而且因为(9.340)式为二阶非线性常微分方程,根据 Jacobi 椭圆函数的性质,$y=a\mathrm{sn}kx$,$a\mathrm{cn}kx$ 和 $a\,\mathrm{dn}kx$ 分别满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-(1+m^2)k^2y+\dfrac{2m^2k^2}{a^2}y^3 & (y=a\mathrm{sn}kx),\\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=(2m^2-1)k^2y-\dfrac{2m^2k^2}{a^2}y^3 & (y=a\mathrm{cn}kx),\\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=(2-m^2)k^2y-\dfrac{2k^2}{a^2}y^3 & (y=a\mathrm{dn}kx),\end{cases}\tag{9.341}$$

其中 m 为模数.将方程(9.340)与上式比较,我们同样可以获得 mKdV 方程的三种周期行波解.

三、Boussinesq 方程

Boussinesq 方程的标准形式(见(9.98)式)是

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial^4u}{\partial x^4}-\beta\frac{\partial^2u^2}{\partial x^2}=0.\tag{9.342}$$

把(9.306)式代入,求得

$$(c^2-c_0^2)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}-\alpha k^2\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}\xi^4}-\beta\frac{\mathrm{d}^2u^2}{\mathrm{d}\xi^2}=0.\tag{9.343}$$

由(9.311)式知

$$\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{d}^2u^2}{\mathrm{d}\xi^2}\right)=2n+2,\quad \mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}\xi^4}\right)=n+4.\tag{9.344}$$

两者平衡有

$$n=2,\tag{9.345}$$

因而,可设方程(9.343)的解为

$$u=a_0+a_1\mathrm{sn}\xi+a_2\mathrm{sn}^2\xi.\tag{9.346}$$

注意

$$\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}\xi}=[2a_0a_1+(2a_1^2+4a_0a_2)\mathrm{sn}\xi+6a_1a_2\mathrm{sn}^2\xi+4a_2^2\mathrm{sn}^3\xi]\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u^2}{\mathrm{d}\xi^2}=2(a_1^2+2a_0a_2)-2[(1+m^2)a_0-6a_2]a_1\mathrm{sn}\xi$$

$$-4[(1+m^2)a_1^2+2(1+m^2)a_0a_2-3a_2^2]\mathrm{sn}^2\xi$$
$$+2[2m^2a_0-9(1+m^2)a_2]a_1\mathrm{sn}^3\xi$$
$$+2[3m^2a_1^2+6m^2a_0a_2-8(1+m^2)a_2^2]\mathrm{sn}^4\xi$$
$$+24m^2a_1a_2\mathrm{sn}^5\xi+20m^2a_2^2\mathrm{sn}^6\xi,$$

$$\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}\xi^4}=-8(1+m^2)a_2+[(1+m^2)+12m^2]a_1\mathrm{sn}\xi+8[2(1+m^2)^2+9m^2]a_2\mathrm{sn}^2\xi$$
$$-20m^2(1+m^2)a_1\mathrm{sn}^3\xi-120m^2(1+m^2)a_2\mathrm{sn}^4\xi$$
$$+24m^4a_1\mathrm{sn}^5\xi+120m^4a_2\mathrm{sn}^6\xi,$$

则(9.346)式代入方程(9.343),得到

$$2[(c^2-c_0^2)a_2+4(1+m^2)\alpha k^2a_2-\beta(a_1^2+2a_0a_2)]-\{(1+m^2)(c^2-c_0^2)$$
$$+\alpha k^2[(1+m^2)^2+12m^2]+2\beta[(1+m^2)a_0-6a_2]\}a_1\mathrm{sn}\xi$$
$$-2\{2(1+m^2)(c^2-c_0^2)a_2+4\alpha k^2[2(1+m^2)^2+9m^2]a_2$$
$$-2\beta[(1+m^2)a_1^2+2(1+m^2)a_0a_2-3a_2^2]\}a_2\mathrm{sn}^2\xi$$
$$+2\{m^2(c^2-c_0^2)+10m^2(1+m^2)\alpha k^2-\beta[2m^2a_0-9(1+m^2)a_2]\}a_1\mathrm{sn}^3\xi$$
$$+2\{3m^2(c^2-c_0^2)a_2+60m^2(1+m^2)\alpha k^2a_2$$
$$-\beta[3m^2a_1^2+6m^2a_0a_2-8(1+m^2)a_2]\}\mathrm{sn}^4\xi$$
$$-24m^2(m^2\alpha k^2+\beta a_2)a_1\mathrm{sn}^5\xi-20m^2(6m^2\alpha k^2+\beta a_2)a_2\mathrm{sn}^6\xi=0. \quad (9.347)$$

由此定得

$$a_1=0,\quad a_2=-\frac{6\alpha}{\beta}m^2k^2,\quad a_0=\frac{c^2-c_0^2}{2\beta}+\frac{2\alpha}{\beta}(1+m^2)k^2. \quad (9.348)$$

上式代入到(9.346)式,最后求得

$$u=\frac{c^2-c_0^2}{2\beta}+\frac{2\alpha}{\beta}(1+m^2)k^2-\frac{6\alpha}{\beta}m^2k^2\mathrm{sn}^2k(x-ct)$$
$$=\frac{c^2-c_0^2}{2\beta}-\frac{2\alpha}{\beta}(2m^2-1)k^2+\frac{6\alpha}{\beta}m^2k^2\mathrm{cn}^2k(x-ct). \quad (9.349)$$

这就是 Boussinesq 方程(9.342)的准确周期行波解.

当 $m\to1$ 时,(9.349)式退化为

$$u=\frac{c^2-c_0^2}{2\beta}+\frac{4\alpha}{\beta}k^2-\frac{6\alpha}{\beta}k^2\tanh^2k(x-ct)$$
$$=\frac{c^2-c_0^2}{2\beta}-\frac{2\alpha}{\beta}k^2+\frac{6\alpha}{\beta}\mathrm{sech}^2k(x-ct), \quad (9.350)$$

这就是 Boussinesq 方程(9.342)的孤立波解.

四、Gardner 方程(混合的 KdV-mKdV 方程)

Gardner 方程,又称为混合的 KdV-mKdV 方程,其一般形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta u^2\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0. \tag{9.351}$$

以(9.306)式代入,得

$$-c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+\alpha u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+\beta u^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+\gamma k^2\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}\xi^3}=0. \tag{9.352}$$

类似于 mKdV 方程,应用 Jacobi 椭圆函数展开法很容易求得 Gardner 方程的三类周期行波解分别为

$$u=-\frac{\alpha}{2\beta}\pm\sqrt{-\frac{6\gamma}{\beta}}mk\,\mathrm{sn}k(x-ct),\quad c=2(1+m^2)\gamma k^2=-\alpha^2/6\beta, \tag{9.353}$$

$$u=-\frac{\alpha}{2\beta}\pm\sqrt{\frac{6\gamma}{\beta}}mk\,\mathrm{cn}k(x-ct),\quad c=-2(2m^2-1)\gamma k^2=-\alpha^2/6\beta \tag{9.354}$$

和

$$u=-\frac{\alpha}{2\beta}\pm\sqrt{\frac{6\gamma}{\beta}}k\,\mathrm{dn}k(x-ct),\quad c=-2(2-m^2)\gamma k^2=-\alpha^2/6\beta, \tag{9.355}$$

其中 m 为模数.

$m\to 1$ 时,有

$$u=-\frac{\alpha}{2\beta}\pm\sqrt{-\frac{6\gamma}{\beta}}k\tanh k(x-ct)=-\frac{\alpha}{2\beta}\left[1\pm\tanh\sqrt{-\frac{\alpha^2}{24\beta\gamma}}\left(x+\frac{\alpha^2}{6\beta}t\right)\right],$$
$$c=4rk^2=-\alpha^2/6\beta \tag{9.356}$$

和

$$u=-\frac{\alpha}{2\beta}\pm\sqrt{\frac{6\gamma}{\beta}}k\,\mathrm{sech}k(x-ct)=-\frac{\alpha}{2\beta}\left[1\mp\mathrm{sech}\sqrt{\frac{\alpha^2}{12\beta\gamma}}\left(x+\frac{\alpha^2}{6\beta}t\right)\right],$$
$$c=-2\gamma k^2=-\alpha^2/6\beta. \tag{9.357}$$

(9.356)式和(9.357)式分别是 Gardner 方程的冲击波解和孤立波解.

§ 9.9 非线性 Schrödinger 方程的包络周期波(envelope periodic waves)与包络孤立波(envelope solitary waves)

非线性 Schrödinger 方程的一般形式是

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta|u|^2u=0\quad(\beta>0), \tag{9.358}$$

非常有意思的是，非线性 Schrödinger 方程(9.358)可以应用一般的正交模方法求出它的最简化的频散关系，即若令

$$u = Ae^{i(kx-\omega t)}, \tag{9.359}$$

代入方程(9.358)，注意$|u|^2=|A|^2=a^2$（A 为复振幅，$a=|A|$为实振幅），则求得频散关系为

$$\omega = \alpha k^2 - \beta a^2. \tag{9.360}$$

它明显地说明，非线性波的圆频率 ω 不仅与波数 k 有关，而且与振幅 a 有关. 即非线性波的频散关系一般可写为

$$\omega = \Omega(k, a). \tag{9.361}$$

由(9.360)式求得相速度 c_p 和群速度 c_g 分别是

$$c_p = \alpha k - \frac{\beta a^2}{k}, \quad c_g = 2\alpha k. \tag{9.362}$$

$c_p \neq c_g$ 充分说明了非线性 Schrödinger 方程表征频散波，而且因为

$$\frac{dc_g}{dk} = 2\alpha, \tag{9.363}$$

所以，可以认为非线性 Schrödinger 方程表征的是强频散波.

通常，设非线性 Schrödinger 方程(9.358)的解为下列波包形式.

$$u = \phi(\xi)e^{i(kx-\omega t)}, \quad \xi = x - c_g t, \tag{9.364}$$

其中 $\phi(\xi)$是 ξ 的实函数. 显然，对非线性 Schrödinger 方程，波包形式解(9.364)比单波形式解(9.359)更合适.

(9.364)式代入方程(9.358)得到

$$\alpha \frac{d^2\phi}{d\xi^2} + i(2k\alpha - c_g)\frac{d\phi}{d\xi} + (\omega - \alpha k^2)\phi + \beta\phi^3 = 0, \tag{9.365}$$

因 $\phi(\xi)$是实函数，故要求$\frac{d\phi}{d\xi}$前的复系数为零，而这恰好是(9.362)的第二式. 又设

$$\omega - \alpha k^2 = -\gamma \quad (\gamma > 0), \tag{9.366}$$

之所以选择 $\omega - \alpha k^2 < 0$，还可以从(9.360)式得到说明.

这样，方程(9.365)就化为

$$\alpha \frac{d^2\phi}{d\xi^2} - \gamma\phi + \beta\phi^3 = 0. \tag{9.367}$$

此方程的形式与方程(9.340)相同. 那么，利用 Jacobi 椭圆函数展开法或(9.341)式，求得 ϕ 的三类周期解分别是

$$\phi = \pm\sqrt{-\frac{2\alpha}{\beta}}mp\,\mathrm{sn}\,p(x - c_g t), \quad p^2 = -\frac{\gamma}{\alpha(1+m^2)}, \quad c_g = 2\alpha k \quad (\alpha < 0, \beta > 0), \tag{9.368}$$

$$\phi=\pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}mp\,\mathrm{cn}p(x-c_gt),\quad p^2=\frac{\gamma}{\alpha(2m^2-1)},$$

$$c_g=2\alpha k\quad(\alpha>0,\beta>0,m<1/\sqrt{2}),\tag{9.369}$$

$$\phi=\pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}p\,\mathrm{dn}(x-c_gt),\quad p^2=\frac{\gamma}{\alpha(2-m^2)},\quad c_g=2\alpha k\quad(\alpha>0,\beta>0),\tag{9.370}$$

上面三式中 m 是模数，p 是振幅周期解中的波数. 由上面三式即可求得非线性 Schrödinger 方程(9.358)的三类包络周期波解是

$$u=\left\{\pm\sqrt{-\frac{2\alpha}{\beta}}mp\,\mathrm{sn}p(x-c_gt)\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\quad p^2=-\frac{\gamma}{\alpha(1+m^2)},\quad c_g=2\alpha k,\tag{9.371}$$

$$u=\left\{\pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}mp\,\mathrm{cn}p(x-c_gt)\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\quad p^2=\frac{\gamma}{\alpha(2m^2-1)},\quad c_g=2\alpha k,\tag{9.372}$$

$$u=\left\{\pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}p\,\mathrm{dn}p(x-c_gt)\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\quad p^2=\frac{\gamma}{\alpha(2-m^2)},\quad c_g=2\alpha k.\tag{9.373}$$

它们的振幅分别为

$$a=\sqrt{\frac{2m^2\gamma}{(1+m^2)\beta}},\quad a=\sqrt{\frac{2m^2\gamma}{(2m^2-1)\beta}},\quad a=\sqrt{\frac{2\gamma}{(2-m^2)\beta}}.\tag{9.374}$$

由此定出 γ 分别为

$$\gamma=\frac{1+m^2}{m^2}\beta a^2,\quad \gamma=\frac{2m^2-1}{2m^2}\beta a^2,\quad \gamma=\frac{2-m^2}{2}\beta a^2.\tag{9.375}$$

上式代入到(9.366)式可以得到比(9.360)式更合理的频散关系.

由(9.371)式、(9.372)式和(9.373)式，令 $m=1$ 可以求得非线性 Schrödinger 方程(9.358)的两类包络孤立波解为

$$u=\left\{\pm\sqrt{-\frac{2\alpha}{\beta}}p\tanh p(x-c_gt)\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}=\left\{\pm\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}}\tanh\sqrt{-\frac{\gamma}{2\alpha}}(x-c_gt)\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\tag{9.376}$$

$$u=\left\{\pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}p\,\mathrm{sech}\,p(x-c_gt)\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}=\left\{\pm\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}}\mathrm{sech}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}(x-c_gt)\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}.\tag{9.377}$$

它们分别称为暗(dark)孤子($\alpha<0,\beta>0$)和亮(bright)孤子($\alpha>0,\beta>0$).

§9.10 非线性波的波参数

前面，我们已经引进了非线性波，并对许多非线性方程求得了 $u(\xi)=u(x-ct)$

形式的行波解.下面我们根据这些解的研究确定非线性波的参数.就以非线性的 Klein-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V'(u) = 0 \tag{9.378}$$

为例来说明.

求方程(9.378)的行波解,令

$$u = u(\xi), \quad \xi = x - ct. \tag{9.379}$$

代入方程(9.378)求得

$$\frac{1}{2}(c^2 - c_0^2)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + V(u) = A, \tag{9.380}$$

其中 A 是与振幅有关的常数.由上式求得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = \sqrt{\frac{2}{c^2 - c_0^2}(A - V(u))}. \tag{9.381}$$

假设

$$c^2 > c_0^2, \quad A > V(u),$$

则(9.381)式积分求得

$$\xi = \sqrt{\frac{c^2 - c_0^2}{2}} \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{A - V(u)}}. \tag{9.382}$$

设 u_1 和 u_2($u_2 > u_1$)是

$$A - V(u) = 0$$

的两个实根,则 u 在 u_1 与 u_2 之间是 ξ 的周期函数,即 u 表征非线性波动.图 9.16 是在相平面上的周期轨道.

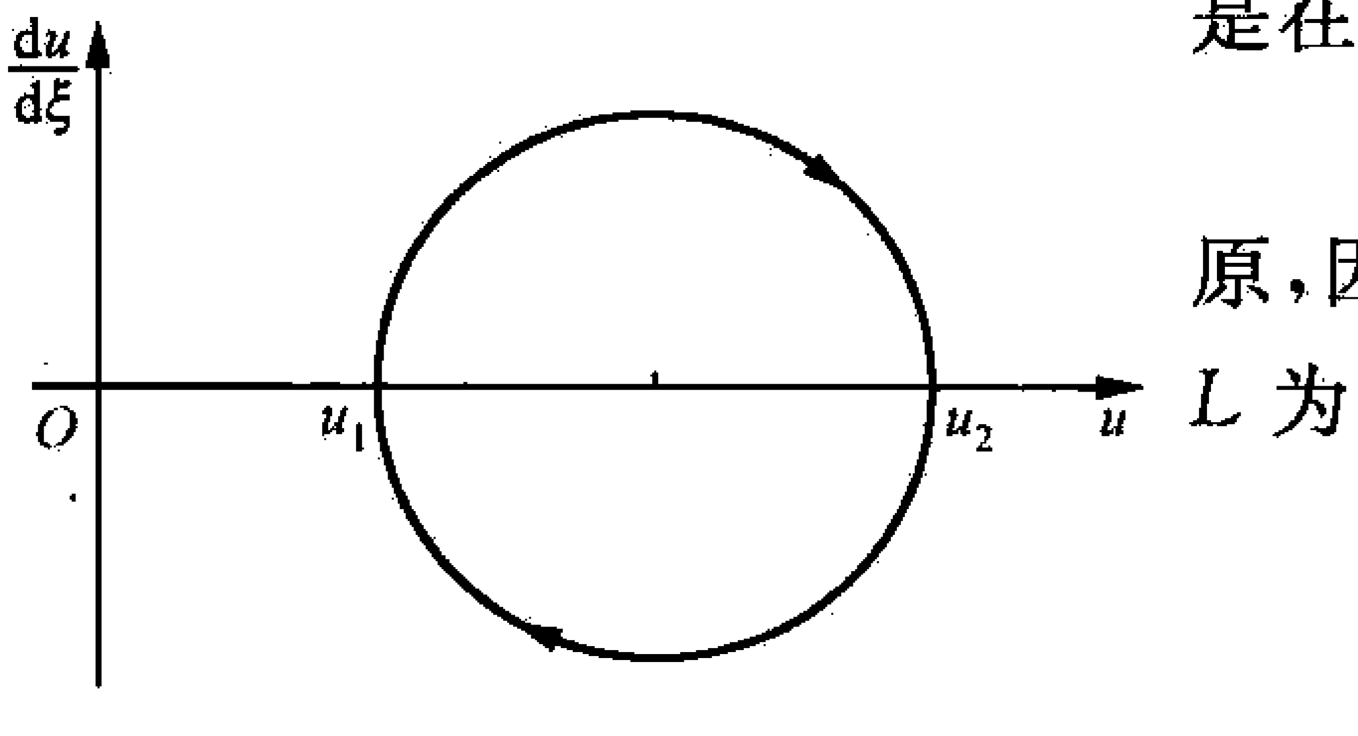


图 9.16　周期轨道

因在图 9.16 的闭合轨道上运行一周,u 值还原,因而,根据(9.382)式可定义非线性波波长 L 为

$$L(c,A) = \sqrt{\frac{c^2 - c_0^2}{2}} \oint \frac{1}{\sqrt{A - V(u)}} \mathrm{d}u$$
$$= 2\sqrt{\frac{c^2 - c_0^2}{2}} \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{\sqrt{A - V(u)}} \mathrm{d}u. \tag{9.383}$$

相应,波数 k,圆频率 ω 和周期 T 分别定义为

$$k(c,A) = \frac{2\pi}{L(c,A)}, \tag{9.384}$$

$$\omega(c,A) = ck(c,A), \tag{9.385}$$

$$T(c,A)=\frac{2\pi}{\omega(c,A)},\tag{9.386}$$

这样定义对于线性波也合适.例如,线性惯性-重力外波的 Klein-Gordon 方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f_0^2 u=0,\tag{9.387}$$

这是普遍的 Klein-Gordon 方程(9.378)中的

$$V(u)=\frac{1}{2}f_0^2u^2\tag{9.388}$$

的特例,这样,方程(9.381)化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\sqrt{\frac{2}{c^2-c_0^2}\left(A-\frac{1}{2}f_0^2u^2\right)},$$

而(9.382)式化为

$$\xi=\sqrt{\frac{c^2-c_0^2}{2}}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{A-\frac{1}{2}f_0^2u^2}}=\frac{\sqrt{c^2-c_0^2}}{f}\arccos\left(\frac{f_0u}{\sqrt{2A}}\right).$$

由此求得方程(9.387)的解为

$$u(x,t)=\frac{\sqrt{2A}}{f_0}\cos\frac{f_0}{\sqrt{c^2-c_0^2}}\xi,\tag{9.389}$$

其波长为

$$L=\sqrt{\frac{c^2-c_0^2}{2}}\oint\frac{1}{\sqrt{A-\frac{1}{2}f_0^2u^2}}\mathrm{d}u=\frac{2\pi\sqrt{c^2-c_0^2}}{f_0}.\tag{9.390}$$

相应波数和圆频率分别是

$$k=\frac{2\pi}{L}=\frac{f_0}{\sqrt{c^2-c_0^2}},\tag{9.391}$$

$$\omega=kc=\frac{f_0c}{\sqrt{c^2-c_0^2}}=\pm\sqrt{k^2c_0^2+f_0^2},\tag{9.392}$$

这些都与用正交模方法得到的结果一致.

对于一般的非线性波,其方程常可化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=F(u;c,A_i),\tag{9.393}$$

其中

$$u=u(\xi;c,A_i),\quad \xi=x-ct.\tag{9.394}$$

$A_i(i=1,2,\cdots)$是积分常数,其个数决定于方程关于空间导数的阶数.

设方程(9.393)有稳定的周期解,此解在连续的两个 F 的零点 $u_1(c,A_i)$,

$u_2(c,A_i)(u_2>u_1)$之间振荡. 在(u_1,u_2)上,$F>0$且是有界的,即

$$\begin{cases}F(u_1;c,A_i)=0, \quad F(u_2;c,A_i)=0,\\ F(u;c,A_i)>0 \text{ 有界}, \quad u_1\leqslant u\leqslant u_2.\end{cases} \tag{9.395}$$

设ξ_1,ξ_2满足

$$\begin{cases}u_1(c,A_i)=u(\xi_1;c,A_i),\\ u_2(c,A_i)=u(\xi_2;c,A_i),\end{cases} \tag{9.396}$$

则我们按下列方式定义非线性波的波长为

$$L=L(c,A_i)=2\int_{\xi_1}^{\xi_2}\mathrm{d}\xi=2\int_{u_1}^{u_2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi}=2\int_{u_1}^{u_2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{F(u;c,A_i)}}; \tag{9.397}$$

波数为

$$k=k(c,A_i)=\frac{2\pi}{L(c,A_i)}; \tag{9.398}$$

圆频率是

$$\omega=\omega(c,A_i)=ck(c,A_i); \tag{9.399}$$

而周期是

$$T=T(c,A_i)=\frac{2\pi}{\omega(c,A_i)}. \tag{9.400}$$

按上述方式定义波参数对于非线性波无疑是合适的. 例如 KdV 方程的椭圆余弦波的方程(9.161)可以写为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=-\frac{1}{3\beta}(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3) \quad (u_1>u_2>u_3), \tag{9.401}$$

在(u_2,u_1),u有周期解,波长L按(9.397)式应为

$$L=2\int_{u_2}^{u_1}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3\beta}(u_1-u)(u-u_2)(u-u_3)}}\mathrm{d}u. \tag{9.402}$$

经过(9.173)式和(9.176)式的变换,上式化为

$$L=2\sqrt{\frac{12\beta}{u_1-u_3}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-q^2)(1-m^2q^2)}}\mathrm{d}q=2\sqrt{\frac{12\beta}{u_1-u_3}}\mathrm{K}(m), \tag{9.403}$$

这与(9.186)式完全一致. 相应有

$$k=\frac{2\pi}{L}=\frac{\pi}{\mathrm{K}(m)}\sqrt{\frac{u_1-u_3}{12\beta}}, \tag{9.404}$$

$$\omega=kc=\frac{\pi c}{\mathrm{K}(m)}\sqrt{\frac{u_1-u_3}{12\beta}}. \tag{9.405}$$

§9.11　奇异摄动法(singular perturbation method)

在§9.5中,我们获得了 KdV 方程的椭圆余弦波解,在振幅$a\to 0$时,求得了

线性波解. 本节利用奇异摄动法，以相对振幅 ε 作为小参数，求 KdV 方程的各级近似解.

为了理解方便，我们就应用浅水波的 KdV 方程：

$$\frac{\partial h'}{\partial t}+c_0\left(1+\frac{3}{2H}h'\right)\frac{\partial h'}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 h'}{\partial x^3}=0 \quad \left(\beta=\frac{1}{6}c_0H^2\right). \tag{9.406}$$

首先，引进相位函数变量 θ 和相对扰动深度 η：

$$\theta\equiv kx-\omega t,\quad \eta\equiv h'/H, \tag{9.407}$$

则方程(9.406)化为

$$(-\omega+kc_0)\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\theta}+\frac{3}{2}kc_0\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\theta}+\beta k^3\frac{\mathrm{d}^3\eta}{\mathrm{d}\theta^3}=0. \tag{9.408}$$

其次，选取相对振幅

$$\varepsilon=a/H\ll 1 \tag{9.409}$$

作为小参数，不仅将 η，而且将 ω 均展为 ε 的幂级数，这是奇异摄动法与一般摄动法的主要区别，即令

$$\begin{cases}\eta=\varepsilon\eta_1(\theta)+\varepsilon^2\eta_2(\theta)+\varepsilon^3\eta_3(\theta)+\cdots,\\ \omega=\omega_0(k)+\varepsilon\omega_1(k)+\varepsilon^2\omega_2(k)+\cdots.\end{cases} \tag{9.410}$$

因为 η 表征自由面扰动，所以，在(9.410)式中 η 的零级近似为零.

将(9.410)式代入方程(9.408)，得到它的各级近似方程为

一级近似：$$(-\omega_0+kc_0)\frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}\theta}+\beta k^3\frac{\mathrm{d}^3\eta_1}{\mathrm{d}\theta^3}=0; \tag{9.411}$$

二级近似：$$(-\omega_0+kc_0)\frac{\mathrm{d}\eta_2}{\mathrm{d}\theta}+\beta k^3\frac{\mathrm{d}^3\eta_2}{\mathrm{d}\theta^3}=\omega_1\frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}\theta}-\frac{3}{2}kc_0\eta_1\frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}\theta}; \tag{9.412}$$

三级近似：$$(-\omega_0+kc_0)\frac{\mathrm{d}\eta_3}{\mathrm{d}\theta}+\beta k^3\frac{\mathrm{d}^3\eta_3}{\mathrm{d}\theta^3}=\omega_1\frac{\mathrm{d}\eta_2}{\mathrm{d}\theta}+\omega_2\frac{\mathrm{d}\eta_2}{\mathrm{d}\theta}-\frac{3}{2}kc_0\frac{\mathrm{d}\eta_1\eta_2}{\mathrm{d}\theta}. \tag{9.413}$$

一级近似方程(9.411)对 $\frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}\theta}$ 而言是二阶振动方程，当 $(-\omega_0+kc_0)/\beta k^3=1$ 时可求得振动解，因而

$$\omega_0=kc_0-\beta k^3, \tag{9.414}$$

$$\eta_1=\cos\theta. \tag{9.415}$$

(9.414)式表征的即是线性频散关系.

有了 ω_0 和 η_1，就可将它们代入二级近似方程(9.412)，得到

$$\beta k^3\left(\frac{\mathrm{d}^3\eta_2}{\mathrm{d}\theta^3}+\frac{\mathrm{d}\eta_2}{\mathrm{d}\theta}\right)=-\omega_1\sin\theta+\frac{3}{4}kc_0\sin 2\theta, \tag{9.416}$$

方程(9.416)是非齐次方程，其齐次方程的解仍是 $\cos\theta$. 但是，右端非齐次项中的第一项 $-\omega_1\sin\theta$ 所对应的特解与齐次方程解的形式相同(共振)，因而需设解为 $\theta\sin\theta$

的形式，这种项称为久期项(secular term)，它使解随时间无限增大，这样导致摄动法失败. 但是，有了奇异摄动法，消除这类久期项就有了可能. 这里，为了保证摄动法成功，很自然地设

$$\omega_1 = 0, \tag{9.417}$$

它称为非久期条件. 这样，方程(9.416)对应$\frac{3}{4}kc_0\sin 2\theta$ 的特解很易求得为

$$\eta_2 = \frac{c_0}{8\beta k^2}\cos 2\theta. \tag{9.418}$$

有了 η_1 和 η_2，就可以将它们代入三级近似方程(9.413)，并利用(9.417)式，得到

$$\beta k^3\left(\frac{\mathrm{d}^3\eta_3}{\mathrm{d}\theta^3}+\frac{\mathrm{d}\eta_3}{\mathrm{d}\theta}\right)=\left(-\omega_2+\frac{3c_0^2}{32\beta k}\right)\sin\theta+\frac{9c_0^2}{32\beta k}\sin 3\theta. \tag{9.419}$$

类似方程(9.416)，为了防止摄动法失败，我们取

$$\omega_2 = 3c_0^2/32\beta k. \tag{9.420}$$

这样，不但消除了久期项，使方程(9.419)右端第一项为零，而且我们可以很易求得对应$\frac{9c_0^2}{32\beta k}\sin 3\theta$ 的方程(9.419)的特解为

$$\eta_3 = \frac{3c_0^2}{256\beta^2k^4}\cos 3\theta. \tag{9.421}$$

如此不断，在求高一级近似解的过程中，自动地调节圆频率，不但可以找到圆频率的各级近似，而且也消除了久期项，使摄动法成功，从而最后求得方程的解. 这就是奇异摄动法的优点所在，这种做法在许多物理问题中有较普遍的意义.

将 ω 和 η 的各级近似代入(9.410)式，最后求得

$$\frac{h'}{H} = \varepsilon\cos\theta+\frac{c_0\varepsilon^2}{8\beta k^2}\cos 2\theta+\frac{3c_0^2\varepsilon^3}{256\beta^2k^4}\cos 3\theta+\cdots, \tag{9.422}$$

$$\omega = kc_0-\beta k^3+\frac{3c_0^2\varepsilon^2}{32\beta k}+\cdots. \tag{9.423}$$

注意 $\varepsilon=a/H$，$\beta=c_0H^2/6$，则上两式可改写为

$$h' = a\cos\theta+\frac{3}{4k^2H^3}a^2\cos 2\theta+\frac{27}{64k^4H^6}a^3\cos 3\theta+\cdots, \tag{9.424}$$

$$\frac{\omega}{kc_0} = 1-\frac{1}{6}k^2H^2+\frac{9a^2}{16k^2H^4}+\cdots. \tag{9.425}$$

(9.425)式明确给出了非线性浅水波的频散关系不仅依赖于波数 k，而且依赖于振幅 a.

§9.12 约化摄动法(reductive perturbation method)

本节我们将说明，对于较复杂的非线性方程组，若应用约化摄动法可以化为如

KdV 方程、Burgers 方程、非线性 Schrödinger 方程等较简单的而且能准确求解的非线性方程.

在波的传播理论中,人们早就发现,在一定的条件下可以化复杂波为简单波来处理. 例如,线性波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9.426}$$

的通解为

$$u=f(\xi)+g(\eta), \tag{9.427}$$

其中

$$\xi=x-c_0t,\quad \eta=x+c_0t. \tag{9.428}$$

(9.427)式表明:方程(9.426)所表征的波是右传播波 $f(\xi)$ 与左传播波 $g(\eta)$ 二者叠加而成的复杂波. 不过,若方程(9.426)的初条件仅在区间 $[-x_0,x_0]$ 中给出,则右传播波和左传播波相互作用的区域,只是在初始场的近处出现,而在初始场的远处,起作用的就分别是右传播波或左传播波的简单波了. 见图 9.17.

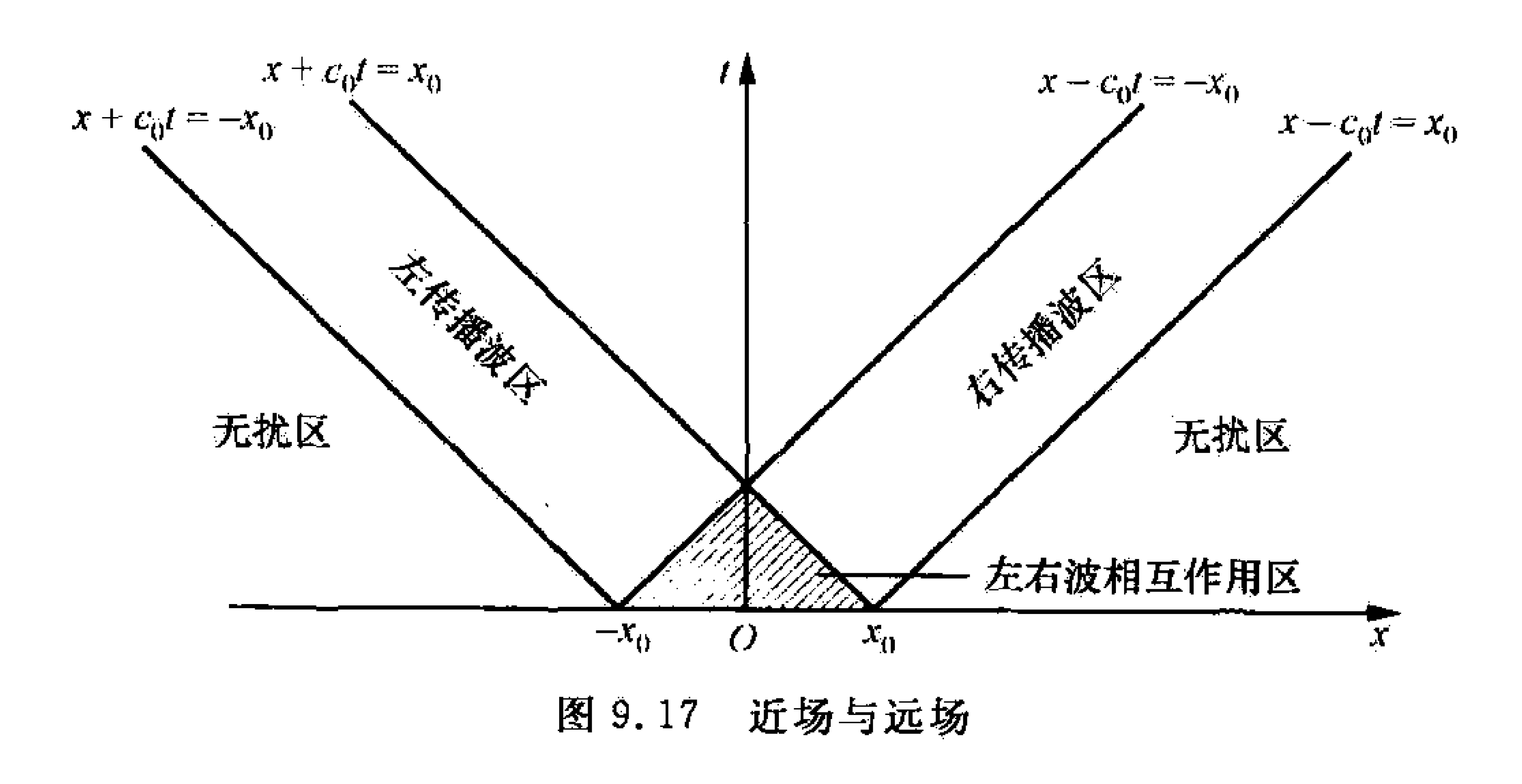


图 9.17 近场与远场

所以,在远离初始场处,方程(9.426)可分别用下列两个向右传播和向左传播的简单波方程来描写

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+c_0\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 & (\text{向右传播的简单波}),\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial t}-c_0\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 & (\text{向左传播的简单波}).\end{cases} \tag{9.429}$$

方程(9.429)描写的场称为原方程(9.426)的远场(far-field). 类似,对于复杂的非线性方程,也可以通过坐标变换和摄动法化为简单的非线性方程(例如 KdV 方程,通常也称为远场方程)去求解,这就是约化摄动法.

下面,我们先分析在波长较大(k 较小)的弱非线性(weakly nonlinear)的问题中,某些简单的非线性方程的空间和时间尺度的联系. 例如,Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \tag{9.430}$$

其线性方程相应的频散关系为

$$\omega - kc = \mathrm{i}\nu k^2. \tag{9.431}$$

这是单向传播的圆频率，但 ω 是复数. 对于长波($k\to 0$)，因而波的演变是缓慢的. 若选一小参数 $\varepsilon \ll 1$，则可设

$$k = \varepsilon^{\alpha} k_1, \tag{9.432}$$

其中 α 待定，k_1 的量级为 1. 这样，由频散关系(9.431)式求得相位为

$$\theta \equiv kx - \omega t = \varepsilon^{\alpha} k_1 x - [\varepsilon^{\alpha} k_1 c + \mathrm{i}\nu\varepsilon^{2\alpha} k_1^2] t = k_1 \varepsilon^{\alpha}(x - ct) - \mathrm{i}\nu k_1^2 \varepsilon^{2\alpha} t.$$

上式表明：对于长波($k\to 0$)，因存在(9.431)式的频散关系，在以 c 移动的坐标系中，缓变的空间尺度和时间尺度之间的合适关系为

$$\xi = \varepsilon^{\alpha}(x - ct), \quad \tau = \varepsilon^{2\alpha} t. \tag{9.433}$$

取 $\alpha = 1$，上式化为

$$\xi = \varepsilon(x - ct), \quad \tau = \varepsilon^2 t. \tag{9.434}$$

所以，对于包含耗散的复杂的非线性方程要化为 Burgers 方程求解，需作上述变换.

例如，KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{9.435}$$

其线性方程相应的频散关系为

$$\omega - kc = -\beta k^3. \tag{9.436}$$

它是单向传播的圆频率，而且对长波($k\to 0$)而言，它表征弱频散波$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} = -6\beta k \to 0\right)$. 上式同样给出了在以 c 移动的坐标系中，波演变的合适空间尺度和时间尺度为

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - ct), \quad \tau = \varepsilon^{3/2} t. \tag{9.437}$$

所以，对于包含弱频散的复杂的非线性方程要化为 KdV 方程求解，需作上述变换.

大气中不少非线性波动是属于弱频散的弱非线性波. 如在 §9.2 中讨论的浅水波. 尽管双向传播的浅水波方程和相应的线性频散关系都比较复杂，但单向传播的浅水波，其线性圆频率满足

$$\omega = \sqrt{gk\tanh(kh)} \approx kc_0 - \beta k^3 \quad \left(\beta = \frac{1}{6} c_0 H^2\right), \tag{9.438}$$

这与(9.436)式形式完全一样. 又如线性正压 Rossby 波的圆频率为

$$\omega = -\frac{\beta_0 k}{k^2 + l^2 + \lambda_0^2} \quad \left(\lambda_0^2 = \frac{f_0^2}{c_0^2}\right), \tag{9.439}$$

在 $k\to 0$ 时有

$$\omega=-\frac{\beta_0 k}{(l^2+\lambda_0^2)\left(1+\dfrac{k^2}{l^2+\lambda_0^2}\right)}\approx-\frac{\beta_0 k}{l^2+\lambda_0^2}\left(1-\frac{k^2}{l^2+\lambda_0^2}\right)$$

或

$$\omega-k\left(-\frac{\beta_0}{l^2+\lambda_0^2}\right)=\frac{\beta_0}{(l^2+\lambda_0^2)^2}k^3, \tag{9.440}$$

这也与(9.436)式形式相同. 又如，在(x,z)平面上的重力内波，其线性波的圆频率ω满足

$$\omega^2=k^2N^2/(k^2+n^2). \tag{9.441}$$

对向右传播的重力内波

$$\omega=\sqrt{\frac{k^2N^2}{k^2+n^2}}=\sqrt{\frac{k^2N^2}{n^2}\cdot\frac{1}{1+k^2/n^2}}. \tag{9.442}$$

当 $k^2\ll n^2$ 时，上式可化为

$$\omega\approx\frac{kN}{n}\left(1-\frac{k^2}{2n^2}\right)=\left(\frac{N}{n}\right)k-\frac{N}{2n^3}k^3, \tag{9.443}$$

它形式上也同(9.436)式.

又例如，非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta|u|^2u=0, \tag{9.444}$$

其最简单的频散关系(参见(9.360)式)为

$$\omega=\alpha k^2-\beta a^2\quad(a=|A|), \tag{9.445}$$

它单向传播，但表征强频散波$\left(\dfrac{\partial^2\omega}{\partial k^2}=2\alpha\right)$. 不过，它也给出了下列尺度关系

$$\xi=\varepsilon(x-c_g t),\quad\tau=\varepsilon^2 t. \tag{9.446}$$

所以，对于包含强频散的复杂的非线性方程要化为非线性 Schrödinger 方程求解，需作上述变换.

综上分析，化复杂的非线性方程为简单的非线性方程求解，需作(9.434)式、(9.437)式和(9.446)式等的变换. 这种变换通常称为 Gardner-Morikawa 变换，简称 G-M 变换，其一般形式为

$$\xi=\varepsilon^{\gamma}(x-ct),\quad\tau=\varepsilon^{\gamma+1}t,\quad\varepsilon\ll 1. \tag{9.447}$$

相应

$$\frac{\partial}{\partial t}=-\varepsilon^{\gamma}c\frac{\partial}{\partial\xi}+\varepsilon^{\gamma+1}\frac{\partial}{\partial\tau},\quad\frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon^{\gamma}\frac{\partial}{\partial\xi}. \tag{9.448}$$

对于复杂的非线性方程，通过 G-M 变换和摄动法化为简单的能准确求解的非线性方程，这种方法称为约化摄动法. 下面，我们举例说明约化摄动法的应用.

[例 1] 有耗散的非线性声波(弱激波).

考虑黏性和热传导，一维大气非线性声波方程组可以写为

$$\begin{cases}\rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial p}{\partial x}=\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\\ \rho T\left(\dfrac{\partial s}{\partial t}+u\dfrac{\partial s}{\partial x}\right)=k\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2},\\ p=\rho RT,\\ p=p(\rho,s),\end{cases}\tag{9.449}$$

其中 μ 和 k 分别为黏性系数和热传导系数，而

$$s=c_p\ln T-R\ln p+\text{常数}=c_V\ln p-c_p\ln\rho+\text{常数}\tag{9.450}$$

为比熵.

因方程组(9.449)包含黏性，我们可以将它化为 Burgers 方程，为此，我们令

$$\xi=\varepsilon(x-ct),\quad \tau=\varepsilon^2 t.\tag{9.451}$$

相应

$$\frac{\partial}{\partial t}=\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial \tau}-\varepsilon c\frac{\partial}{\partial \xi},\quad \frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial \xi}.\tag{9.452}$$

将(9.452)式代入方程组(9.449)的前三式得

$$\begin{cases}\varepsilon\rho\dfrac{\partial u}{\partial \tau}-\rho c\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+\rho u\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+\dfrac{\partial p}{\partial \xi}=\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},\\ \varepsilon\dfrac{\partial \rho}{\partial \tau}-c\dfrac{\partial \rho}{\partial \xi}+u\dfrac{\partial \rho}{\partial \xi}+\rho\dfrac{\partial u}{\partial \xi}=0,\\ \varepsilon\rho T\dfrac{\partial s}{\partial \tau}-\rho Tc\dfrac{\partial s}{\partial \xi}+\rho Tu\dfrac{\partial s}{\partial \xi}=\varepsilon k\dfrac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}.\end{cases}\tag{9.453}$$

应用摄动法，将 p,ρ,T,s 和 u 展为 ε 的幂级数，考虑到在未扰动时 $u=0$，p,ρ,T,s 分别为 p_0,ρ_0,T_0,s_0，它们均与 x,t 无关，可视为常数，即令

$$\begin{cases}p=p_0+\varepsilon p_1+\varepsilon^2 p_2+\cdots,\\ \rho=\rho_0+\varepsilon\rho_1+\varepsilon^2\rho_2+\cdots,\\ T=T_0+\varepsilon T_1+\varepsilon^2 T_2+\cdots,\\ s=s_0+\varepsilon s_1+\varepsilon^2 s_2+\cdots,\\ u=\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\cdots.\end{cases}\tag{9.454}$$

将(9.454)式代入方程组(9.453)得到一级近似和二级近似方程组，它们分别为

$$\begin{cases}-\rho_0 c\dfrac{\partial u_1}{\partial \xi}+\dfrac{\partial p_1}{\partial \xi}=0,\\ -c\dfrac{\partial \rho_1}{\partial \xi}+\rho_0\dfrac{\partial u_1}{\partial \xi}=0,\\ -\rho_0 T_0 c\dfrac{\partial s_1}{\partial \xi}=0\end{cases} \tag{9.455}$$

和

$$\begin{cases}\rho_0\dfrac{\partial u_1}{\partial \tau}-\rho_0 c\dfrac{\partial u_2}{\partial \xi}-\rho_1 c\dfrac{\partial u_1}{\partial \xi}+\rho_0 u_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \xi}+\dfrac{\partial p_2}{\partial \xi}=\mu\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2},\\ \dfrac{\partial \rho_1}{\partial \tau}-c\dfrac{\partial \rho_2}{\partial \xi}+u_1\dfrac{\partial \rho_1}{\partial \xi}+\rho_0\dfrac{\partial u_2}{\partial \xi}+\rho_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \xi}=0,\\ \rho_0 T_0\dfrac{\partial s_1}{\partial \tau}-\rho_0 T_0 c\dfrac{\partial s_2}{\partial \xi}+\rho_0 T_0 u_1\dfrac{\partial s_1}{\partial \xi}=k\dfrac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2}.\end{cases} \tag{9.456}$$

将(9.454)式代入方程组(9.449)的后两式有

$$\begin{cases}p_0+\varepsilon p_1+\cdots=(\rho_0+\varepsilon\rho_1+\cdots)R(T_0+\varepsilon T_1+\cdots),\\ p_0+\varepsilon p_1+\varepsilon^2 p_2+\cdots=p_0+\left(\dfrac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s(\varepsilon\rho_1+\varepsilon^2\rho_2+\cdots)+\left(\dfrac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho(\varepsilon s_1+\varepsilon^2 s_2+\cdots)\\ \qquad+\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_s(\varepsilon^2\rho_1^2+\cdots)+2\left(\dfrac{\partial^2 p}{\partial \rho\partial s}\right)(\varepsilon^2\rho_1 s_1+\cdots)+\left(\dfrac{\partial^2 p}{\partial s^2}\right)_\rho(\varepsilon^2 s_1^2+\cdots)\right]+\cdots,\end{cases} \tag{9.457}$$

除 $p_0=\rho_0 RT_0$ 之外，得到

$$\begin{cases}\dfrac{p_1}{p_0}=\dfrac{\rho_1}{\rho_0}+\dfrac{T_1}{T_0},\\ p_1=\left(\dfrac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s\rho_1+\left(\dfrac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho s_1,\\ p_2=\left(\dfrac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s\rho_2+\left(\dfrac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho s_2+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_s\rho_1^2+\left(\dfrac{\partial^2 p}{\partial \rho\partial s}\right)\rho_1 s_1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 p}{\partial s^2}\right)_\rho s_1^2.\end{cases} \tag{9.458}$$

若设

$$\xi\to\infty,\quad p_1,\rho_1,s_1,u_1\to 0, \tag{9.459}$$

则积分方程组(9.455)得到

$$s_1=0,\quad p_1=\rho_0 c u_1,\quad \rho_0 u_1=c\rho_1. \tag{9.460}$$

由上式有

$$c^2=p_1/\rho_1, \tag{9.461}$$

注意，由(9.450)式有

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s=c_s^2,\quad \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho=\frac{p}{c_V}\approx\frac{\rho_0}{c_p}c_s^2,\quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_s=\frac{\gamma-1}{\rho}c_s^2\approx\frac{\gamma-1}{\rho_0}c_s^2, \tag{9.462}$$

这里 c_s 为绝热声速($c_s^2=\gamma p/\rho$).

以 $s_1=0$ 和(9.462)式代入(9.458)式的后两式有

$$\begin{cases} p_1 = \rho_1 c_s^2, \\ p_2 = c_s^2\left(\rho_2 + \dfrac{\rho_0}{c_p}s_2 + \dfrac{\gamma-1}{2\rho_0}\rho_1^2\right). \end{cases} \tag{9.463}$$

将(9.463)式的第一式与(9.461)式比较有

$$c = c_s, \tag{9.464}$$

再代入到(9.458)式的第一式有

$$\frac{T_1}{T_0} = (\gamma-1)\frac{\rho_1}{\rho_0}. \tag{9.465}$$

将(9.460)式、(9.463)式和(9.465)式代入到(9.456)式得到

$$\begin{cases} c\dfrac{\partial\rho_1}{\partial\tau} - \rho_0 c\dfrac{\partial u_2}{\partial\xi} - \dfrac{c}{\rho_0}\rho_1\dfrac{\partial\rho_1}{\partial\xi} + \dfrac{c}{\rho_0}\rho_1\dfrac{\partial\rho_1}{\partial\xi} + c^2\dfrac{\partial\rho_2}{\partial\xi} + \dfrac{\rho_0}{c_p}c^2\dfrac{\partial s_2}{\partial\xi} \\ \qquad + \dfrac{\gamma-1}{\rho_0}c^2\rho_1\dfrac{\partial\rho_1}{\partial\xi} = \dfrac{\mu c}{\rho_0}\dfrac{\partial^2\rho_1}{\partial\xi^2}, \\ \dfrac{\partial\rho_1}{\partial\tau} - c\dfrac{\partial\rho_2}{\partial\xi} + \dfrac{2c}{\rho_0}\rho_1\dfrac{\partial\rho_1}{\partial\xi} + \rho_0\dfrac{\partial u_2}{\partial\xi} = 0, \\ -\rho_0 T_0 c\dfrac{\partial s_2}{\partial\xi} = \dfrac{kT_0}{\rho_0}(\gamma-1)\dfrac{\partial^2\rho_1}{\partial\xi^2}. \end{cases} \tag{9.466}$$

将方程组(9.466)的第一式除以 c,第三式除以 c_p,然后与第二式相加得到

$$2\frac{\partial\rho_1}{\partial\tau} + \frac{(\gamma+1)c}{\rho_0}\rho_1\frac{\partial\rho_1}{\partial\xi} = \frac{1}{\rho_0}\left[\mu + \frac{k}{c_p}(\gamma-1)\right]\frac{\partial^2\rho_1}{\partial\xi^2} = 0$$

或

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial\tau} + \frac{\gamma+1}{2\rho_0}\rho_1\frac{\partial\rho_1}{\partial\xi} - \frac{1}{2\rho_0}\left[\mu + \frac{k}{c_p}(\gamma-1)\right]\frac{\partial^2\rho_1}{\partial\xi^2} = 0, \tag{9.467}$$

这是关于 ρ_1 的 Burgers 方程.

以(9.460)式中的 $\rho_0 u_1 = c\rho_1$ 代入(9.447)式,得到关于 u_1 的 Burgers 方程为

$$\frac{\partial u_1}{\partial\tau} + \frac{\gamma+1}{2}u_1\frac{\partial u_1}{\partial\xi} - \frac{1}{2\rho_0}\left[\mu + \frac{k}{c_p}(\gamma-1)\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^2} = 0. \tag{9.468}$$

[例 2] 单向传播的非线性浅水波(重力外波).

考虑浅水波的 Boussinesq 方程组(9.96),即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + g\dfrac{\partial h}{\partial x} + \dfrac{H}{3}\dfrac{\partial^3 h}{\partial t^2\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + u\dfrac{\partial h}{\partial x} + h\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{9.469}$$

在§9.2 中,我们利用特征线分析,导出了单向传播的浅水波满足 KdV 方程,这里

我们应用约化摄动法将它化为 KdV 方程. 为此，作变换

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - ct), \quad \tau = \varepsilon^{3/2} t. \tag{9.470}$$

相应

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^{3/2}\frac{\partial}{\partial \tau} - \varepsilon^{1/2} c \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial \xi}. \tag{9.471}$$

将(9.471)式代入方程组(9.469)，得

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial \tau} - c\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + u\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + g\dfrac{\partial h}{\partial \xi} + \dfrac{H}{3}\left[\varepsilon^3 \dfrac{\partial^3 h}{\partial \tau^2 \partial \xi} - 2\varepsilon^2 c\dfrac{\partial^3 h}{\partial \tau \partial \xi^2} + \varepsilon c^2 \dfrac{\partial^3 h}{\partial \xi^3}\right] = 0, \\ \varepsilon\dfrac{\partial h}{\partial \tau} - c\dfrac{\partial h}{\partial \xi} + u\dfrac{\partial h}{\partial \xi} + h\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = 0. \end{cases} \tag{9.472}$$

再应用摄动法，设

$$\begin{cases} h = H + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \cdots, \\ u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots. \end{cases} \tag{9.473}$$

将它们代入方程组(9.472)得到一级近似、二级近似分别为

$$\begin{cases} -c\dfrac{\partial u_1}{\partial \xi} + g\dfrac{\partial h_1}{\partial \xi} = 0, \\ -c\dfrac{\partial h_1}{\partial \xi} + H\dfrac{\partial u_1}{\partial \xi} = 0; \end{cases} \tag{9.474}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial \tau} - c\dfrac{\partial u_2}{\partial \xi} + u_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \xi} + g\dfrac{\partial h_2}{\partial \xi} + \dfrac{H}{3}c^2\dfrac{\partial^3 h_1}{\partial \xi^3} = 0, \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial \tau} - c\dfrac{\partial h_2}{\partial \xi} + u_1\dfrac{\partial h_1}{\partial \xi} + h_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \xi} + H\dfrac{\partial u_2}{\partial \xi} = 0. \end{cases} \tag{9.475}$$

若设

$$\xi \to \infty, \quad u_1, h_1 \to 0, \tag{9.476}$$

则积分方程组(9.474)，并取积分常数为零，则得到

$$cu_1 = gh_1, \quad ch_1 = Hu_1. \tag{9.477}$$

由上式有

$$c^2 = gH = c_0^2. \tag{9.478}$$

将(9.477)式代入方程组(9.475)，得到

$$\begin{cases} \dfrac{c}{H}\dfrac{\partial h_1}{\partial \tau} - c\dfrac{\partial u_2}{\partial \xi} + \dfrac{c^2}{H^2}h_1\dfrac{\partial h_1}{\partial \xi} + g\dfrac{\partial h_2}{\partial \xi} + \dfrac{H}{3}c_0^2\dfrac{\partial^3 h_1}{\partial \xi^3} = 0, \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial \tau} - c\dfrac{\partial h_2}{\partial \xi} + \dfrac{c}{H}h_1\dfrac{\partial h_1}{\partial \xi} + \dfrac{c}{H}h_1\dfrac{\partial h_1}{\partial \xi} + H\dfrac{\partial u_2}{\partial \xi} = 0. \end{cases} \tag{9.479}$$

将方程组(9.479)的第一式乘$\dfrac{H}{c_0} = \dfrac{c_0}{g}$，并与第二式相加得

$$2\frac{\partial h_1}{\partial\tau}+\frac{3c_0}{H}h_1\frac{\partial h_1}{\partial\xi}+\frac{H^2}{3}c\frac{\partial^3 h_1}{\partial\xi^3}=0$$

或

$$\frac{\partial h_1}{\partial\tau}+\frac{3c_0}{2H}h_1\frac{\partial h_1}{\partial\xi}+\frac{1}{6}c_0H^2\frac{\partial^3 h_1}{\partial\xi^3}=0, \tag{9.480}$$

这是 KdV 方程. 它与(9.107)式几乎一样,若应用(9.471)式,将 τ 和 ξ 换回 t 和 x,就与(9.107)式完全相同了.

[**例 3**] 非线性正压 Rossby 波.

考虑正压模式的准地转位涡度方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)(\zeta-\lambda_0^2\psi)+\beta_0\frac{\partial\psi}{\partial x}=0. \tag{9.481}$$

令

$$\begin{cases} u=\bar{u}(y)+u', \quad v=v', \quad \zeta=-\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\nabla_h^2\psi', \\ u'=-\dfrac{\partial\psi'}{\partial y}, \quad v'=\dfrac{\partial\psi'}{\partial x}, \end{cases} \tag{9.482}$$

则方程(9.481)化为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\left(\bar{u}(y)-\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right](\nabla_h^2\psi'-\lambda_0^2\psi')+B\frac{\partial\psi'}{\partial x}=0, \tag{9.483}$$

其中

$$B=\beta_0-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}. \tag{9.484}$$

应用 G-M 变换,令

$$\xi=\varepsilon^{1/2}(x-ct), \quad \tau=\varepsilon^{3/2}t, \quad y=y, \tag{9.485}$$

这里 c 相当于 x 方向波的传播速度. 由上式有

$$\frac{\partial}{\partial t}=\varepsilon^{3/2}\frac{\partial}{\partial\tau}-\varepsilon^{1/2}c\frac{\partial}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}, \tag{9.486}$$

将它们代入方程(9.483),得到

$$\left[\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}+(\bar{u}-c)\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right]\left(\varepsilon\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}-\lambda_0^2\psi'\right)+B\frac{\partial\psi'}{\partial\xi}=0. \tag{9.487}$$

再令

$$\psi'=\varepsilon\psi_1+\varepsilon^2\psi_2+\cdots, \tag{9.488}$$

并将其代入到方程(9.487),得到一级近似和二级近似分别是

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\bar{u}-c)\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}-\lambda_0^2\psi_1\right)+B\psi_1\right]=0, \tag{9.489}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\bar{u}-c)\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}-\lambda_0^2\psi_2\right)+B\psi_2\right]+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}-\lambda_0^2\psi_1\right)$$
$$+(\bar{u}-c)\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\xi^3}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}-\lambda_0^2\psi_1\right)+\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}-\lambda_0^2\psi_1\right)=0. \tag{9.490}$$

再将一级近似方程(9.489)对 ξ 积分一次，取积分常数为零，得

$$(\bar{u}-c)\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}-\lambda_0^2\psi_1\right)+B\psi_1=0. \tag{9.491}$$

令 $\bar{u}-c\neq 0$，则上式化为

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}+[Q(y)-\lambda_0^2]\psi_1=0, \tag{9.492}$$

其中

$$Q(y)=\frac{B}{\bar{u}-c}=\left(\beta_0-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}\right)\Big/(\bar{u}-c). \tag{9.493}$$

(9.492)式是 $\psi_1(\xi,\tau,y)$ 关于 y 的二阶方程. 如令

$$\psi_1=A(\xi,\tau)G(y), \tag{9.494}$$

则 $G(y)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}+[Q(y)-\lambda_0^2]G=0. \tag{9.495}$$

若 G 给定的是齐次边条件：

$$G|_{y=y_1}=0,\quad G|_{y=y_2}=0, \tag{9.496}$$

则在 $\bar{u}(y)$ 给定时，可确定本征值 c. 例如，$\bar{u}=0$ 时，可定出 $-\frac{\beta_0}{c}-\lambda_0^2=l^2$ (l 是 y 方向的波数). 因而 $c=-\frac{\beta_0}{l^2+\lambda_0^2}$，这是当 $k\ll l$ 时，Rossby 波在 x 方向波速的近似式.

将(9.494)式代入到方程(9.490)，得

$$-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\bar{u}-c)\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}-\lambda_0^2\psi_2\right)+B\psi_2\right]=\left(\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}-\lambda_0^2G\right)\frac{\partial A}{\partial\tau}$$
$$+(\bar{u}-c)G\frac{\partial^3A}{\partial\xi^3}-\left[\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}-\lambda_0^2G\right)-G\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}-\lambda_0^2G\right)\right]A\frac{\partial A}{\partial\xi} \tag{9.497}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}+(Q(y)-\lambda_0^2)\psi_2\right]=\frac{Q(y)}{\bar{u}-c}G\frac{\partial A}{\partial\tau}-G\frac{\partial^3A}{\partial\xi^3}+\frac{1}{\bar{u}-c}\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}-G\frac{\mathrm{d}^3G}{\mathrm{d}y^3}\right)A\frac{\partial A}{\partial\xi}. \tag{9.498}$$

将上式两边乘以 $G(y)$ 有

$$G\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}+(Q(y)-\lambda_0^2)\psi_2\right]=\frac{Q(y)}{\bar{u}-c}G^2\frac{\partial A}{\partial\tau}-G^2\frac{\partial^3A}{\partial\xi^3}$$

$$+\frac{G}{\bar{u}-c}\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}-G\frac{\mathrm{d}^3G}{\mathrm{d}y^3}\right)A\frac{\partial A}{\partial \xi}. \tag{9.499}$$

再将上式两边对 y 从 y_1 到 y_2 积分，并利用边条件(9.496)，注意

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{y_1}^{y_2} G\left[\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}+(Q(y)-\lambda_0^2)\psi_2\right]\delta y$$

$$=\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(G\frac{\partial \psi_2}{\partial y}-\psi_2\frac{\partial G}{\partial y}\right)\delta y+\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{y_1}^{y_2}\psi_2\left[\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}+(Q(y)-\lambda_0^2)G\right]\delta y=0 \tag{9.500}$$

和

$$\int_{y_1}^{y_2}\frac{G}{\bar{u}-c}\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}-G\frac{\mathrm{d}^3G}{\mathrm{d}y^3}\right)\delta y=-\int_{y_1}^{y_2}\frac{G^3}{\bar{u}-c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2}\right)\delta y$$

$$=\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\bar{u}-c}G^3\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}y}\delta y, \tag{9.501}$$

则最后求得

$$\frac{\partial A}{\partial \tau}+\alpha A\frac{\partial A}{\partial \xi}+\beta\frac{\partial^3 A}{\partial \xi^3}=0, \tag{9.502}$$

这是 KdV 方程，其中

$$\begin{cases}\alpha=\displaystyle\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\bar{u}-c}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}y}\cdot G^3\delta y\Big/\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\bar{u}-c}QG^2\delta y,\\ \beta=-\displaystyle\int_{y_1}^{y_2}G^2\delta y\Big/\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\bar{u}-c}QG^2\delta y.\end{cases} \tag{9.503}$$

类似，若应用形式为 $\xi=\varepsilon(x-ct)$，$\tau=\varepsilon^3 t$，$y=y$ 的 G-M 变换，正压准地转位涡度方程(9.481)就可以化为 mKdV 方程；若应用形式为 $\xi=\varepsilon(x-c_g t)$，$\tau=\varepsilon^2 t$，$y=y$ 的 G-M 变换，正压准地转位涡度方程(9.481)就可以化为非线性 Schrödinger 方程.

§9.13　幂级数展开法(power series expansion method)

约化摄动法是求解复杂非线性波动的一个途径，但 G-M 变换本身就意味着将要导出的结果. 作者(1983 年)直接解非线性方程，而且将非线性项在平衡点附近幂级数展开，从而求得非线性波，通常它也满足 KdV 方程.

我们就以水平无辐散条件下的正压 Rossby 波为例来说明. 此时，简化的方程组可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)+u\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)+\beta_0 v=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0.\end{cases} \tag{9.504}$$

其中第一式为垂直涡度方程，由它求得线性 Rossby 波的频散关系为

$$\omega - k\bar{u} = -\beta_0/k, \tag{9.505}$$

其中 $\bar{u}$ 为基本气流.

现在，我们直接在方程组(9.504)中，令

$$u = \bar{u} + U(\theta), \quad v = V(\theta), \quad \theta = kx + ly - \omega t, \tag{9.506}$$

代入则得

$$\begin{cases} k(-\omega + k\bar{u} + kU)\dfrac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2} + \beta_0 V = 0, \\ k\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\theta} + l\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = 0. \end{cases} \tag{9.507}$$

将方程组(9.507)的第二式对 θ 积分一次，取积分常数为零，得

$$kU + lV = 0. \tag{9.508}$$

由上式有 $U = -lV/k$，代入方程组(9.507)的第一式有

$$k(\omega - k\bar{u} + lV)\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2} = \beta_0 V.$$

设 $\omega - k\bar{u} + lV \neq 0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2} + \left[-\frac{\beta_0}{k(\omega - k\bar{u} + lV)}\right]V = 0, \tag{9.509}$$

这是 V 的非线性常微分方程. 若把 $-\beta_0/k(\omega - k\bar{u} + lV)$ 视为已知函数，则方程(9.509)表示振动，要求

$$\omega - k\bar{u} + lV < 0. \tag{9.510}$$

将方程(9.509)的两边乘以 $2\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}$，并对 θ 积分，注意

$$\int 2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2}\mathrm{d}\theta = \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + C,$$

$$\int \frac{V\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}}{(\omega - k\bar{u}) + lV}\mathrm{d}\theta = \frac{V}{l} - \frac{\omega - k\bar{u}}{l^2}\ln|\omega - k\bar{u} + lV| + C,$$

则得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{2\beta_0}{kl}\left\{V - \frac{\omega - k\bar{u}}{l^2}\ln|\omega - k\bar{u} + lV|\right\} + A, \tag{9.511}$$

其中 A 为积分常数.

考虑(9.510)式，上式可改写为

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{2\beta_0}{kl}\left\{V - \frac{\omega - k\bar{u}}{l}\ln\left(1 + \frac{lV}{\omega - k\bar{u}}\right)\right\} + B, \tag{9.512}$$

B 为任意常数.

对方程(9.512)准确求解几乎是不可能的. 但上式的对数项中，若近似应用

(9.505)式，即得 $lV/(\omega-k\bar{u})=-klV/\beta_0$，则对于长波($k\to 0$)这是一个小量，因而将 $\ln\left(1+\frac{lV}{\omega-k\bar{u}}\right)$作幂级数展开：

$$\ln\left(1+\frac{lV}{\omega-k\bar{u}}\right)=\frac{lV}{\omega-k\bar{u}}-\frac{1}{2}\left(\frac{lV}{\omega-k\bar{u}}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{lV}{\omega-k\bar{u}}\right)^3-\cdots,\quad(9.513)$$

代入到方程(9.512)，并取到包含 V^3 的项为止，则方程(9.512)化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}\right)^2=-\frac{2}{3}\frac{\beta_0 l}{k(\omega-k\bar{u})^2}P(V),\quad(9.514)$$

其中

$$P(V)\equiv V^3-\frac{3}{2}\cdot\frac{\omega-k\bar{u}}{l}V^2+A_1\quad(9.515)$$

是 V 的三次多项式，A_1 是任意常数.

将(9.514)式两边对 θ 微商一次，并令$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}\neq 0$，得

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{\beta_0 l}{k(\omega-k\bar{u})^2}V^2-\frac{\beta_0}{k(\omega-k\bar{u})}V=0.\quad(9.516)$$

将上式再对 θ 微商一次得

$$\frac{\mathrm{d}^3V}{\mathrm{d}\theta^3}+\frac{2\beta_0 l}{k(\omega-k\bar{u})^2}V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}-\frac{\beta_0}{k(\omega-k\bar{u})}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}=0,\quad(9.517)$$

这是 KdV 方程所对应的常微分方程. 由上式或(9.514)式解得

$$V(\theta)=V_2+(V_1-V_2)\mathrm{cn}^2\sqrt{\frac{\beta_0 l(V_1-V_3)}{6k(\omega-k\bar{u})^2}}\theta\quad(9.518)$$

或

$$v(x,y,t)=V_2+(V_1-V_2)\mathrm{cn}^2\sqrt{\frac{\beta_0 l(V_1-V_3)}{6k(\omega-k\bar{u})^2}}(kx+ly-\omega t),\quad(9.519)$$

其中 V_1,V_2,V_3 是 $F(V)$的三个实零点，且设

$$V_1>0,\quad V_2<0,\quad V_3<V_2<0.\quad(9.520)$$

(9.519)式表征的是 Rossby 椭圆余弦波，其 x 方向的波长为

$$L=\frac{2}{k}\sqrt{\frac{6k(\omega-k\bar{u})^2}{\beta_0 l(V_1-V_3)}}\mathrm{K}(m),\quad(9.521)$$

其中 $K(m)$是第一类 Legendre 完全积分，模数 m 满足

$$m^2=(V_1-V_2)/(V_1-V_3).\quad(9.522)$$

考虑到 $P(V)=0$ 的根与系数的关系有

$$V_1+V_2+V_3=3(\omega-k\bar{u})/2l<0,\quad(9.523)$$

从而求得

$$\omega-k\bar{u}=2l(V_1+V_2+V_3)/3.\quad(9.524)$$

由此求得 x 方向的波速

$$c \equiv \frac{\omega}{k} = \bar{u} + \frac{2l}{3k}(V_1 + V_2 + V_3). \tag{9.525}$$

根据(9.521)式和(9.524)式可确定圆频率 ω，取 $L=2\pi/k$，则求得非线性 Rossby 波的圆频率为

$$\omega = k\bar{u} + \frac{\beta_0}{k} \cdot \frac{\pi^2}{4\mathrm{K}^2(m)}\left(\frac{V_1 - V_3}{V_1 + V_2 + V_3}\right). \tag{9.526}$$

由(9.519)式，当振幅 $V_1 - V_2 \to 0$ 时，因 $V_1>0, V_2<0$，则

$$V_1 \to V_2 \to 0. \tag{9.527}$$

又此时，由(9.522)式有

$$m \to 0, \quad \mathrm{K}(m) \to \pi/2, \tag{9.528}$$

则代入(9.526)式得

$$\omega = k\bar{u} - \beta_0/k, \tag{9.529}$$

这就是(9.505)式. 同样在 $V_2 = V_3 = 0$ 时，我们可求得 Rossby 孤立波.

我们也可以换一种方式得到上述结果. 令

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} \equiv W, \tag{9.530}$$

则(9.509)式改写为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\beta_0 V}{k(\omega - k\bar{u} + lV)} \equiv F(V), \\ \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = W, \end{cases} \tag{9.531}$$

其中 $F(V)$ 是 V 的非线性函数. 方程组(9.531)的平衡点为

$$(V, W) = (0, 0).$$

将 $F(V)$ 在平衡点附近作幂级数展开有

$$F(V) = \frac{\beta_0}{k(\omega - k\bar{u})}V - \frac{\beta_0 l}{k(\omega - k\bar{u})^2}V^2 + \cdots. \tag{9.532}$$

若只取 $F(V)$ 右端的线性部分代替 $F(V)$，则(9.531)式化为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\beta_0}{k(\omega - k\bar{u})}V, \\ \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = W. \end{cases} \tag{9.533}$$

显然，它表征线性 Rossby 波.

若取 $F(V)$ 右端到二次项，则(9.531)式化为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\beta_0}{k(\omega - k\bar{u})}V - \dfrac{\beta_0 l}{k(\omega - k\bar{u})^2}V^2, \\ \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = W. \end{cases} \tag{9.534}$$

由上式有

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}=-\frac{\beta_0 l}{k(\omega-k\bar{u})^2}V^2+\frac{\beta_0}{k(\omega-k\bar{u})}V, \tag{9.535}$$

将它对 θ 微商一次有

$$\frac{d^3V}{d\theta^3}+\frac{2\beta_0 l}{k(\omega-k\bar{u})^2}V\frac{dV}{d\theta}-\frac{\beta_0}{k(\omega-k\bar{u})}\frac{dV}{d\theta}=0, \tag{9.536}$$

这就是(9.517)式.

值得注意的是：如果(9.513)式或(9.532)式右端再多取一项，则得到的将是 Gardner 方程(即混合的 KdV-mKdV 方程)所对应的常微分方程.

§ 9.14 Bäcklund 变换

Bäcklund 变换是解非线性方程的一种特殊方法. 其主要思想是：对某个非线性方程，设法找到它的两个解 $u_0(x,t)$ 和 $u(x,t)$ 之间的一组关系：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=P\left(u,u_0,\dfrac{\partial u_0}{\partial t},\dfrac{\partial u_0}{\partial x},x,t\right),\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial x}=Q\left(u,u_0,\dfrac{\partial u_0}{\partial t},\dfrac{\partial u_0}{\partial x},x,t\right).\end{cases} \tag{9.537}$$

从而我们可根据某个已知的解 $u_0(x,t)$ 找到非线性方程的另一个解 $u(x,t)$，且可以反复运用，从而又可求出非线性方程的一系列新解. 方程(9.537)即称为某个非线性方程的 Bäcklund 变换.

我们先以正弦-Gordon 方程为例来说明. 对于正弦-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f_0^2\sin u=0 \tag{9.538}$$

作变换

$$\xi=\frac{\lambda_0}{2}(x-c_0t),\quad \eta=\frac{\lambda_0}{2}(x+c_0t)\quad \left(\lambda_0\equiv\frac{f_0}{c_0}\right), \tag{9.539}$$

则方程(9.538)化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\sin u. \tag{9.540}$$

方程(9.540)通常也称为正弦-Gordon 方程.

设 u,u_0 都满足方程(9.540)，即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\sin u,\\[2mm] \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial\xi\partial\eta}=\sin u_0,\end{cases} \tag{9.541}$$

把这两个方程相加和相减，得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\left(\dfrac{u+u_0}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(\sin u+\sin u_0)=\sin\dfrac{u+u_0}{2}\cos\dfrac{u-u_0}{2},\\ \dfrac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\left(\dfrac{u-u_0}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(\sin u-\sin u_0)=\cos\dfrac{u+u_0}{2}\sin\dfrac{u-u_0}{2}.\end{cases}\tag{9.542}$$

对正弦-Gordon 方程，若作下列 Bäcklund 变换：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=\dfrac{\partial u_0}{\partial\xi}+2\lambda\sin\dfrac{u+u_0}{2},\\ \dfrac{\partial u}{\partial\eta}=-\dfrac{\partial u_0}{\partial\eta}+\dfrac{2}{\lambda}\sin\dfrac{u-u_0}{2},\end{cases}\tag{9.543}$$

其中 λ 为参数. 将(9.543)的两式分别对 η 和 ξ 微商就得到(9.542)式.

Bäcklund 变换(9.543)把正弦-Gordon 方程的两个解连结起来，从而可以根据已知的一个解求正弦-Gordon 方程的另一个解. 显然 $u_0=0$ 是正弦-Gordon 方程(9.540)的一个平凡解，则以 $u_0=0$ 代入 Bäcklund 变换(9.543)，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=2\lambda\sin\dfrac{u}{2},\\ \dfrac{\partial u}{\partial\eta}=\dfrac{2}{\lambda}\sin\dfrac{u}{2}.\end{cases}\tag{9.544}$$

将(9.544)的两式分别对 ξ,η 积分，得

$$\begin{cases}\ln\tan\dfrac{u}{4}=\lambda\xi+G(\eta),\\ \ln\tan\dfrac{u}{4}=\dfrac{1}{\lambda}\eta+F(\xi).\end{cases}\tag{9.545}$$

因(9.545)的两式左边完全一样，因而两式右边也应相同，则有

$$G(\eta)-\frac{1}{\lambda}\eta=F(\xi)-\lambda\xi=\delta(\text{常数}).\tag{9.546}$$

若取 $\delta=0$，则有

$$G(\eta)=\frac{1}{\lambda}\eta,\quad F(\xi)=\lambda\xi.\tag{9.547}$$

这样，方程组(9.545)化为

$$\ln\tan\frac{u}{4}=F(\xi)+G(\eta)=\lambda\xi+\frac{1}{\lambda}\eta.\tag{9.548}$$

从而求得

$$u=4\arctan\left(\exp\left\{\lambda\xi+\frac{1}{\lambda}\eta\right\}\right).\tag{9.549}$$

若取

$$\lambda^2=(c_0+c)/(c_0-c),\quad c<c_0,\tag{9.550}$$

并将其代入(9.549)式,得到

$$u=4\arctan\left\{\exp\left(\pm\sqrt{\frac{c_0+c}{c_0-c}}\cdot\frac{\lambda_0}{2}(x-c_0t)\pm\sqrt{\frac{c_0-c}{c_0+c}}\cdot\frac{\lambda_0}{2}(x+c_0t)\right)\right\}$$

$$=4\arctan\left\{\exp\left[\frac{\pm\lambda_0(c_0+c)\left(\frac{x-c_0t}{2}\right)\pm\lambda_0(c_0-c)\left(\frac{x+c_0t}{2}\right)}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right]\right\}$$

$$=4\arctan\left(\exp\left\{\pm\frac{f_0}{\sqrt{c_0^2-c^2}}(x-ct)\right\}\right)\quad(c<c_0),\tag{9.551}$$

这就是正弦-Gordon 方程的扭结孤立波解,即是(9.257)式.

若取 $u_0=\pi$(显然它也满足方程(9.540)),并取 $\lambda^2=(c+c_0)/(c-c_0)(c>c_0)$,则类似求得

$$u=-\pi+4\arctan\left(\exp\left\{\pm\frac{f_0}{\sqrt{c^2-c_0^2}}(x-ct)\right\}\right),\quad c>c_0,\tag{9.552}$$

这是正弦-Gordon 方程的另一扭结孤立波解,即是(9.261)式.

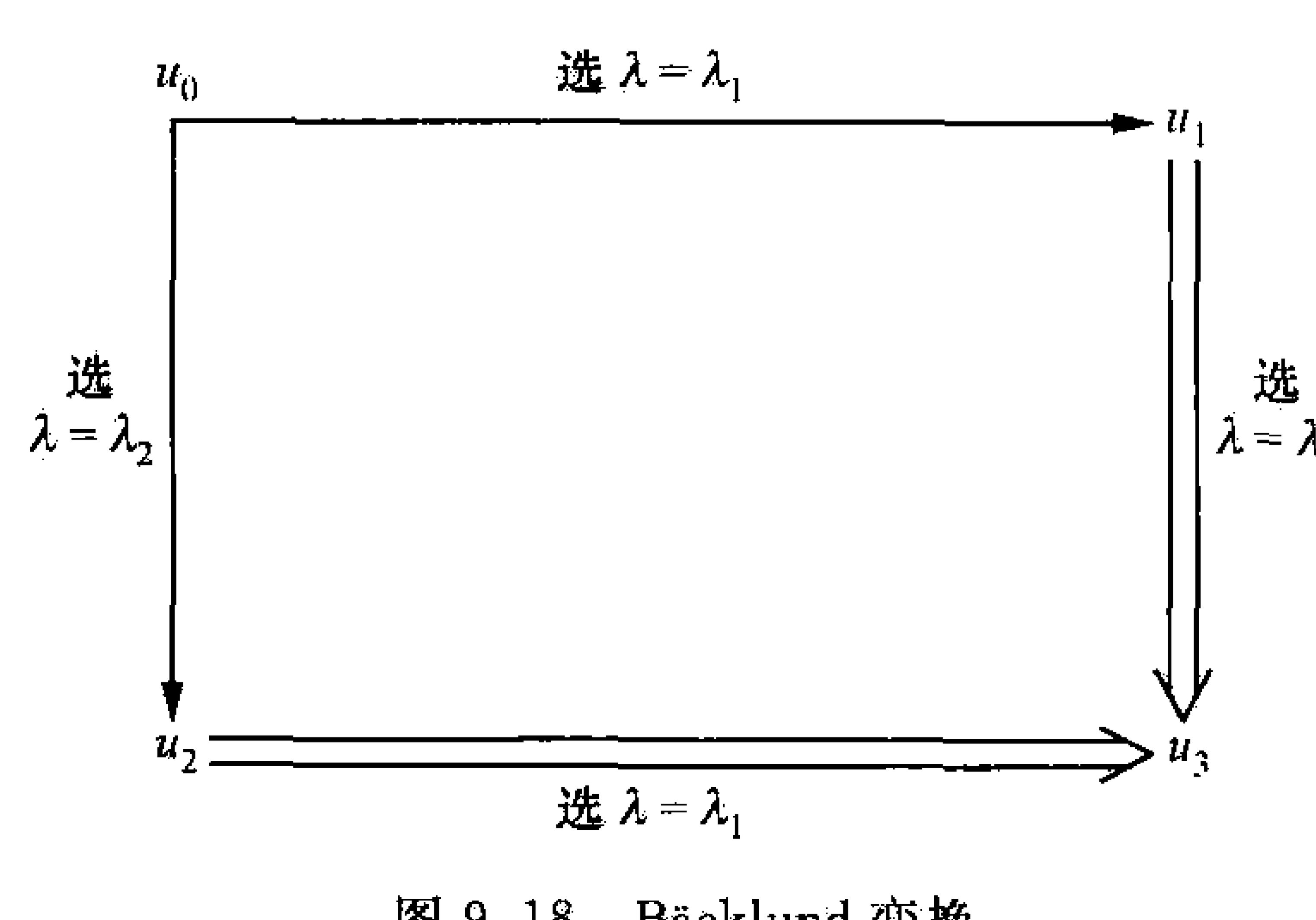


图 9.18 Bäcklund 变换

利用 Bäcklund 变换,我们由 u_0 求得了 u,同样,根据这个 u 还可以求出新的解. 我们设想:由 u_0,利用 Bäcklund 变换(9.543),分别选参数 $\lambda=\lambda_1$ 和 $\lambda=\lambda_2$ 而求得 u_1 和 u_2;再由这个 u_1 和 u_2,分别选参数 $\lambda=\lambda_2$ 和 $\lambda=\lambda_1$ 可又求得 u_3 和 u_4;若选择合适的积分常数,可使 $u_3=u_4$. 上述设想见图 9.18.

按照上述构思,则由 Bäcklund 变换(9.543)的第一式有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial\xi}=\dfrac{\partial u_0}{\partial\xi}+2\lambda_1\sin\dfrac{u_1+u_0}{2},\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial\xi}=\dfrac{\partial u_0}{\partial\xi}+2\lambda_2\sin\dfrac{u_2+u_0}{2},\\ \dfrac{\partial u_3}{\partial\xi}=\dfrac{\partial u_1}{\partial\xi}+2\lambda_2\sin\dfrac{u_3+u_1}{2},\\ \dfrac{\partial u_3}{\partial\xi}=\dfrac{\partial u_2}{\partial\xi}+2\lambda_1\sin\dfrac{u_3+u_2}{2}.\end{cases}\tag{9.553}$$

上述性质称为 Bäcklund 变换的可交换性,最早是由 Bianchi 于 1879 年证明.

将方程组(9.553)的第一、三两式相加,第二、四两式相加,分别得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\xi}(u_3-u_0)=2\left(\lambda_1\sin\dfrac{u_1+u_0}{2}+\lambda_2\sin\dfrac{u_3+u_1}{2}\right),\\ \dfrac{\partial}{\partial\xi}(u_3-u_0)=2\left(\lambda_1\sin\dfrac{u_3+u_2}{2}+\lambda_2\sin\dfrac{u_2+u_0}{2}\right).\end{cases} \tag{9.554}$$

因(9.554)的两式左边相同，因而其右边应相等，则得

$$\lambda_1\left(\sin\frac{u_1+u_0}{2}-\sin\frac{u_3+u_2}{2}\right)=\lambda_2\left(\sin\frac{u_2+u_0}{2}-\sin\frac{u_3+u_1}{2}\right). \tag{9.555}$$

利用三角函数的和差化积公式，上式化为

$$\lambda_1\sin\frac{(u_3-u_0)-(u_1-u_2)}{4}=\lambda_2\sin\frac{(u_3-u_0)+(u_1-u_0)}{4}$$

或

$$\tan\frac{u_3-u_0}{4}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\tan\frac{u_1-u_2}{4}, \tag{9.556}$$

上式称为正弦-Gordon 方程解的非线性叠加公式. 由这个叠加公式，我们可以只应用纯代数的运算就可以根据 u_0, u_1 和 u_2 找到正弦-Gordon 方程的一个新解 u_3. 公式(9.556)也可以根据 Bäcklund 变换(9.543)的第二式得到.

若取 $u_0=0$，则由解的非线性叠加公式(9.556)得到

$$\tan\frac{u_3}{4}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\tan\frac{u_1-u_2}{4}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot\frac{\tan\frac{u_1}{4}-\tan\frac{u_2}{4}}{1+\tan\frac{u_1}{4}\cdot\tan\frac{u_2}{4}} \tag{9.557}$$

或

$$u_3=4\arctan\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\tan\frac{u_1-u_2}{4}\right)=4\arctan\left[\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot\frac{\tan\frac{u_1}{4}-\tan\frac{u_2}{4}}{1+\tan\frac{u_1}{4}\cdot\tan\frac{u_2}{4}}\right]. \tag{9.558}$$

下面我们举两例说明解的非线性叠加公式的应用.

[例 1] 两个不同方向前进的扭结孤立波的相互作用.

根据(9.550)式，我们取

$$\lambda_1=\sqrt{(c_0+c)/(c_0-c)},\quad 0<c<c_0, \tag{9.559}$$

则求得一个向 x 正方向前进的扭结孤立波解为

$$\tan\frac{u_1}{4}=\exp\left\{\frac{f_0}{\sqrt{c_0^2-c^2}}(x-ct)\right\}. \tag{9.560}$$

类似，我们取

$$\lambda_2=1/\lambda_1=\sqrt{(c_0-c)/(c_0+c)}, \tag{9.561}$$

求得一个向 x 负方向前进的扭结孤立波解为

$$\tan\frac{u_2}{4}=\exp\left\{\frac{f_0}{\sqrt{c_0^2-c^2}}(x+ct)\right\}. \tag{9.562}$$

将(9.560)式和(9.562)式代入(9.558)式，得

$$\tan\frac{u_3}{4}=\frac{\lambda_1+\frac{1}{\lambda_1}}{\lambda_1-\frac{1}{\lambda_1}}\cdot\frac{\exp\left\{\frac{f_0(x-ct)}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right\}-\exp\left\{\frac{f_0(x+ct)}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right\}}{1+\exp\left\{\frac{f_0(x-ct)}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right\}\cdot\exp\left\{\frac{f_0(x+ct)}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right\}}$$

$$=\frac{\lambda_1^2+1}{\lambda_1^2-1}\cdot\frac{\exp\left\{\frac{f_0x}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right\}\left(\exp\left\{-\frac{f_0ct}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right\}-\exp\left\{\frac{f_0ct}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right\}\right)}{1+\exp\left\{\frac{2f_0x}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right\}}$$

$$=\frac{c_0}{c}\cdot\frac{-2\sinh\frac{f_0ct}{\sqrt{c_0^2-c^2}}}{2\cosh\frac{f_0x}{\sqrt{c_0^2-c^2}}}=-\frac{c_0}{c}\cdot\frac{\sinh\frac{f_0ct}{\sqrt{c_0^2-c^2}}}{\cosh\frac{f_0x}{\sqrt{c_0^2-c^2}}}, \tag{9.563}$$

上式称为正弦-Gordon 方程的双孤立子解.

[例 2]　两个不同方向前进的正、反扭结孤立波的相互作用.

仿[例 1]，我们有

$$\begin{cases}\lambda_1=\sqrt{(c_0+c)/(c_0-c)}, & \tan\frac{u_1}{4}=\exp\left\{\frac{f_0(x-ct)}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right\},\\ \lambda_2=-\frac{1}{\lambda_1}, & \tan\frac{u_2}{4}=\exp\left\{-\frac{f_0(x+ct)}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right\}.\end{cases} \tag{9.564}$$

将它们代入(9.557)式得到

$$\tan\frac{u_3}{4}=\frac{\lambda_1-\frac{1}{\lambda_1}}{\lambda_1+\frac{1}{\lambda_1}}\cdot\frac{\exp\left\{\frac{f_0(x-ct)}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right\}-\exp\left\{-\frac{f_0(x+ct)}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right\}}{1+\exp\left\{\frac{f_0(x-ct)}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{f_0(x+ct)}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right\}}$$

$$=\frac{c}{c_0}\cdot\frac{\exp\left\{-\frac{f_0ct}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right\}\cdot 2\sinh\frac{f_0x}{\sqrt{c_0^2-c^2}}}{1+\exp\left\{-\frac{2f_0ct}{\sqrt{c_0^2-c^2}}\right\}}=\frac{c}{c_0}\,\frac{\sinh\frac{f_0x}{\sqrt{c_0^2-c^2}}}{\cosh\frac{f_0ct}{\sqrt{c_0^2-c^2}}}, \tag{9.565}$$

这也是正弦-Gordon 方程的一个双孤立子解.

对于 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{9.566}$$

也可以找到它的 Bäcklund 变换. 首先通过变换

$$x=\beta^{1/3}x_1,\quad u=-6\alpha^{-1}\beta^{1/3}u_1, \tag{9.567}$$

KdV 方程可化为下列简洁的形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0, \tag{9.568}$$

其中 u_1, x_1 又分别记成了 u 和 x.

KdV 方程(9.568)很易写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(-3u^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=0. \tag{9.569}$$

再令

$$u\equiv\partial w/\partial x, \tag{9.570}$$

则 KdV 方程(9.569)化为

$$\frac{\partial w}{\partial t}=3u^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=3\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \tag{9.571}$$

上式也常称为 KdV 方程. 若取$\left(\text{参见下一节的(9.576)式,取 } u=\frac{\partial w}{\partial x}, v=\frac{1}{2}w, \lambda=-k^2\right)$

$$u\equiv\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{2}w^2-2k^2, \tag{9.572}$$

其中 k 为参数. 则由上式有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=w\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+w^2\frac{\partial w}{\partial x},$$

因而

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t}&=3\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-w^2\frac{\partial w}{\partial x}=2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-w^2\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}\left(2\frac{\partial w}{\partial x}-w^2\right)\\&=-4k^2\frac{\partial w}{\partial x}=-4k^2\left(\frac{1}{2}w^2-2k^2\right).\end{aligned} \tag{9.573}$$

所以,由方程(9.572)和(9.573)构成的下列系统

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{1}{2}w^2-2k^2=u,\\[2mm]\dfrac{\partial w}{\partial t}=-4k^2\left(\dfrac{1}{2}w^2-2k^2\right)=-4k^2u\end{cases} \tag{9.574}$$

满足 KdV 方程(9.571).

设 w, w_0 都满足 KdV 方程(9.571),即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=3u^2-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad\left(u=\dfrac{\partial w}{\partial x}\right),\\[2mm]\dfrac{\partial w_0}{\partial t}=3u_0^2-\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\quad\left(u_0=\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right),\end{cases} \tag{9.575}$$

则可以找到 KdV 方程(9.571)的 Bäcklund 变换为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial x}=-\dfrac{\partial w_0}{\partial x}+\dfrac{1}{2}(w-w_0)^2-2k^2,\\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial t}=-\dfrac{\partial w_0}{\partial t}-4k^2u+2u_0^2+u_0(w-w_0)^2+2(w-w_0)\dfrac{\partial u_0}{\partial x}.\end{cases} \tag{9.576}$$

这里要说明的是上述 Bäcklund 变换可以视为是方程组(9.574)的推广，因为，在(9.576)式中令 $w_0=0$，$u_0=0$ 就转化为(9.574)式. 事实上，可以认为(9.576)的第一式为(9.574)的第一式的推广，而(9.576)的第二式是由(9.576)的第一式代入到方程组(9.575)得到的. 因为由(9.575)式有

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial w_0}{\partial t}+3u^2+3u_0^2-\frac{\partial^2(u+u_0)}{\partial x^2}. \tag{9.577}$$

但由(9.576)的第一式，有

$$u+u_0=\frac{1}{2}(w-w_0)^2-2k^2,$$

因而，

$$\frac{\partial}{\partial x}(u+u_0)=(w-w_0)\frac{\partial}{\partial x}(w-w_0)=(u-u_0)(w-w_0),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u+u_0)&=\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+(w-w_0)\frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2}\\&=\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+(w-w_0)\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2}-2(w-w_0)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\\&=(u-u_0)^2+(w-w_0)\frac{\partial}{\partial x}(u+u_0)-2(w-w_0)\frac{\partial u_0}{\partial x}\\&=(u-u_0)^2+(u-u_0)(w-w_0)^2-2(w-w_0)\frac{\partial u_0}{\partial x}.\end{aligned}$$

这样，代入(9.577)式有

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t}&=-\frac{\partial w_0}{\partial t}+3u^2+3u_0^2-(u-u_0)^2-(u-u_0)(w-w_0)^2+2(w-w_0)\frac{\partial u_0}{\partial x}\\&=-\frac{\partial w_0}{\partial t}+2u(u+u_0)+2u_0^2-u(w-w_0)^2+u_0(w-w_0)^2+2(w-w_0)\frac{\partial u_0}{\partial x}\\&=-\frac{\partial w_0}{\partial t}-4k^2u+2u_0^2+u_0(w-w_0)^2+2(w-w_0)\frac{\partial u_0}{\partial x},\end{aligned}$$

这就是(9.576)的第二式.

显然 $w_0=0$ 是 KdV 方程(9.571)的一个平凡解，以 $w_0=0$ 代入 Bäcklund 变换(9.576)就得到方程组(9.574). 由方程组(9.574)有

$$\frac{\partial w}{\partial t}+4k^2\frac{\partial w}{\partial x}=0. \tag{9.578}$$

这个方程的通解为

$$w = f(x - 4k^2 t). \tag{9.579}$$

若设

$$w|_{t=0} = -2k\tanh(kx), \tag{9.580}$$

相应

$$u|_{t=0} = -2k^2\operatorname{sech}^2(kx), \tag{9.581}$$

则由(9.579)式求得

$$w = -2k\tanh[k(x - 4k^2 t)], \tag{9.582}$$

相应

$$u = -2k^2\operatorname{sech}^2[k(x - 4k^2 t)], \tag{9.583}$$

这就是 KdV 方程的单孤立波解.

类似正弦-Gordon 方程,我们可以建立 KdV 方程(9.571)的解的非线性叠加公式.由(9.576)的第一式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial x} = -\dfrac{\partial w_0}{\partial x} + \dfrac{1}{2}(w_1 - w_0)^2 - 2k_1^2, \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial x} = -\dfrac{\partial w_0}{\partial x} + \dfrac{1}{2}(w_2 - w_0)^2 - 2k_0^2, \\ \dfrac{\partial w_3}{\partial x} = -\dfrac{\partial w_1}{\partial x} + \dfrac{1}{2}(w_3 - w_1)^2 - 2k_2^2, \\ \dfrac{\partial w_3}{\partial x} = -\dfrac{\partial w_2}{\partial x} + \dfrac{1}{2}(w_3 - w_2)^2 - 2k_1^2, \end{cases} \tag{9.584}$$

它类似于正弦-Gordon 方程的(9.553)式.

将方程组(9.584)的第一、三两式相减,第二、四两式相减,分别得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_3}{\partial x} - \dfrac{\partial w_0}{\partial x} = \dfrac{1}{2}(w_3 - w_1)^2 - \dfrac{1}{2}(w_1 - w_0)^2 - 2k_2^2 + 2k_1^2, \\ \dfrac{\partial w_3}{\partial x} - \dfrac{\partial w_0}{\partial x} = \dfrac{1}{2}(w_3 - w_2)^2 - \dfrac{1}{2}(w_2 - w_0)^2 - 2k_1^2 + 2k_2^2. \end{cases} \tag{9.585}$$

因(9.585)的两式左边相等,因而其右边应相等,则得

$$\frac{1}{2}(w_3 - w_1)^2 - \frac{1}{2}(w_1 - w_0)^2 - \frac{1}{2}(w_3 - w_2)^2 + \frac{1}{2}(w_2 - w_0)^2 = 4(k_2^2 - k_1^2),$$

即

$$(w_3 - w_0)(w_2 - w_1) = 4(k_2^2 - k_1^2).$$

则

$$w_3 = w_0 + \frac{4(k_2^2 - k_1^2)}{w_2 - w_1} = w_0 + \frac{4(k_1^2 - k_2^2)}{w_1 - w_2}, \tag{9.586}$$

这就是 KdV 方程(9.571)的解的非线性叠加公式.

若选 $w_0=0$，则上式化为

$$w_3=\frac{4(k_1^2-k_2^2)}{w_1-w_2},\tag{9.587}$$

利用它可根据 w_1 和 w_2 求 KdV 方程的新解 w_3.

§9.15　散射反演法(inverse scattering method)

本节的目的主要是解下列 KdV 方程的初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-6u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 & (-\infty<x<+\infty,t>0),\\ u|_{t=0}=u_0(x) & (-\infty<x<+\infty).\end{cases}\tag{9.588}$$

因为线性方程解的叠加原理对非线性方程不再成立，因而求解问题(9.588)不能再用传统的积分变换法. 这里介绍的是利用 Schrödinger 方程的本征值问题及其反演求解问题(9.588)，它称为散射反演法.

对于非线性方程的初值问题，人们早就设想：能否通过某种非线性变换将它化为线性方程的初值问题去求解. 例如，对于 Burgers 方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ u|_{t=0}=u_0(x),\end{cases}\tag{9.589}$$

Hopf(1950 年)和 Cole(1951 年)就提出用非线性变换

$$u=-2\nu\frac{\partial\ln\psi}{\partial x}=-2\nu\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\tag{9.590}$$

将 Burgers 方程的初值问题(9.589)化为下列一维线性热传导方程(或扩散方程)的初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=\nu\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2},\\ \psi|_{t=0}=\psi_0(x)=\exp\left\{-\dfrac{1}{2\nu}\displaystyle\int_0^x u_0(\xi)\delta\xi\right\}.\end{cases}\tag{9.591}$$

这是因为 Cole-Hopf 变换(9.590)等价于

$$u=\frac{\partial w}{\partial x},\quad w=-2\nu\ln\psi.\tag{9.592}$$

因而，Cole-Hopf 变换分为两步：第一步，令 $u=\partial w/\partial x$，则问题(9.589)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\nu\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3},\\ w|_{t=0}=\displaystyle\int_0^x u_0(\xi)\delta\xi.\end{cases}\tag{9.593}$$

再将 w 的方程对 x 积分一次，则问题(9.593)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2=\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\\ w\,|_{t=0}=\displaystyle\int_0^x u_0(\xi)\delta\xi.\end{cases} \tag{9.594}$$

第二步，令 $w=-2\nu\ln\psi$，注意

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-2\nu\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t},\quad \frac{\partial w}{\partial x}=-2\nu\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-2\nu\frac{1}{\psi^2}\left[\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right],$$

则问题(9.594)便化成了问题(9.591)．所以，Burgers 方程的初值问题可以通过 Cole-Hopf 变换化为热传导方程的初值问题．

受上述 Cole-Hopf 变换的启发，人们企图找到类似于 Cole-Hopf 变换的变换化 KdV 方程的初值问题(9.588)为线性方程的初值问题．考虑到 Burgers 方程中 u 对 x 的微商最高是$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，而 KdV 方程中是$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$，因而，自然想到作变换

$$u=\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

但这样做不能成功．1967 年，Gardner, Greene, Kruskal 和 Miura 选择了下列变换

$$u=\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\lambda(t), \tag{9.595}$$

它称为 GGKM 变换，如令 $v=\dfrac{\partial\ln\psi}{\partial x}$，则 GGKM 变换也可改写为

$$u=\frac{\partial v}{\partial x}+v^2+\lambda(t). \tag{9.596}$$

这样就有

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+(\lambda-u)\psi=0, \tag{9.597}$$

这是 Schrödinger 方程的本征值问题．其中 ψ 相当于波函数，u 为势能，λ 为本征值．这里与量子力学不同，u 是 KdV 方程的解，与时间有关，而且 λ 也与时间有关．

在上述(9.596)式的变换下，如何求解问题(9.588)呢？它可分为三步：第一步，先将初值 $u_0(x)$作为势能，在一定条件下，解 Schrödinger 方程(9.597)的本征值问题，求出与 $u_0(x)$相应的 $\lambda|_{t=0}=\lambda(0)$和 $\psi|_{t=0}=\psi(x,0)$；第二步，将变换(9.596)代入 KdV 方程，在一定的条件下找到 λ 和 ψ 随时间 t 的演化关系；第三步，由 $\lambda(t)$和 $\psi(x,t)$通过散射反演求 $u(x,t)$．这就是所谓散射反演法．这种求解过程类似于用积分变换法(Fourier 变换或 Laplace 变换)求解线性偏微分方程的初值问题．第一步相当于对方程和初条件作积分变换，第二步相当于求解变换所满足的常微分方程，第三步相当于求逆变换．下面，我们具体写出求解问题(9.588)的过程：

(1) 对给定的势能 $u_0(x)$，求解 Schrödinger 方程(9.597)满足条件

$$|x| \to \infty, \quad \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x} \to 0 \tag{9.598}$$

的本征值问题，确定 $\lambda(0)$ 和 $\psi(x,0)$，即求解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi(x,0)}{\partial x^2} + (\lambda(0) - u_0(x))\psi(x,0) = 0, \\ \psi(x,0) \to 0, \quad \dfrac{\partial \psi(x,0)}{\partial x} \to 0 \quad (|x| \to \infty). \end{cases} \tag{9.599}$$

对于一般 Schrödinger 方程的本征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (\lambda - u)\psi = 0, \\ \psi\Big|_{|x| \to \infty} \to 0, \quad \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\Big|_{|x| \to \infty} \to 0, \end{cases} \tag{9.600}$$

只要满足条件

$$u\,|_{|x| \to \infty} \to 0,$$

则可以定得：当 $\lambda<0$ 时，存在有限个束缚态，即

$$\lambda_n = -k_n^2 \quad (n = 1,2,\cdots,N). \tag{9.601}$$

相应本征函数是

$$\psi_n(x,t) = c_n(t)e^{-k_n x}, \quad x \to +\infty. \tag{9.602}$$

这里，我们假定 ψ_n 满足正交归一化条件，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 \delta x = 1. \tag{9.603}$$

当 $\lambda>0$ 时，是连续状态，即

$$\lambda = k^2 > 0, \tag{9.604}$$

此时，ψ 与波的传输有关. 我们假定一个振幅为 1 的定常平面波 e^{-ikx} 从 $x=+\infty$ 进入遇到势垒 $u(x,t)$，其中一部分以 $a(k,t)e^{-ikx}$ 进入 $x=-\infty$（$a(k,t)$ 称为透明系数），另一部分以 $b(k,t)e^{-kx}$ 被反射返回 $x=+\infty$（$b(k,t)$ 称为反射系数），因而

$$\psi(x,t) = a(k,t)e^{-ikx}, \quad x \to -\infty, \tag{9.605}$$

$$\psi(x,t) = e^{-ikx} + b(k,t)e^{ikx}, \quad x \to +\infty. \tag{9.606}$$

其中 a,b 满足能量守恒定律（入射波的能量等于反射波与透射波能量之和），即

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{9.607}$$

在前面诸式中，$k_n, c_n(t), a(k,t), b(k,t)$ 统称为散射参数.

据上分析，对于本征值问题(9.599)有

$$\begin{cases} \psi_n(x,0) = c_n(0)e^{-k_n x}, & x \to +\infty, \\ \psi(x,0) = a(k,0)e^{-ikx}, & x \to -\infty, \\ \psi(x,0) = e^{-ikx} + b(k,0)e^{ikx}, & x \to +\infty, \end{cases} \tag{9.608}$$

因而由 $u_0(x)$ 可确定 $k_n(0), c_n(0), a(k,0), b(k,0)$ 等散射参数.

(2) 导出任意时刻的散射参数与初始散射参数之间的关系.将(9.596)式代入KdV方程((9.588)的第一式),注意

$$\begin{cases}\psi^2\dfrac{\partial u}{\partial t}=\psi^2\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\psi\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}-\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right),\\ \psi^2\left(-6u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\psi\dfrac{\partial S}{\partial x}-S\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)\quad\left(S\equiv\dfrac{\partial^3\psi}{\partial x^3}-3(u+\lambda)\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right),\end{cases}\tag{9.609}$$

则求得

$$\psi^2\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial Q}{\partial x}-Q\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=0,\tag{9.610}$$

其中

$$Q\equiv\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}-3(u+\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial x}.\tag{9.611}$$

将(9.610)式对 x 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分有

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2\delta x+\left[\psi\frac{\partial Q}{\partial x}-Q\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{-\infty}^{\infty}=0,\tag{9.612}$$

利用边条件(9.598),注意 $\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2\delta x=$ 有限值,则得到

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=0.\tag{9.613}$$

它说明,本征值 λ 与时间无关.这样,由 $u_0(x)$ 求得的 $\lambda(0)$ 就是 $\lambda(t)$,即

$$\lambda(t)=\lambda(0).\tag{9.614}$$

将(9.613)式代入(9.610)式,得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial Q}{\partial x}-Q\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=0.\tag{9.615}$$

因而

$$\psi\frac{\partial Q}{\partial x}-Q\frac{\partial\psi}{\partial x}=D(t),\tag{9.616}$$

上式可改写为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{\psi}\right)=\frac{D(t)}{\psi^2}.\tag{9.617}$$

积分上式得

$$Q=D(t)\psi\int_0^x\frac{1}{\psi^2}\delta x+E(t)\psi,\tag{9.618}$$

注意(9.611)式,则上式可确定 ψ 的时间演变.

对离散谱,$\lambda_n=-k_n^2$,由(9.613)式,$\dfrac{\mathrm{d}\lambda_n}{\mathrm{d}t}=0$,因而

$$k_n(t) = k_n(0). \tag{9.619}$$

取 $\psi=\psi_n$，则(9.618)式化为

$$Q_n = D_n(t)\psi_n\int_0^x \frac{1}{\psi_n^2}\delta x + E_n(t)\psi_n. \tag{9.620}$$

但由(9.602)式，$\frac{1}{\psi_n^2}=\frac{1}{c_n^2(t)}e^{2k_n x}\to+\infty(x\to+\infty)$，因而，为了使 Q_n 有意义，我们选取 $D_n=0$，则(9.620)式化为

$$Q_n(t) = E_n(t)\psi_n. \tag{9.621}$$

将(9.611)式代入上式有

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial t}+\frac{\partial^3\psi_n}{\partial x^3}-3(u+\lambda_n)\frac{\partial\psi_n}{\partial x} = E_n(t)\psi_n. \tag{9.622}$$

将上式两边乘以 ψ_n 有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\psi_n^2\right)+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_n\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2}\right]-3(u+\lambda_n)\psi_n\frac{\partial\psi_n}{\partial x} = E_n(t)\psi_n^2. \tag{9.623}$$

但由(9.595)式，有

$$u\psi_n = \frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2}+\lambda_n\psi_n. \tag{9.624}$$

将(9.624)式代入(9.623)式消去 u 得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\psi_n^2\right)+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_n\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2}\right)-4\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2}\right]-6\lambda_n\psi_n\frac{\partial\psi_n}{\partial x} = E_n(t)\psi_n^2$$

或

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\psi_n^2\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi_n\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\right)^2-3\lambda_n\psi_n^2\right]= E_n(t)\psi_n^2. \tag{9.625}$$

将上式从 $x=-\infty$ 到 $x=+\infty$ 积分，并利用条件(9.598)式，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\psi_n^2\delta x = E_n(t)\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^2\delta x,$$

注意(9.603)式，则由上式得到

$$E_n(t) = 0. \tag{9.626}$$

这样(9.621)式和(9.622)式化为

$$Q_n(t) \equiv \frac{\partial\psi_n}{\partial t}+\frac{\partial^3\psi_n}{\partial x^3}-3(u+\lambda_n)\frac{\partial\psi_n}{\partial x} = 0. \tag{9.627}$$

将(9.602)式代入上式，注意 $x\to\infty$，$u\to 0$，则得

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = 4k_n^3c_n(t). \tag{9.628}$$

积分上式得到

$$c_n(t) = c_n(0)e^{4k_n^3 t}, \tag{9.629}$$

这就是 $c_n(t)$ 的演化规律.

对连续谱，$\lambda = k^2$，将(9.605)式代入(9.618)式，则得

$$\frac{\partial a(k,t)}{\partial t} + 4ik^3 a(h,t) = \frac{D(t)}{a(k,t)}\int_0^x e^{2ikx}\delta x + E(t)a(k,t).$$

因为 $a(k,t)$ 与 x 无关，则可令 $D(t)=0$，因而有

$$\frac{\partial a(k,t)}{\partial t} + [4ik^3 - E(t)]a(k,t) = 0. \tag{9.630}$$

另一方面，将(9.606)式代入(9.618)式，则得

$$e^{ikx}\left[\frac{\partial b(k,t)}{\partial t} - 4ik^3 b(k,t) - E(t)b(k,t)\right] + e^{-ikx}[4ik^3 - E(t)] = 0,$$

因而有

$$E(t) = 4ik^3 \tag{9.631}$$

和

$$\frac{\partial b(k,t)}{\partial t} = 4ik^3 b(k,t) + E(t)b(k,t) = 8ik^3 b(k,t). \tag{9.632}$$

将(9.631)式代入(9.630)式，得到

$$\frac{\partial a(k,t)}{\partial t} = 0 \quad 或 \quad a(k,t) = a(k,0). \tag{9.633}$$

而积分(9.632)式，得到

$$b(k,t) = b(k,0)e^{8ik^3 t}. \tag{9.634}$$

(9.633)式和(9.634)式分别表示 $a(k,t)$，$b(k,t)$ 的演化规律.

总结可知：任意时刻，散射参数的演化规律有

$$\begin{cases} k_n(t) = k_n(0), \\ c_n(t) = c_n(0)e^{4k_n^3 t}, \\ a(k,t) = a(k,0), \\ b(k,t) = b(k,0)e^{8ik^3 t}. \end{cases} \tag{9.635}$$

(3) 散射反演求 $u(x,t)$. 根据量子力学的散射反演理论，对给定初值 $u_0(x)$，求得 KdV 方程的解为

$$u(x,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t), \tag{9.636}$$

其中 $K(x,x,t)$ 是 GLM(Gelfand-Levitan-Marchenko)积分方程

$$K(x,y,t) + B(x+y,t) + \int_x^\infty B(y+z,t)K(x,z,t)\delta z = 0 \tag{9.637}$$

的解，而积分方程的核为

$$B(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n^2(t)\mathrm{e}^{-k_n(t)x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\delta k, \tag{9.638}$$

它包含离散谱和连续谱的共同贡献(参见刘式适、刘式达,《物理学中的非线性方程》,第 9 章,北京大学出版社,2000). 下面举例说明散射反演法的应用.

[例 1] KdV 方程的单个孤立波解.

对于 KdV 方程(9.568),我们用 Bäcklund 变换已求得它满足 $\xi\to\pm\infty, u\to 0$ 的孤立波解为(9.583)式,若写 $a=2k^2$,则它写为

$$u(x,t) = -a\operatorname{sech}^2\sqrt{\frac{a}{2}}(x-2at). \tag{9.639}$$

因孤立波移速为

$$c = 2a, \tag{9.640}$$

则(9.640)式还可改写为

$$u(x,t) = -\frac{c}{2}\operatorname{sech}^2\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct). \tag{9.641}$$

上述孤立波解意味着初始孤立波为

$$u_0(x) = u(x,0) = -\frac{c}{2}\operatorname{sech}^2\frac{\sqrt{c}}{2}x. \tag{9.642}$$

所以,讨论 KdV 方程的单个孤立子解相当于求解下列初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} - 6u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 & (|x|<\infty, t\geqslant 0),\\ u|_{t=0} = -\dfrac{c}{2}\operatorname{sech}^2\dfrac{\sqrt{c}}{2}x & (|x|<\infty).\end{cases} \tag{9.643}$$

下面,我们应用散射反演法求解问题(9.643). 为了清楚起见,我们取 $c=4$,则问题(9.643)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} - 6u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 & (|x|<\infty, t\geqslant 0),\\ u|_{t=0} = -2\operatorname{sech}^2 x & (|x|<\infty).\end{cases} \tag{9.644}$$

按(9.641)式,问题(9.644)的解应为

$$u(x,t) = -2\operatorname{sech}^2(x-4t). \tag{9.645}$$

按散射反演法的分析,第一步是解下列 Schrödinger 方程的本征值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi(x,0)}{\partial x^2} + (\lambda + 2\operatorname{sech}^2 x)\psi(x,0) = 0,\\ \psi(x,0)|_{x\to\pm\infty} < \infty(\text{或}\to 0).\end{cases} \tag{9.646}$$

对于离散谱,$\lambda=-k_n^2<0$,我们作变换

$$\eta = \tanh x, \tag{9.647}$$

因 $x\to\pm\infty$ 对应于 $\eta\to\pm1$，且

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}=\operatorname{sech}^2 x\dfrac{\partial}{\partial\eta}=(1-\eta^2)\dfrac{\partial}{\partial\eta},\\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}=(1-\eta^2)\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\dfrac{\partial}{\partial\eta}\right],\end{cases}\tag{9.648}$$

则问题(9.646)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\dfrac{\partial\psi_0}{\partial\eta}\right]+\left(2+\dfrac{\lambda}{1-\eta^2}\right)\psi_0=0,\\ \psi_0\mid_{\eta=\pm1}<\infty,\end{cases}\tag{9.649}$$

其中 $\psi_0=\psi(x,0)$.

(9.649)的第一式是连带 Legendre 方程. 在 λ 给定时，根据连带 Legendre 本征值问题的结果有

$$l(l+1)=2,\quad l=1.\tag{9.650}$$

相应问题(9.649)的非零解为

$$\psi(x,0)=\mathrm{P}_1^{\sqrt{-\lambda}}(\eta)=\mathrm{P}_1^{k_n}(\eta)\quad(k_n\leqslant1).\tag{9.651}$$

因为离散谱，故 $\lambda=-k_n^2<0$，则由上式定得

$$\lambda=-1,\quad k_1=1.\tag{9.652}$$

这样，(9.651)式化为

$$\psi(x,0)=A\mathrm{P}_1^1(\eta)=A\sqrt{1-\eta^2}=A\operatorname{sech}x,\tag{9.653}$$

它在 $x\to+\infty$ 的渐近解为

$$\psi(x,0)=2Ae^{-x}=c(0)e^{-x}\quad(x\to+\infty).\tag{9.654}$$

但由正交归一化条件(9.603)有

$$A^2\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}^2 x\delta x=1.$$

注意 $\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}^2 x\delta x=\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)\dfrac{1}{1-\eta^2}\delta\eta=2$，$c(0)=2A$，则求得

$$A=1/\sqrt{2},\quad c(0)=\sqrt{2}.$$

所以，(9.653)式和(9.654)式分别化为

$$\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sech}x,\tag{9.655}$$

$$\psi(x,0)=\sqrt{2}e^{-x}\quad(x\to+\infty).\tag{9.656}$$

对于连续谱，$\lambda=k^2>0$，因对于势能 $u_0(x)=-2\operatorname{sech}^2 x$，平面波 e^{-ikx} 是没有反射的，因而

$$a(k,0)=1,\quad b(k,0)=0.$$

根据散射反演法的第二步，由(9.635)式有

$$\begin{cases} k_1(t) = k_1(0) = 1, \\ c_1(t) = c(0)e^{4t} = \sqrt{2}e^{4t}, \\ a(k,t) = a(k,0) = 1, \\ b(k,t) = 0. \end{cases} \tag{9.657}$$

再由第三步，由(9.638)式

$$B(x,t) = c_1^2(t)e^{-x} = 2e^{8t-x}. \tag{9.658}$$

相应，GLM 积分方程(9.637)化为

$$K(x,y,t) + 2e^{8t-(x+y)} + e^{8t-y}\int_x^{\infty} e^{-z}K(x,z,t)\delta z = 0. \tag{9.659}$$

这个方程各项，除左端第一项外，均有因子 e^{-y}，故我们设

$$K(x,y,t) = I(x,t)e^{-y}, \tag{9.660}$$

代入方程(9.659)，得

$$I(x,t)e^{-y} + 2e^{8t-(x+y)} + 2e^{8t-y}I(x,t)\int_x^{\infty} e^{-2z}\delta z = 0. \tag{9.661}$$

消去因子 e^{-y}得

$$I(x,t) + 2e^{8t-x} + 2e^{8t}I(x,t)\frac{1}{2}e^{-2x} = 0, \tag{9.662}$$

因而

$$I(x,t) = -\frac{2e^{8t-x}}{1+e^{8t-2x}} = -\frac{2e^{4t}}{e^{x-4t}+e^{-(x-4t)}} = -e^{4t}\operatorname{sech}(x-4t), \tag{9.663}$$

$$K(x,y,t) = -e^{-y+4t}\operatorname{sech}(x-4t). \tag{9.664}$$

最后，由(9.636)式求得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t) = 2\frac{\partial}{\partial x}[e^{-x+4t}\operatorname{sech}(x-4t)] \\ &= 2\{-e^{-(x-4t)}\operatorname{sech}(x-4t) + e^{-(x-4t)}[-\operatorname{sech}(x-4t)\tanh(x-4t)]\} \\ &= -2\operatorname{sech}(x-4t)\cdot\{e^{-(x-4t)}[1+\tanh(x-4t)]\} = -2\operatorname{sech}^2(x-4t), \end{aligned} \tag{9.665}$$

这就是单个孤立波解(9.645)式.

[例 2]　KdV 方程的双孤立波解.

这里，即是求解下列初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 6u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (|x| < \infty, t \geqslant 0), \\ u|_{t=0} = -6\operatorname{sech}^2 x. \end{cases} \tag{9.666}$$

由于这里初条件与(9.642)式不匹配，因而，问题(9.666)不表征单个孤立波解.

第一步，解下列本征值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi(x,0)}{\partial x^2}+(\lambda+6\operatorname{sech}^2 x)\psi(x,0)=0,\\ \psi\big|_{x\to\pm\infty}<\infty.\end{cases} \tag{9.667}$$

对于离散谱，$\lambda_n=-k_n^2<0$，同样应用变换(9.647)，则(9.667)式化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\dfrac{\partial\psi_0}{\partial\eta}\right]+\left(6+\dfrac{\lambda}{1-\eta^2}\right)\psi_0=0,\\ \psi_0\big|_{\eta=\pm1}<\infty.\end{cases} \tag{9.668}$$

因而

$$l(l+1)=6,\quad l=2, \tag{9.669}$$

而且

$$\psi(x,0)=\mathrm{P}_2^{k_n}(x)\quad(k_n\leqslant 2), \tag{9.670}$$

则由上式定得

$$\lambda_1=-1,\quad k_1=1;\quad \lambda_2=-4,\quad k_2=2. \tag{9.671}$$

相应

$$\begin{cases}\psi_1(x,0)=A_1\mathrm{P}_2^1(\eta)=A_1\cdot 3\eta\sqrt{1-\eta^2}=3A_1\tanh x\operatorname{sech}x,\\ \psi_2(x,0)=A_2\mathrm{P}_2^2(\eta)=A_2\cdot 3(1-\eta^2)=3A_2\operatorname{sech}^2 x.\end{cases} \tag{9.672}$$

它在 $x\to+\infty$时的渐近解为

$$\begin{cases}\psi_1(x,0)=6A_1\mathrm{e}^{-x}=c_1(0)\mathrm{e}^{-x},\\ \psi_2(x,0)=12A_2\mathrm{e}^{-2x}=c_2(0)\mathrm{e}^{-2x}\end{cases}\quad(x\to+\infty). \tag{9.673}$$

利用正交归一化条件(9.603)，不难定得

$$A_1=1/\sqrt{6},\quad c_1(0)=\sqrt{6};\quad A_2(0)=1/2\sqrt{3},\quad c_2(0)=2\sqrt{3}. \tag{9.674}$$

因而，(9.672)式化为

$$\begin{cases}\psi_1(x,0)=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\tanh x\cdot\operatorname{sech}x=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\sinh x\cdot\operatorname{sech}^2 x,\\ \psi_2(x,0)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sech}^2 x.\end{cases} \tag{9.675}$$

对于连续谱，$\lambda=k^2>0$，对于势能 $u_0(x)=-6\operatorname{sech}^2 x$，平面波 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ 同样没有反射，因而

$$a(k,0)=1,\quad b(k,0)=1. \tag{9.676}$$

第二步，由(9.635)式有

$$\begin{cases}k_1(t)=k_1(0)=1,\quad k_2(t)=k_2(0)=2,\\ c_1(t)=c_1(0)\mathrm{e}^{4t}=\sqrt{6}\mathrm{e}^{4t},\quad c_2(t)=c_2(0)\mathrm{e}^{32t}=2\sqrt{3}\mathrm{e}^{32t},\\ a(k,t)=a(k,0)=1,\\ b(k,t)=0.\end{cases} \tag{9.677}$$

第三步，由(9.638)式

$$B(x,t)=6e^{8t-x}+12e^{64t-2x}. \tag{9.678}$$

相应，GLM 积分方程(9.637)化为

$$K(x,y,t)+\{6e^{8t-(x+y)}+12e^{64t-2(x+y)}\}+\int_x^{\infty}\{6e^{8t-(y+z)}+12e^{64t-2(y+z)}\}K(x,z,t)\delta z=0. \tag{9.679}$$

设

$$K(x,y,t)=I_1(x,t)e^{-y}+I_2(x,t)e^{-2y}, \tag{9.680}$$

代入(9.679)式得

$$\{I_1+6e^{8t-x}+3I_1e^{8t-2x}+2I_2e^{8t-3x}\}e^{-y}+\{I_2+12e^{64t-2x}+3I_2e^{64t-4x}+4I_1e^{64t-3x}\}e^{-2y}=0.$$

令 e^{-y} 和 e^{-3y} 的系数分别为零，得

$$\begin{cases}(1+3e^{8t-2x})I_1+2e^{8t-3x}I_2=-6e^{8t-x},\\ 4e^{64t-3x}I_1+(1+3e^{64t-4x})I_2=-12e^{64t-2x}.\end{cases} \tag{9.681}$$

将(9.681)的第一式分别乘以 e^{-x} 和 e^{-2x}，得

$$\begin{cases}(1+3e^{8t-2x})(e^{-x}I_1)+2e^{8t-2x}(e^{-2x}I_2)=-6e^{8t-2x},\\ 4e^{64t-4x}(e^{-x}I_1)+(1+3e^{64t-4x})(e^{-2x}I_2)=-12e^{64t-4x}.\end{cases} \tag{9.682}$$

引入变量

$$\xi_1=x-4t,\quad \xi_2=x-16t, \tag{9.683}$$

$$J_1(x,t)=e^{-x}I_1(x,t),\quad J_2(x,t)=e^{-2x}I_2(x,t), \tag{9.684}$$

则(9.682)式化为

$$\begin{cases}(1+3e^{-2\xi_1})J_1+2e^{-2\xi_1}J_2=-6e^{-2\xi_1},\\ 4e^{-4\xi_2}J_1+(1+3e^{-4\xi_2})J_2=-12e^{-4\xi_2}.\end{cases} \tag{9.685}$$

由此求得

$$J_1=D_1/D,\quad J_2=D_2/D, \tag{9.686}$$

其中

$$\begin{cases}D_1=\begin{vmatrix}-6e^{-2\xi_1} & 2e^{-2\xi_1}\\ -12e^{-4\xi_2} & 1+3e^{-4\xi_2}\end{vmatrix}=-6e^{-2\xi_1}(1-e^{-4\xi_2}),\\ D_2=\begin{vmatrix}1+3e^{-2\xi_1} & -6e^{-2\xi_1}\\ 4e^{-4\xi_2} & -12e^{-4\xi_2}\end{vmatrix}=-12e^{-4\xi_2}(1+e^{-2\xi_1}),\\ D=\begin{vmatrix}1+3e^{-2\xi_1} & 2e^{-2\xi_1}\\ 4e^{-4\xi_2} & 1+3e^{-4\xi_2}\end{vmatrix}=1+3e^{-2\xi_1}+3e^{-4\xi_2}+e^{-2\xi_1-4\xi_2}.\end{cases} \tag{9.687}$$

这样，由(9.680)式求得

$$K(x,x,t)=I_1e^{-x}+I_2e^{-2x}=J_1+J_2=(D_1+D_2)/D$$

$$= -6\frac{e^{-2\xi_1}+2e^{-4\xi_2}+e^{-2\xi_1-4\xi_2}}{1+3e^{-2\xi_1}+3e^{-4\xi_2}+e^{-2\xi_1-4\xi_2}}$$

$$= -6\frac{e^{-(2x-8t)}+2e^{-(4x-64t)}+e^{-(6x-72t)}}{1+3e^{-(2x-8t)}+9e^{-(4x-64t)}+e^{-(6x-72t)}}. \tag{9.688}$$

最后由(9.636)式求得

$$u(x,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t) = -12\frac{3+4\cosh(2x-8t)+\cosh(4x-64t)}{[3\cosh(x-28t)+\cosh(3x-36t)]^2}. \tag{9.689}$$

这个解在形式上很复杂.下面分析 $t\to+\infty$时的渐近行为,以说明它确实表征双孤立波.

首先,固定 $\xi_1=x-4t$,因 $\xi_2=\xi_1-12t$,则当 $t\to+\infty$时,$e^{4\xi_2}\to 0$,则由(9.688)式

$$\lim_{\substack{t\to+\infty\\ \xi_1\text{固定}}}K(x,x,t) = -6\frac{e^{-2\xi_1-4\xi_2}(e^{4\xi_2}+2e^{2\xi_1}+1)}{e^{-2\xi_1-4\xi_2}(e^{2\xi_1+4\xi_2}+3e^{4\xi_2}+3e^{2\xi_1}+1)} = -6\frac{1+2e^{2\xi_1}}{1+3e^{2\xi_1}}. \tag{9.690}$$

所以

$$\lim_{\substack{t\to+\infty\\ \xi_1\text{固定}}}u(x,t) = 12\lim_{\substack{t\to+\infty\\ \xi_1\text{固定}}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+2e^{2\xi_1}}{1+3e^{2\xi_1}}\right) = -24\frac{e^{2\xi_1}}{(1+3e^{2\xi_1})^2}$$

$$= -2\operatorname{sech}^2(\xi_1-\delta_1) = -2\operatorname{sech}^2(x-4t-\delta_1), \tag{9.691}$$

其中

$$e^{-2\delta_1} = 3. \tag{9.692}$$

同样,固定 $\xi_2=x-16t$,因 $\xi_1=\xi_2+12t$,则当 $t\to+\infty$时,$e^{-2\xi_1}\to 0$,则由(9.688)式

$$\lim_{\substack{t\to+\infty\\ \xi_2\text{固定}}}K(x,x,t) = -6\frac{2e^{-4\xi_2}}{1+3e^{-4\xi_2}} = -12\frac{e^{-4\xi_2}}{1+3e^{-4\xi_2}}. \tag{9.693}$$

所以,

$$\lim_{\substack{t\to+\infty\\ \xi_2\text{固定}}}u(x,t) = -96\frac{e^{-4\xi_2}}{(1+3e^{-4\xi_2})^2} = -8\operatorname{sech}^2[2(\xi_2-\delta_2)]$$

$$= -8\operatorname{sech}^2[2(x-16t-\delta_2)], \tag{9.694}$$

其中

$$e^{4\delta_2} = 3. \tag{9.695}$$

(9.691)式和(9.694)式都是单个孤立波,波速分别是 $c_1=4$ 和 $c_2=16$. 所以,解(9.689)式确实表征两个孤立波.

§9.16 非线性方程的守恒律

在物理学、力学、地球流体力学等学科中，在一定条件下，不少规律都可表示为

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0, \tag{9.696}$$

其中 A 称为某物理量的密度，$\boldsymbol{F}$ 称为它的通量矢量，上式就称为守恒律.

例如，流体力学(包括大气动力学)中的连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\boldsymbol{V}=0 \tag{9.697}$$

反映了流体密度 ρ 与流量 $\rho\boldsymbol{V}$ 之间遵守质量守恒定律. 又例如，大气准地转位涡度守恒定律

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)q=0, \tag{9.698}$$

因其中

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad q=\nabla_{\mathrm{h}}^2\psi+f+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right), \tag{9.699}$$

则它可改为下列守恒律的形式：

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\nabla_{\mathrm{h}}\cdot q\boldsymbol{V}_{\mathrm{h}}=0. \tag{9.700}$$

对于固定空间 V，其边界上若无净的通量，则由(9.696)式有

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V A\,\delta v=0. \tag{9.701}$$

它表示在守恒律(9.696)式中存在一个时间不变量(与时间无关的量)：

$$I\equiv\iiint_V A\,\delta v. \tag{9.702}$$

在空间一维情形(设为 x)，则守恒律(9.696)写为

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}=0. \tag{9.703}$$

若 F 具有周期性，或当 $|x|\to\infty$ 时 F 趋于零，则时间不变量(9.702)式改写为

$$I\equiv\int_T A\,\delta x\quad(T\text{ 为 }F\text{ 在 }x\text{ 方向的周期}) \tag{9.704}$$

或

$$I\equiv\int_{-\infty}^{\infty}A\delta x. \tag{9.705}$$

许多简单的非线性方程(远场方程)都具有守恒律，下面我们举例说明.

一、Burgers 方程的守恒律

Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{9.706}$$

可以改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2-\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0, \tag{9.707}$$

这就是 Burgers 方程的一个守恒律，其中

$$A=u,\quad F=\frac{1}{2}u^2-\nu\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{9.708}$$

若 u 及其导数在 $|x|\to\infty$ 时趋于零，则时间不变量为

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}u\delta x. \tag{9.709}$$

二、KdV 方程的守恒律

Miura，Gardner 和 Kruskal(1968 年)证明：KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{9.710}$$

有无穷多个守恒律，如方程(9.710)可直接改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(-3u^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=0. \tag{9.711}$$

若用 u 去乘方程(9.710)，则得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u^2\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[-2u^3+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]=0. \tag{9.712}$$

(9.711)式和(9.712)式是 KdV 方程(9.710)的最简单的两个守恒律，其中 A 和 F 分别是

$$A_1=u,\quad F_1=-3u^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{9.713}$$

$$A_2=\frac{1}{2}u^2,\quad F_2=-2u^3+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \tag{9.714}$$

若 u 及其导数在 $|x|\to\infty$ 时趋于零，则对应守恒律(9.711)式和(9.712)式的时间不变量分别是

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}u\delta x,\quad I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}u^2\delta x. \tag{9.715}$$

Miura 对 KdV 方程(9.710)作变换

$$u=\frac{\partial v}{\partial x}+v^2,\tag{9.716}$$

则因

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\left(\frac{\partial}{\partial x}+2v\right)\frac{\partial v}{\partial t},\quad u\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x}+2v\right)\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\left(\frac{\partial}{\partial x}+2v\right)\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)+6\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

所以,KdV 方程(9.710)化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+2v\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}-6v^2\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)=0.\tag{9.717}$$

由此可知：若 v 满足 mKdV 方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}-6v^2\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0,\tag{9.718}$$

则由(9.716)式确定的 u(若 u 已知,(9.716)式是 Riccati 方程)满足 KdV 方程(9.710),而且可以利用(9.716)式证明 KdV 方程有无穷多个守恒律.

三、mKdV 方程(变形 KdV 方程)

mKdV 方程(9.718)可直接改写为

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(-2v^3+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)=0.\tag{9.719}$$

用 v 去乘方程(9.719),得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}v^2\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{3}{2}v^4+v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]=0.\tag{9.720}$$

(9.719)式和(9.720)式是 mKdV 方程(9.718)的两个最简单的守恒律,其中 A,F 分别是

$$A_1=v,\quad F_1=-2v^3+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\tag{9.721}$$

$$A_2=\frac{1}{2}v^2,\quad F_2=-\frac{3}{2}v^4+v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2.\tag{9.722}$$

若 u 及其导数在 $|x|\to\infty$ 时趋于零,则对应守恒律(9.719)式和(9.720)式的时间不变量分别是

$$I_1\equiv\int_{-\infty}^{\infty}v\delta x,\quad I_2\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}v^2\delta x.\tag{9.723}$$

§9.17 准地转位涡度方程的偶极子(modon)解

从第七章讨论可知,准地转位涡度方程不仅存在 Rossby 波解和 Haurwitz 波

解，而且存在永恒性波解. 事实上，从非线性波的角度来看，准地转位涡度方程还存在偶极子(modon)解.

正压的准地转位涡度方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)q=0, \tag{9.724}$$

这是一个非线性方程，其中

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad q=f_0+\beta_0 y+\nabla_h^2\psi-\lambda_0^2\psi. \tag{9.725}$$

这里 ψ 为正压准地转流函数，q 为正压准地转位涡度.

令方程(9.724)在 x 方向上的行波解为

$$\psi=\psi(\xi,y),\quad q=q(\xi,y),\quad \xi=x-ct. \tag{9.726}$$

(9.726)式代入方程(9.724)有

$$(u-c)\frac{\partial q}{\partial\xi}+v\frac{\partial q}{\partial y}=0. \tag{9.727}$$

注意 $u-c=-\dfrac{\partial}{\partial y}(\psi+cy)$，$v=\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}$，则方程(9.727)化为

$$\mathrm{J}(\psi+cy,q)=0, \tag{9.728}$$

其中

$$\mathrm{J}(A,B)\equiv\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}=\frac{\partial A}{\partial\xi}\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial\xi} \tag{9.729}$$

为 Jacobi 算子. 若令

$$\Psi=\psi+cy,\quad Q=\nabla_h^2\Psi-\lambda_0^2\Psi+(\beta_0+\lambda_0^2 c)y, \tag{9.730}$$

则方程(9.728)可以化为

$$\mathrm{J}(\Psi,Q)=0. \tag{9.731}$$

根据 Jacobi 算子的性质知，上式成立要求 Q 是 Ψ 的任意函数，即

$$Q=F(\Psi). \tag{9.732}$$

上式表明 Q 的等值线与 Ψ 的等值线重合.

我们考虑一个以原点 $(\xi,y)=(0,0)$ 为中心、半径为 a 的圆形区域. 因在 Q 中有形式为 $\nabla_h^2-\lambda_0^2$ 的 Helmholtz 算子，则引入平面极坐标：

$$\xi=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta. \tag{9.733}$$

考虑流函数 ψ 应在 $r=0$ 有界，在 $r\to\infty$ 趋于零，我们取 $F(\Psi)$ 为 Ψ 的下列线性函数：

$$F(\Psi)=\begin{cases}(-k^2-\lambda_0^2)\Psi & (r<a),\\ (p^2-\lambda_0^2)\Psi & (r>a),\end{cases} \tag{9.734}$$

其中 k 和 p 为常数. 这样，方程(9.732)对于圆内外分别化为

$$\nabla_h^2 \Psi_1 + k^2 \Psi_1 = -(\beta_0 + \lambda_0^2 c) y \quad (r < a) \tag{9.735}$$

和

$$\nabla_h^2 \Psi_2 - p^2 \Psi_2 = -(\beta_0 + \lambda_0^2 c) y \quad (r > a). \tag{9.736}$$

这样,非线性的准地转位涡度方程化成了线性方程.

方程(9.735)满足 $\Psi|_{r=0} < \infty$(当然,$\psi|_{r=0} < \infty$)的解为

$$\Psi_1 = -\frac{\beta_0 + \lambda_0^2 c}{k^2} r\sin\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{J}_m(kr)(A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) \quad (r < a). \tag{9.737}$$

若要求 $\Psi_1|_{r=a} = 0$,则定得

$$A_0 = A_1 = 0, \quad B_1 = \frac{(\beta_0 + \lambda_0^2 c) a}{k^2 \mathrm{J}_1(ka)}, \quad A_m = B_m = 0 \quad (m = 2, 3, \cdots), \tag{9.738}$$

因而解(9.737)简化为

$$\Psi_1 = -\left[r - a\frac{\mathrm{J}_1(kr)}{\mathrm{J}_1(ka)}\right] \frac{(\beta_0 + \lambda_0^2 c)}{k^2} \sin\theta \quad (r < a), \tag{9.739}$$

这里 $\mathrm{J}_m(x)$ 为 m 阶的 Bessel 函数.

方程(9.736)满足 $\Psi_2|_{r\to\infty} \to cy = cr\sin\theta$(当然,$\psi|_{r\to\infty} \to 0$)的解为

$$\Psi_2 = \frac{\beta_0 + \lambda_0^2}{p^2} r\sin\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{K}_m(pr)(C_m \cos m\theta + D_m \sin m\theta) \quad (r > a), \tag{9.740}$$

其中 $\mathrm{K}_m(x)$ 为 m 阶的第二类变形 Bessel 函数(或 MacDonald 函数). 因为 $r \to \infty$ 时,$\mathrm{K}_m(pr) \to 0$,所以

$$p^2 = \frac{\beta_0}{c} + \lambda_0^2. \tag{9.741}$$

若要求 $\Psi_2|_{r=a} = \Psi_1|_{r=a} = 0$,则定得

$$C_0 = C_1 = 0, \quad D_1 = -\frac{(\beta_0 + \lambda_0^2 c) a}{p^2 \mathrm{K}_1(pa)}, \quad C_m = D_m = 0 \quad (m = 2, 3, \cdots), \tag{9.742}$$

因而解(9.740)简化为

$$\Psi_2 = \left[r - a\frac{\mathrm{K}_1(pr)}{\mathrm{K}_1(pa)}\right] \frac{(\beta_0 + \lambda_0^2 c)}{p^2} \sin\theta \quad (r > a). \tag{9.743}$$

在(9.739)式和(9.743)式还有常数 k 需要确定. 除要求在 $r = a$ 处,Ψ_1 和 Ψ_2 连续($\Psi_1 = \Psi_2 = 0$)外,还要求在 $r = a$ 处$\frac{\partial \Psi}{\partial r}$连续$\left(即\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial r}\right)$. 注意

$$x\mathrm{J}_1'(x) - \mathrm{J}_1(x) = -x\mathrm{J}_2(x), \quad x\mathrm{K}_1'(x) - \mathrm{K}_1(x) = -x\mathrm{K}_2(x),$$

则得到

$$-\frac{1}{k}\cdot\frac{J_2(ka)}{J_1(ka)}=\frac{1}{p}\cdot\frac{K_2(pa)}{K_1(pa)}.$$

由此有

$$kJ_1(ka)K_2(pa)+pJ_2(ka)K_1(pa)=0, \tag{9.744}$$

这是一个确定 k 的超越方程. 注意(9.741)式,则由(9.739)式和(9.743)式最后求得

$$\Psi=\begin{cases}-\left[\dfrac{r}{a}-\dfrac{J_1(kr)}{J_1(ka)}\right]\dfrac{p^2}{k^2}ca\sin\theta, & r<a,\\ \left[\dfrac{r}{a}-\dfrac{K_1(pr)}{K_1(pa)}\right]ca\sin\theta, & r>a.\end{cases} \tag{9.745}$$

在(ξ,y)平面上,Ψ 的等值线图见图 9.19,它是一个北高南低的涡旋结构,称为正压准地转位涡度方程的偶极波(dipole waves),简称为偶极子(modon),它在移动的过程中保持形态不变. 大气中的阻塞系统与偶极子极为相似.

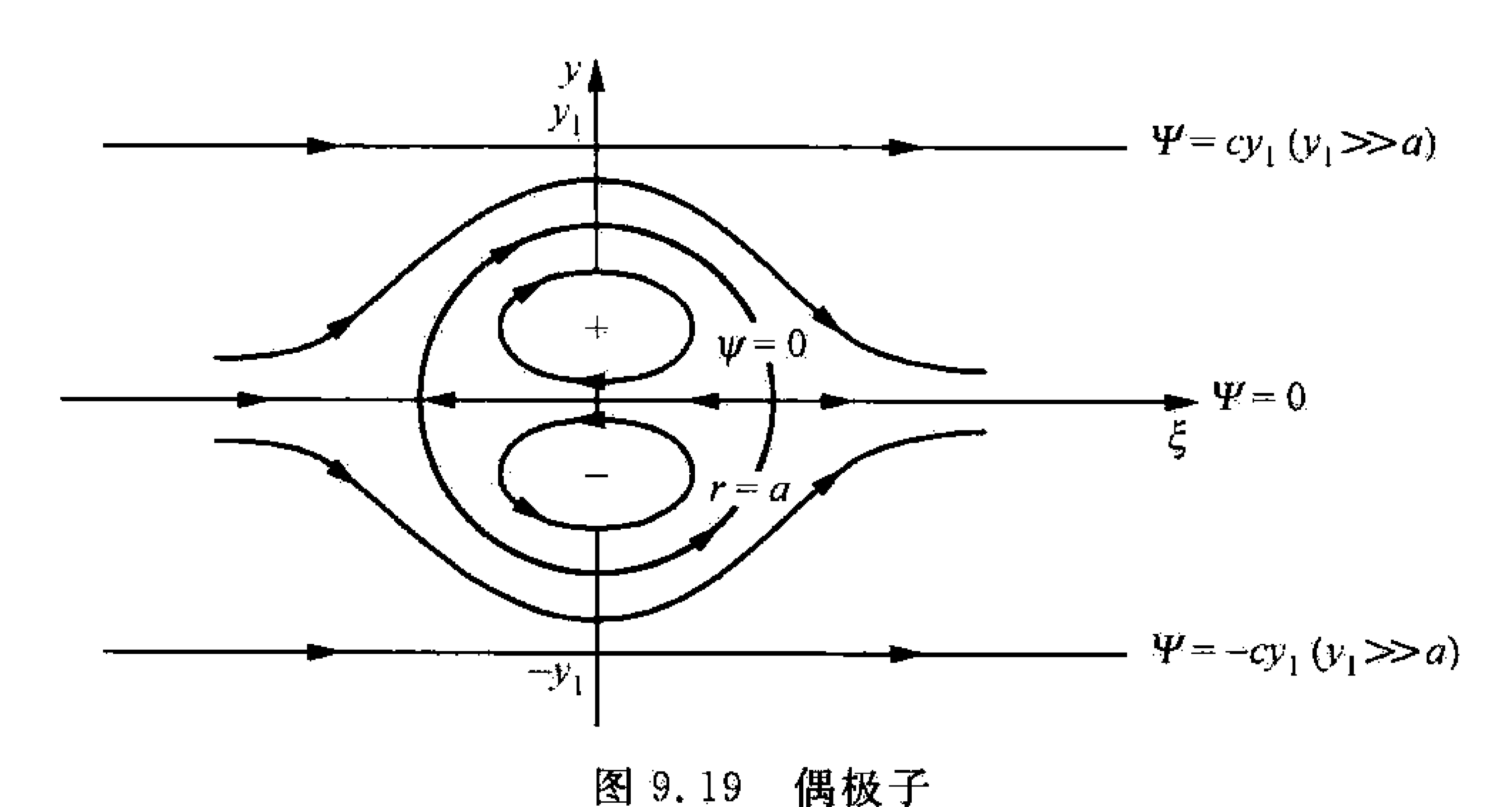


图 9.19　偶极子

因为 $\psi=\Psi-cy$,则依(9.745)式求得

$$\psi=\begin{cases}\left[\dfrac{p^2J_1(kr)}{k^2J_1(ka)}-\left(1+\dfrac{p^2}{k^2}\right)\dfrac{r}{a}\right]ca\sin\theta, & r<a,\\ -ca\dfrac{K_1(pr)}{K_1(pa)}\sin\theta, & r>a,\end{cases} \tag{9.746}$$

这就是正压准地转位涡度方程中的准地转流函数.

因为 $\nabla_h^2\psi=\nabla_h^2\Psi$,则(9.745)式代入到(9.735)式和(9.736)式求得

$$\zeta\equiv\nabla_h^2\psi=\begin{cases}-cap^2\dfrac{J_1(kr)}{J_1(ka)}\sin\theta, & r<a,\\ -cap^2\dfrac{K_1(pr)}{K_1(pa)}\sin\theta, & r>a,\end{cases} \tag{9.747}$$

这就是正压准地转位涡度方程中的准地转的垂直涡度分量.

因为 $q=f_0+\beta_0 y+\nabla_h^2\psi-\lambda_0^2\psi$，则利用(9.735)式和(9.736)式求得

$$q=\begin{cases} f_0-(k^2+\lambda_0^2)(\psi+cy)=f_0-(k^2+\lambda_0^2)\left[\dfrac{r}{a}-\dfrac{\mathrm{J}_1(kr)}{\mathrm{J}_1(ka)}\right]\dfrac{p^2}{k^2}c\,a\sin\theta, & r<a, \\ f_0+(p^2-\lambda_0^2)(\psi+cy)=f_0+\dfrac{\beta_0}{c}(\psi+cy)=f_0+\beta_0\left[\dfrac{r}{a}-\dfrac{\mathrm{K}_1(pr)}{\mathrm{K}_1(pa)}\right]a\sin\theta, & r>a, \end{cases} \tag{9.748}$$

这就是正压准地转位涡度方程中的准地转位涡度.

由极坐标(r,θ)的速度公式 $v_r=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}$，$v_\theta=\dfrac{\partial\psi}{\partial r}$，根据(9.746)式还可以求得

$$v_r=\begin{cases} -\left[\dfrac{p^2\mathrm{J}_1(kr)}{k^2\mathrm{J}_1(ka)}-\left(1+\dfrac{p^2}{k^2}\right)\dfrac{r}{a}\right]c\,\dfrac{a}{r}\cos\theta, & r<a, \\ c\,\dfrac{a}{r}\cdot\dfrac{\mathrm{K}_1(pr)}{\mathrm{K}_1(pa)}\cos\theta, & r>a \end{cases} \tag{9.749}$$

和

$$v_\theta=\begin{cases} \left[\dfrac{p^2}{k^2 r}\cdot\dfrac{\mathrm{J}_1(kr)}{\mathrm{J}_1(ka)}-\dfrac{p^2\mathrm{J}_2(kr)}{k\mathrm{J}_1(ka)}-\left(1+\dfrac{p^2}{k^2}\right)\dfrac{1}{a}\right]ca\sin\theta, & r<a, \\ -\left[\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\mathrm{K}_1(pr)}{\mathrm{K}_1(pa)}-p\,\dfrac{\mathrm{K}_2(pr)}{\mathrm{K}_1(pa)}\right]ca\sin\theta, & r>a. \end{cases} \tag{9.750}$$

由此可见，在 $\theta=\pi/2$ 和 $\theta=3\pi/2$ 处，$v_r=0$；而在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 处，$v_\theta=0$.

复习思考题

1. 线性波动方程与非线性波动方程的特征线有何不同？什么是 Riemann 不变量？
2. 在非线性波中非线性项，耗散项和频散项各起什么作用？
3. 椭圆余弦波是否存在周期？它在什么条件化为孤立波和线性波？
4. 孤立波的主要特征是什么？其周期多大？
5. 非线性波参数如何定义？其频散关系最主要的特征是什么？
6. 什么是远场？什么是远场方程？
7. 对 KdV 方程，表征波演变的合适空间和时间尺度能否写为

$$\xi=\varepsilon(x-ct),\quad \tau=\varepsilon^3 t?$$

8. Bäcklund 变换求解非线性方程的最大优点是什么？
9. 散射反演法求解非线性方程的基本思想是什么？
10. 非线性方程的守恒律反映什么物理规律？

习　题

1. 由(9.81)式，求表面重力波的群速度.
2. 求下列方程的特征线和 Riemann 不变量：

（1）线性重力外波：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+g\dfrac{\partial h'}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial h'}{\partial t}+H\dfrac{\partial u}{\partial x}=0;\end{cases}$$

（2）非线性惯性重力外波：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}-fv+g\dfrac{\partial h}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+fu=0,\\ \dfrac{\partial h}{\partial t}+u\dfrac{\partial h}{\partial x}+h\dfrac{\partial u}{\partial x}=0;\end{cases}$$

（3）线性 Rossby 波：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial v'}{\partial x}+\beta_0 v'=0.$$

提示：特征线和 Riemann 不变量只与含微商的量有关.

3. 证明 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta'\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0\quad(\beta'<0)$$

通过变换：$u_1=-u, x_1=-x$，可以化为标准形的 KdV 方程：

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+(-\beta')\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3}=0.$$

4. 证明 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

在变换

$$\xi=kx,\quad \tau=k^3t,\quad v=k^{-2}u$$

下，方程的形式保持不变.

5. 证明 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

作变换

$$u=-(3t)^{-2/3}U(\xi),\quad \xi=(3t)^{-1/3}x,$$

则 U 满足

$$U'''+(6U-\xi)U'-2U=0.$$

6. 证明线性 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c_0\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

作变换

$$u=(3\beta t)^{-1/3}U(\xi),\quad \xi=(3\beta t)^{-1/3}(x-c_0t),$$

可以化为下列 Airy 方程

$$U'''-(\xi U'+U)=0,$$

因而求得解为

$$u = (3\beta t)^{-1/3}\mathrm{Ai}(\xi),$$

其中 Ai(x)为 Airy 函数.

7. 上题若令

$$u = \int_{\xi}^{\infty} U(s)\delta s,\quad \xi = (3\beta t)^{-1/3}(x - c_0 t),$$

则方程化为

$$U'' - \xi U = 0,$$

这也是 Airy 方程,因而求得

$$u = \int_{\xi}^{\infty} \mathrm{Ai}(s)\mathrm{d}s.$$

8. 求下列线性方程的频散关系:

(1) 线性 Boussinesq 方程 $\dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2} - c_0^2\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \dfrac{1}{3}H^2\dfrac{\partial^4 h}{\partial t^2\partial x^2} = 0$;

(2) 线性正规化的长波方程 $\dfrac{\partial h'}{\partial t} + c_0\dfrac{\partial h'}{\partial x} - \dfrac{1}{6}H^2\dfrac{\partial^3 h'}{\partial x^2\partial t} = 0$.

9. 利用 Jacobi 椭圆函数,证明单摆运动方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 4\omega_0^2\left(m^2 - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

的解为

$$\sin\frac{\theta}{2} = m\,\mathrm{sn}\,\omega_0 t,$$

而且周期 $T = 4\mathrm{K}(m)/\omega_0$,其中

$$\omega_0 = \sqrt{g/L},\quad m^2 = v_0^2/4gL = v_0^2/4\omega_0^2L^2 < 1,$$

K(m)为第一类 Legendre 完全椭圆积分,L 为单摆摆长,v_0 为初速度,g 为重力加速度.

提示:令 $\sin\dfrac{\theta}{2} = m\sin\varphi$.

10. 利用 Jacobi 椭圆函数,证明 Duffing 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = -\varepsilon\beta_0^2 x^3$$

的解为:

(1) $\varepsilon < 0$, $x = a\,\mathrm{sn}\,\omega t$,其中

$$m^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = -1,\quad \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\beta_0^2 a^2.$$

(2) $\varepsilon > 0$, $x = a\,\mathrm{cn}\,\omega t$,其中

$$m^2 = \frac{\varepsilon\beta_0^2 a^2}{2\omega^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right),$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon a^2 \beta_0^2.$$

11. 求 Burgers 方程关于$\frac{\partial u}{\partial x}$的孤立波解.

12. 证明 $u(x,t) = -2k^2 \operatorname{sech}^2\{k(x-4k^2 t)\}$满足 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

13. 证明 mKdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u^2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

有另一类解

$$u(x,t) = A - \frac{4A}{4A^2(x - 6A^2 t) + 1},$$

其中 A 是任何实的常数.

14. 证明更一般的 mKdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (n+1)(n+2)u^n\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

有孤立波解:

$$u^n = \frac{c}{2}\operatorname{sech}^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{c}(x - ct)\right], \quad c > 0.$$

15. 证明 mKdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} \pm 6u^2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

作变换

$$\xi = kx, \quad \tau = k^3 t, \quad v = k^{-1}u,$$

方程的形式保持不变.

16. 应用试探函数法或双曲函数展开法求解:

(1) Burgers 方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$;

(2) Benney 方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$.

17. 应用 Jacobi 椭圆函数展开法求解下列两类 Klein-Gordon 方程:

(1) u^4 势能(或 u^4 场): $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u - \beta u^3 = 0$;

(2) u^3 势能(或 u^3 场): $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u - \beta u^2 = 0$.

18. 应用 Jacobi 椭圆函数展开法求 KP(Kadomtsev-Petviashvili)方程(也称二维浅水波的 KdV 方程)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)+\frac{c_0}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

的周期波解和孤立波解.

提示:①线性化的频散关系为 $\omega=k^3+\frac{c_0}{2k}l^2$;② 令 $u=u(\theta),\theta=kx+ly-\omega t$.

19. 证明 Boussinesq 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$$

的孤立波解为

$$u=\frac{1}{4}k^2\operatorname{sech}^2\frac{1}{2}[k(x+ct)]\quad 和\quad u=\frac{1}{4}k^2\operatorname{sech}^2\frac{1}{2}[k(x-ct)],$$

其中 $c=\sqrt{1+k^2}$.

20. 下列方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$$

表征弹性介质的非线性波. 试求在 $|x|\to\infty$ 和 $u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\to 0$ 时,$u=u(\xi)=u(x-ct)$形式的解.

21. 求非线性 Schrödinger 方程的形式为 $u=\phi(x)e^{i\omega t}$ 的包络周期波解和孤立波解.

22. 求下列耗散长波方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial uv}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0\end{cases}$$

的周期波解和孤立波解.

23. 用试探函数法或双曲函数展开法求 Fisher 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+ku(1-u)\quad (D>0,k>0)$$

的行波解 $u(x,t)=u(\xi),\xi=x-ct$;并在相平面$(u,v)=(u,\mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi)$上说明轨道满足

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=-\frac{ku(1-u)+cv}{Dv};$$

且$(u,v)=(1,0)$是鞍点,$(u,v)=(0,0)$是结点(当 $c^2>4kD$)或焦点(当 $c^2<4kD$),并且说明,对 $c>2\sqrt{kD}$,都有:$x\to-\infty$时,$u\to 1$;$x\to+\infty$时,$u\to 0$.

24. 用幂级数展开法求解非线性惯性波

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}-f_0 v=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+f_0 u=0.\end{cases}$$

25. 对于 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0,$$

若守恒律的密度为 $u^3+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$，求通量，并写出守恒律.

26. 证明正规化的长波方程：$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}=0$ 的守恒律可以写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2+\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)=0.$$

27. 给出非线性 Schrödinger 方程：$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta|u|^2 u=0$ 的一个守恒律，并说明它的时间不变量为

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}|u|^2\delta x=0.$$

28. 证明正弦-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin u=0$$

作变换

$$v=\tan\frac{u}{4}$$

可化为

$$(1+v^2)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-v\right)-2v\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+v^2\right]=0.$$

提示：$\sin u=4v(1-v^2)/(1+v^2)^2$.

29. 证明用 Bäcklund 变换求解 KdV 方程，对 u 的叠加公式为

$$u_3=4(k_2^2-k_1^2)(u_1-u_2)/(w_1-w_2)^2.$$

30. 证明 Burgers 方程用 Hopf-Cole 变换求解最后的结果是

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\xi}{t}\exp\left\{-\frac{G}{2\nu}\right\}\delta\xi\Big/\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{G}{2\nu}\right\}\delta\xi,$$

其中

$$G(\xi,x,t)=\frac{(x-\xi)^2}{2t}+\int_0^{\xi}u_0(\eta)\delta\eta.$$

31. 写出 mKdV 方程：$\frac{\partial u}{\partial t}+u^2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$ 的 G-M 变换式.

32. 证明用散射反演法求 KdV 方程中的 Q(见(9.618)式)也满足 KdV 方程.

33. 用散射反演法求解 KdV 方程：$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$ 的下列初值问题：

(1) $u|_{t=0}=-\frac{9}{2}\mathrm{sech}^2(3x/2)$； (2) $u|_{t=0}=-9\mathrm{sech}^2 x$.

34. 用约化摄动法求解下列非线性频散的弦振动方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-c^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\sigma^2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}=0.$$

提示：令$\frac{\partial\psi}{\partial t}=u,\frac{\partial\psi}{\partial x}=-v$,则化为$\frac{\partial u}{\partial t}+c^2(v)\frac{\partial v}{\partial x}-\sigma^2\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0$ 和$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$,并注意,令 $u=\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\cdots,v=v_0+\varepsilon v_1+\varepsilon^2 v_2+\cdots,c(v)=c_0(v_0)+\frac{\partial c}{\partial v}v\varepsilon+\cdots$.

35. 证明势能为 $u(x)=-2\mathrm{sech}^2 x$ 的 Schrödinger 方程：$\psi''+(\lambda+2\mathrm{sech}^2 x)\psi=0$ 作变换

$$\psi=\phi\,\mathrm{sech}x,\quad \xi=-\sinh^2 x\quad (\text{即 } \phi=\psi\sqrt{1-\xi})$$

可化为下列超比方程$\left(\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-\lambda}}{2},\beta=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-\lambda}}{2},\gamma=\frac{1}{2}\right)$

$$\xi(1-\xi)\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}-\frac{1}{4}(1+\lambda)\phi=0.$$

36. 证明上题所给 Schrödinger 方程的通解为 $\psi=A\psi_1+B\psi_2$,其中

$$\psi_1=\frac{1}{\sqrt{1-\xi}}\phi_1=\frac{1}{\sqrt{1-\xi}}\mathrm{F}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-\lambda}}{2},-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-\lambda}}{2},\frac{1}{2},\xi\right),$$

$$\psi_2=\frac{1}{\sqrt{1-\xi}}\phi_2=\sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}}\mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2},-\frac{\sqrt{-\lambda}}{2},\frac{3}{2},\xi\right);$$

并证明满足条件 $\psi|_{\xi\to\infty}\to 0$,只有

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}=-n\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$\psi=A\psi_1=\frac{A}{\sqrt{1-\xi}}\mathrm{F}\left(-n,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-\lambda}}{2},\frac{1}{2},\xi\right).$$

若取 $n=0$,则 $\lambda=-1$,相应

$$\psi_1=A/\sqrt{1-\xi}=A/\cosh x=A\,\mathrm{sech}x.$$

37. 考虑圆域($r\leqslant a$)内的二维流场,设它满足$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}=0$,且流函数

$$\psi = -caJ_1(kr)\sin\theta,$$

其中，k 和 c 为常数，$J_1(kr)$为一阶 Bessel 函数. 若在圆($r=a$)上 $J_1(ka)=0$，试求流场$(v_r, v_\theta) = \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$，并分析其偶极子结构.

第十章　大气中的能量平衡

本章的主要内容有：

将大气运动分解为沿纬圈平均的基本流场和扰动(或称为涡旋或涡动)流场，并且将动能和有效势能也分解为基本气流的动能(平均运动动能)和扰动动能(涡动动能)，基本气流的有效势能(平均有效势能)和扰动有效势能；

建立基本气流的动能与有效势能的变化方程，并说明影响它们的因子；

建立扰动运动的动能与有效势能的变化方程，并说明影响它们的因子；

分析对流层大气中的能量循环，即能量间的相互转换；

从能量转换角度分析 Richardson 数，并分析湍流的串级与能谱.

§10.1　基本气流能量与扰动能量

大气大范围的运动，总是存在两种形态：一是沿着纬圈分布的基本气流(主要是沿纬圈平均的基本纬向风速和相对较小的基本经向风速)，另一是叠加在基本气流上的扰动. 基本气流和扰动之间的相互作用在总体上形成和维持了大气环流以及相应的大范围天气的演变. 而大范围运动中的能量，特别是动能与有效势能之间的相互转换，则是基本气流和扰动能否发展的能源机制.

因为考虑大气大范围运动的能源机制或能量间的平衡，所以，我们假定垂直方向是静力平衡的，且忽略 ρ_0 的垂直变化；但要考虑摩擦和非绝热加热. 这样，以静态大气为背景的大气运动方程组可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}-fv=\dfrac{\partial \phi}{\partial x}+F_x,\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}+fu=-\dfrac{\partial \phi}{\partial y}+F_y,\\[2mm] \dfrac{\partial \phi}{\partial z}=g\dfrac{\theta}{\theta_0},\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial t}\left(g\dfrac{\theta}{\theta_0}\right)+u\dfrac{\partial}{\partial x}\left(g\dfrac{\theta}{\theta_0}\right)+v\dfrac{\partial}{\partial y}\left(g\dfrac{\theta}{\theta_0}\right)+w\dfrac{\partial}{\partial z}\left(g\dfrac{\theta}{\theta_0}\right)+N^2w=\dfrac{g}{c_pT_0}\boldsymbol{Q},\end{cases}\tag{10.1}$$

其中 $\phi=p'/\rho_0$，θ 是位温相对于静态位温 θ_0 的偏差，(F_x,F_y) 为水平摩擦力，Q 为非绝热加热. 无摩擦和绝热条件下，方程组(10.1)转化为(8.233)式.

设考虑的区域为 V(例如北半球或全球)，在区域的边界 S 上，除正常的边界条件外，我们设边界上无净的流动，即

$$(u,v,w)\,|_S = 0. \tag{10.2}$$

用方程组(10.1)来描写大气大范围运动的能量平衡，动能只有水平运动动能，即

$$K = \frac{1}{2}(u^2+v^2). \tag{10.3}$$

对大气大范围运动而言，这是主要的动能；而有效势能为

$$A = \frac{g^2}{2N^2}\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2 = \frac{1}{2N^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2. \tag{10.4}$$

若把 u,v,w,θ 和 ϕ 分解为沿纬圈平均的部分与振动的部分之和，即

$$u=\bar{u}+u',\quad v=\bar{v}+v',\quad w=\bar{w}+w',\quad \theta=\bar{\theta}+\theta',\quad \phi=\bar{\phi}+\phi', \tag{10.5}$$

则 $(\bar{u},\bar{v},\bar{w})$ 表示基本气流，(u',v',w') 表示扰动气流，$\bar{\theta}$ 表示基本位温，即沿纬圈平均的位温，而 θ' 表示扰动位温，$\bar{\phi}$ 和 ϕ' 分别表示沿纬圈平均的 ϕ 和 ϕ 的扰动.

(10.5)式中的 u 和 v 代入到(10.3)式，再沿纬圈平均后得到

$$\overline{K} = K_{\mathrm{m}} + K_{\mathrm{p}}, \tag{10.6}$$

其中

$$K_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}(\bar{u}^2+\bar{v}^2),\quad K_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\overline{(u'^2+v'^2)}\,. \tag{10.7}$$

K_{m} 为单位质量空气的基本气流的动能，也称为平均动能；而 K_{p} 为单位质量空气扰动动能的平均值，就称它为扰动动能. $\overline{K}$ 为单位质量空气动能的平均值. (10.6)式说明：动能沿纬圈的平均值可以分解为基本气流动能(或平均动能)与扰动动能两部分之和.

类似，(10.5)式中的 θ 代入到(10.4)式，再沿纬圈平均后得到

$$\overline{A} = A_{\mathrm{m}} + A_{\mathrm{p}}, \tag{10.8}$$

其中

$$A_{\mathrm{m}} = \frac{g^2}{2N^2}\left(\frac{\bar{\theta}}{\theta_0}\right)^2 = \frac{1}{2N^2}\left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial z}\right)^2,\quad A_{\mathrm{p}} = \frac{g^2}{2N^2}\overline{\left(\frac{\theta'}{\theta_0}\right)^2} - \frac{1}{2N^2}\overline{\left(\frac{\partial\phi'}{\partial z}\right)^2}. \tag{10.9}$$

A_{m} 为单位质量空气的基本气流的有效势能，也称为平均有效势能；而 A_{p} 为单位质量空气扰动有效势能的平均值，就称它为扰动有效势能；$\overline{A}$ 为单位质量空气有效势能的平均值. (10.8)式说明：有效势能沿纬圈的平均值可以分解为基本气流有效势能(或平均有效势能)与扰动有效势能两部分之和.

考虑区域 V，则在 V 内基本气流动能和扰动动能分别是

$$K_{\mathrm{m}}^{*} \equiv \iiint\limits_{V} \rho K_{\mathrm{m}} \delta v, \quad K_{\mathrm{p}}^{*} \equiv \iiint\limits_{V} \rho K_{\mathrm{p}} \delta v, \tag{10.10}$$

而区域 V 内动能沿纬圈的平均值为

$$\overline{K}^{*} \equiv \iiint\limits_{V} \rho \overline{K} \delta v, \tag{10.11}$$

由(10.6)式显然有

$$\overline{K}^{*} = K_{\mathrm{m}}^{*} + K_{\mathrm{p}}^{*}. \tag{10.12}$$

类似,在区域 V 内基本气流有效势能和扰动有效势能分别是

$$A_{\mathrm{m}}^{*} \equiv \iiint\limits_{V} \rho A_{\mathrm{m}} \delta v, \quad A_{\mathrm{p}}^{*} \equiv \iiint\limits_{V} \rho A_{\mathrm{p}} \delta v. \tag{10.13}$$

而区域 V 内有效势能沿纬圈的平均值为

$$\overline{A}^{*} \equiv \iiint\limits_{V} \rho \overline{A} \delta v, \tag{10.14}$$

且由(10.8)式有

$$\overline{A}^{*} = A_{\mathrm{m}}^{*} + A_{\mathrm{p}}^{*}. \tag{10.15}$$

§10.2 能量平衡方程

从动能的表达式(10.3)看到,方程组(10.1)的头两式是研究动能变化的方程;有意义的是从有效势能的表达式(10.4)看到,方程组(10.1)的第五个方程,即热力学方程恰好是研究有效势能变化的方程.

一、动能平衡方程

方程组(10.1)的头两式分别乘 u 和 v,然后相加得

$$\frac{\partial K}{\partial t} + u\frac{\partial K}{\partial x} + v\frac{\partial K}{\partial y} + w\frac{\partial K}{\partial z} = -\left(u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + (F_x u + F_y v). \tag{10.16}$$

应用连续性方程(方程组(10.1)的第四式),上式可改写为

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial K u}{\partial x} + \frac{\partial K v}{\partial y} + \frac{\partial K w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \phi u}{\partial x} + \frac{\partial \phi v}{\partial y} + \frac{\partial \phi w}{\partial z}\right) + w\frac{\partial \phi}{\partial z} + (F_x u + F_y v), \tag{10.17}$$

这就是动能变化方程的微分形式.

将(10.17)式在整个区域 V 上积分,利用边条件(10.2)式和静力学方程((10.1)的第三式),得

$$\frac{\partial K^{*}}{\partial t} \equiv \iiint\limits_{M} \frac{g}{\theta_0}\theta w \delta m - \varepsilon \quad (\delta m = \rho \delta v, M = \rho V), \tag{10.18}$$

其中

$$K^* \equiv \iiint_M K\delta m \equiv \iiint_V \rho K\delta v \tag{10.19}$$

为区域 V 内的动能. 而

$$\varepsilon \equiv -\iiint_M (F_x u + F_y v)\delta m = -\iiint_V \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}_{\mathrm{h}}\rho\delta v \tag{10.20}$$

表征摩擦对动能的耗损,$\varepsilon>0$,表示它消耗动能. 方程(10.18)是动能变化方程的积分形式.

二、有效势能平衡方程

以$\frac{g}{N^2}\frac{\theta}{\theta_0}$乘方程组(10.1)的第五式得

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u\frac{\partial A}{\partial x} + v\frac{\partial A}{\partial y} + w\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{g}{\theta_0}\theta w + \frac{g^2}{N^2 c_p T_0\theta_0}\theta Q, \tag{10.21}$$

应用连续性方程,并注意 $N^2 = g\frac{\partial\theta_0}{\partial z}\Big/\theta_0$,则上式可改写为

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Au}{\partial x} + \frac{\partial Av}{\partial y} + \frac{\partial Aw}{\partial z} = -\frac{g}{\theta_0}\theta w + \frac{g}{c_p T_0 \partial\theta_0/\partial z}\theta Q, \tag{10.22}$$

这就是有效势能变化方程的微分形式.

将(10.22)式在整个区域 V 上积分,利用边条件(10.2)式,得

$$\frac{\partial A^*}{\partial t} = -\iiint_M \frac{g}{\theta_0}\theta w\delta m + G = -\iiint_M w\frac{\partial\phi}{\partial z}\delta m + G, \tag{10.23}$$

其中

$$A^* \equiv \iiint_M A\delta m \equiv \iiint_V \rho A\delta v \tag{10.24}$$

为区域 V 内的有效势能,而

$$G \equiv \iiint_M \frac{g^2}{N^2 c_p T_0\theta_0}\theta Q\delta m = \iiint_M \frac{g}{c_p T_0\partial\theta_0/\partial z}\theta Q\delta m \tag{10.25}$$

表征非绝热加热所产生的有效势能,即它是有效势能的制造项(在稳定层结下,要求 $\theta Q>0$). 方程(10.24)是有效势能变化方程的积分形式.

比较(10.18)式和(10.23)式可以看到,两式右端第一项只差一符号,它说明,这是有效势能与动能间的相互转换项. 我们令它表为

$$\{A,K\} = \iiint_M w\frac{\partial\phi}{\partial z}\delta m = \iiint_M \frac{g}{\theta_0}\theta w\delta m. \tag{10.26}$$

从导出过程看,

$$\{A,K\} = \iiint_M w\frac{\partial \phi}{\partial z}\delta m = -\iiint_M \left(u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\delta m,$$

因此，这一项主要反映气压梯度力对空气运动的作功. 若风向低压偏，气压梯度力对空气运动作功，此时，冷空气下沉，暖空气上升（$\theta w > 0$），动能增加；否则，风向高压偏，空气克服气压梯度力作功，此时，冷空气上升，暖空气下沉（$\theta w < 0$），动能减小.

利用(10.26)式，(10.18)式和(10.23)式分别写为

$$\frac{\partial K^*}{\partial t} = \{A,K\} - \varepsilon, \tag{10.27}$$

$$\frac{\partial A^*}{\partial t} = -\{A,K\} + G. \tag{10.28}$$

将上面两式相加就得到区域 V 内总能量的平衡方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(K^* + A^*) = G - \varepsilon. \tag{10.29}$$

上式表明：在绝热和无摩擦的条件下，区域 V 内的总能量守恒. 反过来说，因为就长期平均情况而言，区域总能量应不变，所以，非绝热加热所制造的有效势能必须与动能的摩擦耗损相平衡.

§10.3　基本气流动能与扰动动能的平衡方程

利用连续性方程，水平运动方程可以写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u^2}{\partial x} + \dfrac{\partial uv}{\partial y} + \dfrac{\partial uw}{\partial z} - fv = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x} + F_x, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial vu}{\partial x} + \dfrac{\partial v^2}{\partial y} + \dfrac{\partial vw}{\partial z} + fu = -\dfrac{\partial \phi}{\partial y} + F_y. \end{cases} \tag{10.30}$$

将(10.5)式中的 u,v,w 和 ϕ 代入上式，并沿纬圈平均得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \dfrac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} + \dfrac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \dfrac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} - f\bar{v} = \bar{F}_x, \\ \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \dfrac{\partial \bar{v}\bar{w}}{\partial z} + \dfrac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \dfrac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} + f\bar{u} = -\dfrac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} + \bar{F}_y, \end{cases} \tag{10.31}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{F}}(\bar{F}_x,\bar{F}_y)$ 为 $\boldsymbol{F}(F_x,F_y)$ 的纬圈平均. 方程组(10.31)就是沿纬圈平均的水平运动方程.

显然，连续性方程沿纬圈平均得

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0. \tag{10.32}$$

方程组(10.31)的两式分别乘以 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$，然后相加则得

$$\frac{\partial K_{\mathrm{m}}}{\partial t}+\frac{\partial K_{\mathrm{m}}\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial K_{\mathrm{m}}\bar{w}}{\partial z}+\bar{u}\left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right)+\bar{v}\left(\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}\right)$$

$$=-\bar{v}\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y}+(\bar{F}_x\bar{u}+\bar{F}_y\bar{v}), \tag{10.33}$$

或利用(10.32)式得

$$\frac{\partial K_{\mathrm{m}}}{\partial t}+\frac{\partial K_{\mathrm{m}}\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial K_{\mathrm{m}}\bar{w}}{\partial z}+\left(\frac{\partial \bar{u}\,\overline{u'v'}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{u}\,\overline{u'w'}}{\partial z}\right)-\left(\overline{u'v'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial \bar{v}\,\overline{v'^2}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{v}\,\overline{v'w'}}{\partial z}\right)-\left(\overline{v'^2}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\overline{v'w'}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)$$

$$=-\left(\frac{\partial \bar{\phi}\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{\phi}\bar{w}}{\partial z}\right)+\bar{w}\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z}+(\bar{F}_x\bar{u}+\bar{F}_y\bar{v}), \tag{10.34}$$

这就是基本气流动能变化方程的微分形式，利用(10.1)中的静力学方程，上式中 $\dfrac{\partial \bar{\phi}}{\partial z}=g\dfrac{\bar{\theta}}{\theta_0}$.

将上式在整个区域 V 上积分得

$$\frac{\partial K_{\mathrm{m}}^*}{\partial t}=\iiint_M\left(\overline{u'v'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}+\overline{v'^2}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\overline{v'w'}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)\delta m$$

$$+\iiint_M\frac{g}{\theta_0}\bar{\theta}\bar{w}\,\delta m+\iiint_M(\bar{F}_x\bar{u}+\bar{F}_y\bar{v})\,\delta m, \tag{10.35}$$

这是整个区域 V 内基本气流动能的变化方程.

下面，我们求扰动动能的平衡方程. 将(10.18)式沿纬圈平均，并利用(10.6)式，得

$$\frac{\partial K_{\mathrm{m}}^*}{\partial t}+\frac{\partial K_{\mathrm{p}}^*}{\partial t}=\iiint_M\frac{g}{\theta_0}\bar{\theta}\bar{w}\,\delta m+\iiint_M\frac{g}{\theta_0}\overline{\theta'w'}\,\delta m$$

$$+\iiint_M(\bar{F}_x\bar{u}+\bar{F}_y\bar{v})\,\delta m+\iiint_M(\overline{F'_xu'}+\overline{F'_yv'})\,\delta m, \tag{10.36}$$

其中 $\boldsymbol{F}'(F'_x,F'_y)$ 为 $\boldsymbol{F}$ 相对于 $\bar{\boldsymbol{F}}$ 的扰动. 将(10.36)式减去(10.35)式，得

$$\frac{\partial K_{\mathrm{p}}^*}{\partial t}=-\iiint_M\left(\overline{u'v'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}+\overline{v'^2}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\overline{v'w'}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)\delta m$$

$$+\iiint_M\frac{g}{\theta_0}\overline{\theta'w'}\,\delta m+\iiint_M(\overline{F'_xu'}+\overline{F'_yv'})\,\delta m, \tag{10.37}$$

这是整个区域 V 内扰动动能的变化方程.

§10.4　基本气流有效势能与扰动有效势能的平衡方程

利用连续性方程，热力学方程可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g\frac{\theta}{\theta_0}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(ug\frac{\theta}{\theta_0}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(vg\frac{\theta}{\theta_0}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(wg\frac{\theta}{\theta_0}\right)+N^2w=\frac{g}{c_pT_0}Q. \tag{10.38}$$

将(10.5)式的 u,v,w 和 θ 代入上式，并沿纬圈平均得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g\frac{\bar{\theta}}{\theta_0}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{v}g\frac{\bar{\theta}}{\theta_0}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{w}g\frac{\bar{\theta}}{\theta_0}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v'g\frac{\theta'}{\theta_0}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w'g\frac{\theta'}{\theta_0}}\right)+N^2\bar{w}=\frac{g}{c_pT_0}\bar{Q}, \tag{10.39}$$

这就是沿纬圈平均的热力学方程，其中 $\bar{Q}$ 为 Q 的纬圈平均.

以$\frac{g}{N^2}\frac{\bar{\theta}}{\theta_0}$乘上式，得到

$$\frac{\partial A_m}{\partial t}+\frac{\partial A_m\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial A_m\bar{w}}{\partial z}+\frac{g}{N^2}\frac{\bar{\theta}}{\theta_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g}{\theta_0}\overline{\theta'v'}\right)+\frac{g}{N^2}\frac{\bar{\theta}}{\theta_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g}{\theta_0}\overline{\theta'w'}\right)+\frac{g}{\theta_0}\bar{\theta}\bar{w}$$
$$=\frac{g^2}{N^2c_pT_0\theta_0}\bar{\theta}\bar{Q} \tag{10.40}$$

或

$$\frac{\partial A_m}{\partial t}+\frac{\partial A_m\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial A_m\bar{w}}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g^2}{N^2\theta_0^2}\bar{\theta}\,\overline{\theta'v'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g}{N^2\theta_0^2}\bar{\theta}\,\overline{\theta'w'}\right)$$
$$-\frac{g^2}{N^2\theta_0^2}\overline{\theta'v'}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}-\frac{g^2}{N^2\theta_0^2}\overline{\theta'w'}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}+\frac{g}{\theta_0}\bar{\theta}\bar{w}=\frac{g^2}{N^2c_pT_0\theta_0}\bar{\theta}\bar{Q}. \tag{10.41}$$

这就是基本气流有效势能变化方程的微分形式，其中已忽略了 N^2 的变化，并将$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\bar{\theta}}{\theta_0}\right)$写成了$\frac{1}{\theta_0}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}$.

将上式在整个区域 V 上积分得

$$\frac{\partial A_m^*}{\partial t}=\iiint\limits_M\frac{g^2}{N^2\theta_0^2}\overline{\theta'v'}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}\delta m+\iiint\limits_M\frac{g^2}{N^2\theta_0^2}\overline{\theta'w'}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}\delta m$$
$$-\iiint\limits_M\frac{g}{\theta_0}\bar{\theta}\bar{w}\,\delta m+\iiint\limits_M\frac{g^2}{N^2c_pT_0\theta_0}\bar{\theta}\bar{Q}\,\delta m, \tag{10.42}$$

这就是整个区域 V 内基本气流有效势能的变化方程.

类似，我们可以求扰动有效势能的平衡方程. 将(10.23)式沿纬圈平均，并利用(10.8)式，得

$$\frac{\partial A_m^*}{\partial t}+\frac{\partial A_p^*}{\partial t}=-\iiint\limits_M\frac{g}{\theta_0}\bar{\theta}\bar{w}\,\delta m-\iiint\limits_M\frac{g}{\theta_0}\overline{\theta'w'}\delta m$$
$$+\iiint\limits_M\frac{g^2}{N^2c_pT_0\theta_0}\bar{\theta}\bar{Q}\,\delta m+\iiint\limits_M\frac{g^2}{N^2c_pT_0\theta_0}\overline{\theta'Q'}\delta m, \tag{10.43}$$

其中 Q' 为 Q 相对于 $\bar{Q}$ 的扰动. (10.43)式减去(10.42)式，得

$$\frac{\partial A_p^*}{\partial t}=-\iiint_M \frac{g^2}{N^2\theta_0^2}\overline{\theta' v'}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}\delta m-\iiint_M \frac{g^2}{N^2\theta_0^2}\overline{\theta' w'}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}\delta m$$
$$-\iiint_M \frac{g}{\theta_0}\overline{\theta' w'}\delta m+\iiint_M \frac{g^2}{N^2 c_p T_0\theta_0}\overline{\theta' Q'}\delta m, \qquad (10.44)$$

这就是整个区域 V 内扰动有效势能的变化方程.

§10.5　能量间的相互转换

(10.35)式、(10.37)式、(10.42)式和(10.44)式联合在一起,就可以清楚地看到基本气流动能、扰动动能、基本气流有效势能和扰动有效势能四种能量之间的相互转换,

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial K_m^*}{\partial t}&=\iiint_M\left(\overline{u'v'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\overline{u'w'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}+\overline{v'^2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\overline{v'w'}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)\delta m+\iiint_M\frac{g}{\theta_0}\bar{\theta}\bar{w}\delta m\\
&\quad+\iiint_M(\bar{F}_x\bar{u}+\bar{F}_y\bar{v})\delta m,\\
\frac{\partial K_p^*}{\partial t}&=-\iiint_M\left(\overline{u'v'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\overline{u'w'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}+\overline{v'^2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\overline{v'w'}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)\delta m+\iiint_M\frac{g}{\theta_0}\overline{\theta' w'}\delta m\\
&\quad+\iiint_M(\overline{F_x' u'}+\overline{F_y' v'})\delta m,\\
\frac{\partial A_m^*}{\partial t}&=\iiint_M\left(\frac{g^2}{N^2\theta_0^2}\overline{\theta' v'}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}+\frac{g^2}{N^2\theta_0^2}\overline{\theta' w'}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}\right)\delta m-\iiint_M\frac{g}{\theta_0}\bar{\theta}\bar{w}\delta m+\iiint_M\frac{g^2}{N^2c_pT_0\theta_0}\bar{\theta}\bar{Q}\delta m,\\
\frac{\partial A_p^*}{\partial t}&=-\iiint_M\left(\frac{g^2}{N^2\theta_0^2}\overline{\theta' v'}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}+\frac{g^2}{N^2\theta_0^2}\overline{\theta' w'}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}\right)\delta m-\iiint_M\frac{g}{\theta_0}\overline{\theta' w'}\delta m\\
&\quad+\iiint_M\frac{g^2}{N^2c_pT_0\theta_0}\overline{\theta' Q'}\delta m.
\end{aligned}\right.$$

(10.45)

一、基本气流动能与扰动动能间的相互转换

比较(10.45)的头两式即知

$$\{K_p,K_m\}\equiv\iiint_M\left(\overline{u'v'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\overline{u'w'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}+\overline{v'^2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\overline{v'w'}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)\delta m \qquad (10.46)$$

是基本气流动能与扰动动能间的相互转换项. $\{K_p,K_m\}>0$ 表示扰动动能转换为基本气流动能;$\{K_p,K_m\}<0$ 表示基本气流动能转换为扰动动能.

在第八章，我们已经分析了(10.46)式右端 $\iiint_M \overline{u'v'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\delta m$ 一项的作用. 按图8.3，对于急流以北 $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}<0\right)$ 的导式槽线，动量向南输送($\overline{u'v'}<0$)，急流以南 $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}>0\right)$ 的曳式槽线，动量向北输送($\overline{u'v'}>0$)，故扰动动能转换为基本气流动能；急流以北的曳式和急流以南的导式恰相反，是基本气流动能转换为扰动动能. 至于(10.46)式的右端第二项 $\iiint_M \overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\delta m$ 的作用，按图8.3，在对流层急流以下 $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}>0\right)$，导式槽线 $\overline{u'w'}<0$(动量向下输送)，曳式槽线 $\overline{u'w'}>0$(动量向上输送)，因而，导式槽线使基本气流动能转换为扰动动能；曳式槽线正相反. (10.46)式右端第三、第四两项影响较小. 所以，有如下结论：

$$\{K_p, K_m\}_1 \equiv \iiint_M \overline{u'v'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\delta m \begin{cases} >0, & \text{急流以北导式，以南曳式，} \\ <0, & \text{急流以南曳式，以北导式；} \end{cases} \tag{10.47}$$

$$\{K_p, K_m\}_2 \equiv \iiint_M \overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\delta m \begin{cases} >0, & \text{对流层急流以下的曳式槽线，} \\ <0, & \text{对流层急流以下的导式槽线.} \end{cases} \tag{10.48}$$

但是，通常认为 $\{K_p, K_m\}_1$ 的数值要大于 $\{K_p, K_m\}_2$ 的数值，所以，中纬度槽脊线倾斜的作用，主要是使扰动动能转换为基本气流动能，加之，在赤道和极地的大量分析表明，对流层以下，u' 与 w' 是正相关，即 $\overline{u'w'}>0$，故在对流层急流以下，仍然是扰动动能转换为基本气流动能，$\{K_p, K_m\}>0$，这是大气通常发生的情况. 这是大气大尺度运动与经典流体力学湍流运动中的能量转换的不同之处，这也是早在第三章中我们提及的"负黏性"问题.

二、基本气流有效势能与扰动有效势能间的相互转换

比较(10.45)的第三式和第四式即知

$$\{A_m, A_p\} \equiv -\iiint_M \frac{g^2}{N^2\theta_0^2}\overline{\theta'v'}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}\delta m - \iiint_M \frac{g^2}{N^2\theta_0^2}\overline{\theta'w'}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}\delta m \tag{10.49}$$

是基本气流有效势能与扰动有效势能间的相互转换项. $\{A_m, A_p\}>0$ 表示基本气流有效势能转换为扰动有效势能；$\{A_m, A_p\}<0$ 表示扰动有效势能转换为基本气流有效势能.

在第八章，我们已经分析了(10.49)式右端 $\overline{\theta'v'}$ 和 $\overline{\theta'w'}$ 的作用. 按图8.4，对于中纬度常见的 Rossby 波槽脊线自下而上向西倾斜和相应温度槽落后于流场槽的 Rossby 螺旋结构(spiral structure)，$\overline{\theta'v'}>0$，$\overline{\theta'w'}>0$，即冷空气向南向下运动，暖

空气向北向上运动.而在对流层,通常$\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}<0$,$\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}>0$,而且一般也是稳定层结($N^2>0$),所以,有如下结论:

$$\{A_m,A_p\}_1=-\iiint\limits_M \frac{g}{N^2\theta_0^2}\overline{\theta' v'}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}\delta m \quad \left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}<0\right)$$

$$\begin{cases} >0, & \text{槽脊线自下而上向西倾斜,暖空气向北运动,} \\ & \text{冷空气向南运动,}\overline{\theta' v'}>0\text{(感热向北输送),} \\ <0, & \text{槽脊线自下而上向东倾斜,冷空气向北运动,} \\ & \text{暖空气向南运动,}\overline{\theta' v'}<0\text{(感热向南输送);} \end{cases} \tag{10.50}$$

$$\{A_m,A_p\}_2=-\iiint\limits_M \frac{g^2}{N^2\theta_0^2}\overline{\theta' w'}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}\delta m \quad \left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}>0\right)$$

$$\begin{cases} <0, & \text{槽脊线自下而上向西倾斜,暖空气上升,} \\ & \text{冷空气下沉,}\overline{\theta' w'}>0\text{(感热向上输送),} \\ >0, & \text{槽脊线自下而上向东倾斜,冷空气上升,} \\ & \text{暖空气下沉,}\overline{\theta' w'}<0\text{(感热向下输送).} \end{cases} \tag{10.51}$$

但是,通常认为$\{A_m,A_p\}_1$的数值要大于$\{A_m,A_p\}_2$的数值,因而$\{A_m,A_p\}>0$,即中纬度倾斜的槽脊线的作用仍然是有利于基本气流的有效势能转换为扰动有效势能.

三、基本气流的有效势能与基本气流动能间的相互转换

比较(10.45)的第一式和第二式即知

$$\{A_m,K_m\}\equiv\iiint\limits_M \bar{w}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial z}\delta m=\iiint\limits_M \frac{g}{\theta_0}\bar{\theta}\bar{w}\,\delta m \tag{10.52}$$

是基本气流有效势能与基本气流动能间的相互转换项.$\{A_m,K_m\}>0$表示基本气流有效势能转换为基本气流动能;$\{A_m,K_m\}<0$表示基本气流动能转换为基本气流有效势能.

对于 Hadley 环流(正环流),上升的是暖空气,下沉的是冷空气,平均有

$$\iiint\limits_M \frac{g}{\theta_0}\bar{\theta}\bar{w}\,\delta m>0;$$

而对于 Ferrel 环流(反环流),上升的是冷空气,下沉的是暖空气,平均有

$$\iiint\limits_M \frac{g}{\theta_0}\bar{\theta}\bar{w}\,\delta m<0,$$

所以

$$\{A_m, K_m\} = \iiint_M \frac{g}{\theta_0}\bar{\theta}\bar{w}\delta m \begin{cases} >0, & \text{Hadley 环流}, \\ <0, & \text{Ferrel 环流}. \end{cases} \tag{10.53}$$

四、扰动有效势能与扰动动能间的相互转换

比较(10.45)的第二式和第四式即知

$$\{A_p, K_p\} \equiv \iiint_M \overline{w'\frac{\partial \phi'}{\partial z}}\delta m = \iiint_M \frac{g}{\theta_0}\overline{\theta' w'}\delta m \tag{10.54}$$

是扰动有效势能与扰动动能间的相互转换项. $\{A_p, K_p\}>0$ 表示扰动有效势能转换为扰动动能；$\{A_p, K_p\}<0$ 表示扰动动能转换为扰动有效势能.

仿(10.51)式的分析，显然有

$$\{A_p, K_p\} = \iiint_M \frac{g}{\theta_0}\overline{\theta' w'}\delta m \begin{cases} >0, & \text{暖空气上升，冷空气下沉}, \\ <0, & \text{冷空气上升，暖空气下沉}. \end{cases} \tag{10.55}$$

所以，中纬度的温度槽落后于流场槽的形势有利于扰动有效势能转换为扰动动能.

以上分析的是四种基本能量形式间的相互转换. 下面，我们分析摩擦和非绝热因子的作用. 若令

$$\varepsilon_m = -\iiint_M (\bar{F}_x\bar{u} + \bar{F}_y\bar{v})\delta m = -\iiint_M \bar{\boldsymbol{F}}_h \cdot \bar{\boldsymbol{V}}_h \delta m, \tag{10.56}$$

$$\varepsilon_p = -\iiint_M (\overline{F_x' u'} + \overline{F_y' v'})\delta m = -\iiint_M \overline{\boldsymbol{F}_h' \cdot \boldsymbol{V}_h'}\delta m. \tag{10.57}$$

显然，$-\varepsilon_m$ 和 $-\varepsilon_p$ 分别是(10.35)式和(10.36)式右端最后一项，而且由(10.20)式有

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_m + \varepsilon_p. \tag{10.58}$$

通常 $\varepsilon_m<0, \varepsilon_p<0$，这分别说明摩擦(主要是湍流摩擦)消耗基本气流动能和扰动动能，即对基本气流和扰动起能汇的作用. 若再令

$$G_m = \iiint_M \frac{g^2}{N^2 c_p T_0 \theta_0}\bar{\theta}\bar{Q}\delta m = \iiint_M \frac{g}{c_p T_0 \partial\theta_0/\partial z}\bar{\theta}\bar{Q}\delta m, \tag{10.59}$$

$$G_p = \iiint_M \frac{g^2}{N^2 c_p T_0 \theta_0}\overline{\theta' Q'}\delta m = \iiint_M \frac{g}{c_p T_0 \partial\theta_0/\partial z}\overline{\theta' Q'}\delta m, \tag{10.60}$$

显然，G_m 和 G_p 分别是(10.42)式和(10.44)式右端最后一项，而且由(10.25)式有

$$\bar{G} = G_m + G_p. \tag{10.61}$$

通常，在全球范围来看，层结平均是稳定的，且低纬加热和高纬冷却，以及在同一纬圈上高温处加热和低温处降冷，因而 $G_m>0, G_p>0$. 这分别说明非绝热因子通常是增加基本气流有效势能和扰动有效势能，即对基本气流和扰动起能源的作用.

§ 10.6 大气能量循环

利用(10.46)、(10.49)、(10.52)和(10.54)式，又利用(10.56)、(10.57)、(10.59)和(10.60)式，则方程组(10.45)可以写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial K_m^*}{\partial t} = \{K_p, K_m\} + \{A_m, K_m\} - \varepsilon_m, \\ \dfrac{\partial K_m^*}{\partial t} = -\{K_p, K_m\} + \{A_p, K_p\} - \varepsilon_p, \\ \dfrac{\partial A_m^*}{\partial t} = -\{A_m, A_p\} - \{A_m, K_m\} + G_m, \\ \dfrac{\partial A_p^*}{\partial t} = \{A_m, A_p\} - \{A_p, K_p\} + G_p, \end{cases} \tag{10.62}$$

这就是大气能量循环的方程组.

根据大气能量循环的方程组和实际资料可得到对流层大气环流能量循环的大致图案. 图 10.1 是 1983 年 Oort 利用实际资料计算得到的对流层中大气的能量平衡，其中正方形中的数字表示北半球某能量的年平均值，单位为 $10^5 \mathrm{J \cdot m^{-2}}$，箭头的方向表示年平均能量形式的转换方向或能量的制造和消耗，箭头旁的数字单位为 $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$.

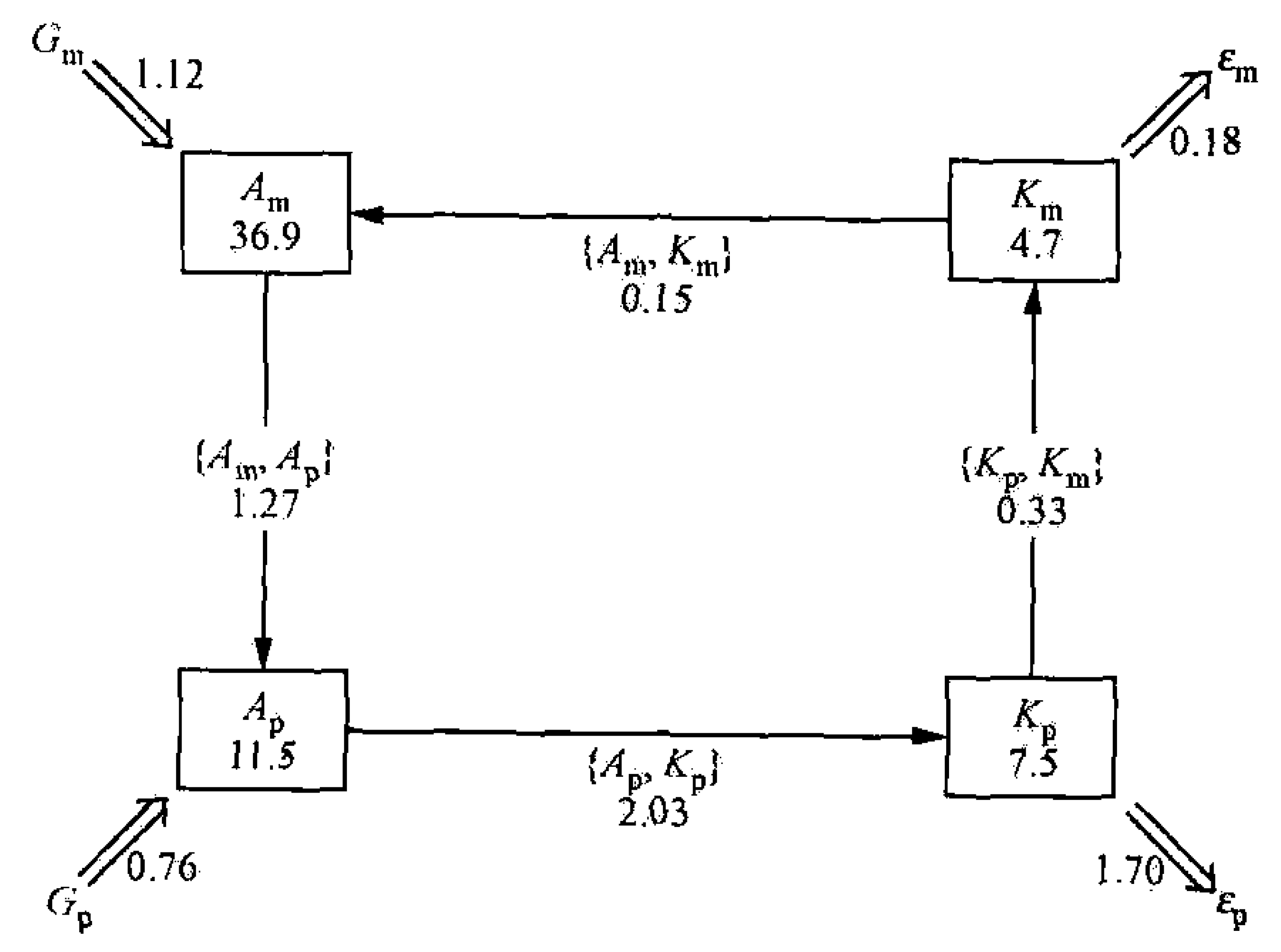


图 10.1 对流层大气能量循环

由图 10.1 我们可以得到如下几点结论：

(1) 由于太阳辐射的纬度差异，低纬辐射加热和高纬辐射冷却，形成了基本气流的有效势能；

(2) 通过中纬度的斜压经向扰动(温度槽落后于流场槽)对感热的输送使得基本气流的有效势能转换为扰动有效势能；

(3) 通过中纬度斜压经向扰动形成的暖空气上升和冷空气下沉，使得扰动有效势能转换为扰动动能；

(4) 通过中纬度 Rossby 波的螺旋结构对西风动量的输送，使得扰动动能转换为基本气流的动能；

(5) 平均经圈环流(Hadley 环流和 Ferrel 环流)的净作用使得基本气流的动能

转换为基本气流的有效势能；

(6) 基本气流的动能和扰动动能都由于摩擦而消耗.

由此可见：平均经圈环流和大型扰动(即 Rossby 波)在大气大尺度的能量循环中起着重要的作用.

上述分析还告诉我们：正是由于 Rossby 波对感热和动量的输送才使基本气流得以维持. 在第八章我们也作了类似的分析.

最后还要指出：在经典湍流理论中，湍涡总是从基本气流得到能量，但在大气环流中，基本气流却从扰动中获得能量. 因此，经典的湍流黏性概念不能用于大气环流，在大气环流中，存在的是“负黏性”. 我们在第三章也作过类似的分析. 此外，由于净辐射的纬度差异和地面与大气能量交换的结果，通常认为，低纬度是大气运动的能源.

§ 10.7 能量转换与 Richardson 数

为了早一点知道 Richardson 数，我们在 § 4.2 中粗糙地引入了它，现在我们从能量转换的角度较严格地说明 Richardson 数，主要是分析层结和风速垂直切变对扰动动能的作用.

首先，在稳定层结的条件下，对流和湍流都不易发展，因而要消耗扰动动能，这部分扰动动能转换为扰动有效势能. 从(10.54)式知，对单位质量空气而言，扰动动能转换为扰动有效势能的大小为

$$W_1 = -\frac{g}{\theta_0}\overline{\theta' w'}. \tag{10.63}$$

其次，风速垂直切变通常有利于对流和湍流的发展，因而扰动动能要增加，这部分扰动动能要从基本气流的动能转换而来. 从(10.46)式知，对单位质量空气而言，基本气流的动能转换为扰动动能的大小为

$$W_2 = -\overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{v'w'}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}. \tag{10.64}$$

若 $W_2 > W_1$，表示由基本气流转换来的扰动动能大于由于稳定层结所消耗的扰动动能，扰动会得到发展；否则，$W_2 < W_1$，扰动将减弱，所以，用比值 W_1/W_2 来定义判别扰动能否增强的一个无量纲参数，即所谓 Richardson 数：

$$Ri = \frac{W_1}{W_2} = \frac{-\dfrac{g}{\theta_0}\overline{\theta' w'}}{-\overline{u'w'}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{v'w'}\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial z}}. \tag{10.65}$$

若应用湍流半经验理论，动量和热量都是从高值向低值输送，即

$$-\overline{u'w'} = K_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad -\overline{v'w'} = K_M \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}, \quad -\overline{\theta' w'} = K_H \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \approx K_H \frac{\partial \theta_0}{\partial z}, \tag{10.66}$$

其中 K_M 和 K_H 分别称为动量湍流系数和热量湍流系数.

(10.66)式代入到(10.65)式,得到的 Ri 称为通量 Richardson 数,记为 Ri_f,即

$$Ri_f = \frac{K_H}{K_M} \cdot \frac{\dfrac{g}{\theta_0}\dfrac{\partial \theta_0}{\partial z}}{\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2} = \frac{K_H}{K_M} \cdot \frac{N^2}{\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{V}_h}{\partial z}\right)^2}. \tag{10.67}$$

上式令 $K_H = K_M$,则得到一般的 Richardson 数:

$$Ri = \frac{N^2}{\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{V}_h}{\partial z}\right)^2}. \tag{10.68}$$

§10.8 湍流的串级(cascade)与能谱(energy spectrum)

早在第一章我们就已指出,由于大气中的 Reynolds 数 Re 非常大,所以,大气运动是湍流运动,观测表明:湍流运动由各种不同尺度的涡旋(称为湍涡)组成,而且尺度较大的湍涡不稳定会产生尺度较小的湍涡,若它再不稳定便产生尺度更小的湍涡,直到分子黏性抑制这种分裂过程为止. 这就是湍流运动的串级过程. 在串级中,湍涡并不完全充满空间,因而又称为间隙(intermittency)湍流串级. 由小尺度湍涡向大尺度湍涡输送能量即是反串级,也就是负黏性.

与湍流串级一样,在正常情况下,湍流脉动运动的动能主要来自大尺度的湍涡,并且也逐步串级向较小尺度的湍涡输送. 湍流脉动动能 $K_p = \frac{1}{2}(\overline{u'^2 + v'^2 + w'^2})$ 应该是各种不同尺度(用波数 k 表示)的湍涡脉动动能的叠加,即

$$K_p \equiv \int_0^\infty S(k)\delta k, \tag{10.69}$$

其中 $S(k)$ 表示波数为 k 的单位波数的湍涡脉动动能,也称为能谱,其单位为 $m^3 \cdot s^{-2}$,能谱图见图 10.2. 在图中,$k=k_0$ 附近的是大尺度湍涡的含能区($S(k) \sim k^3$),在该区中,湍流在各个方向上的性质差别很大,即所谓非各向同性湍流. 图中 $k=k_1$ 附近的是中尺度湍涡的惯性区($S(k) \sim k^{-5/3}$),$k=$

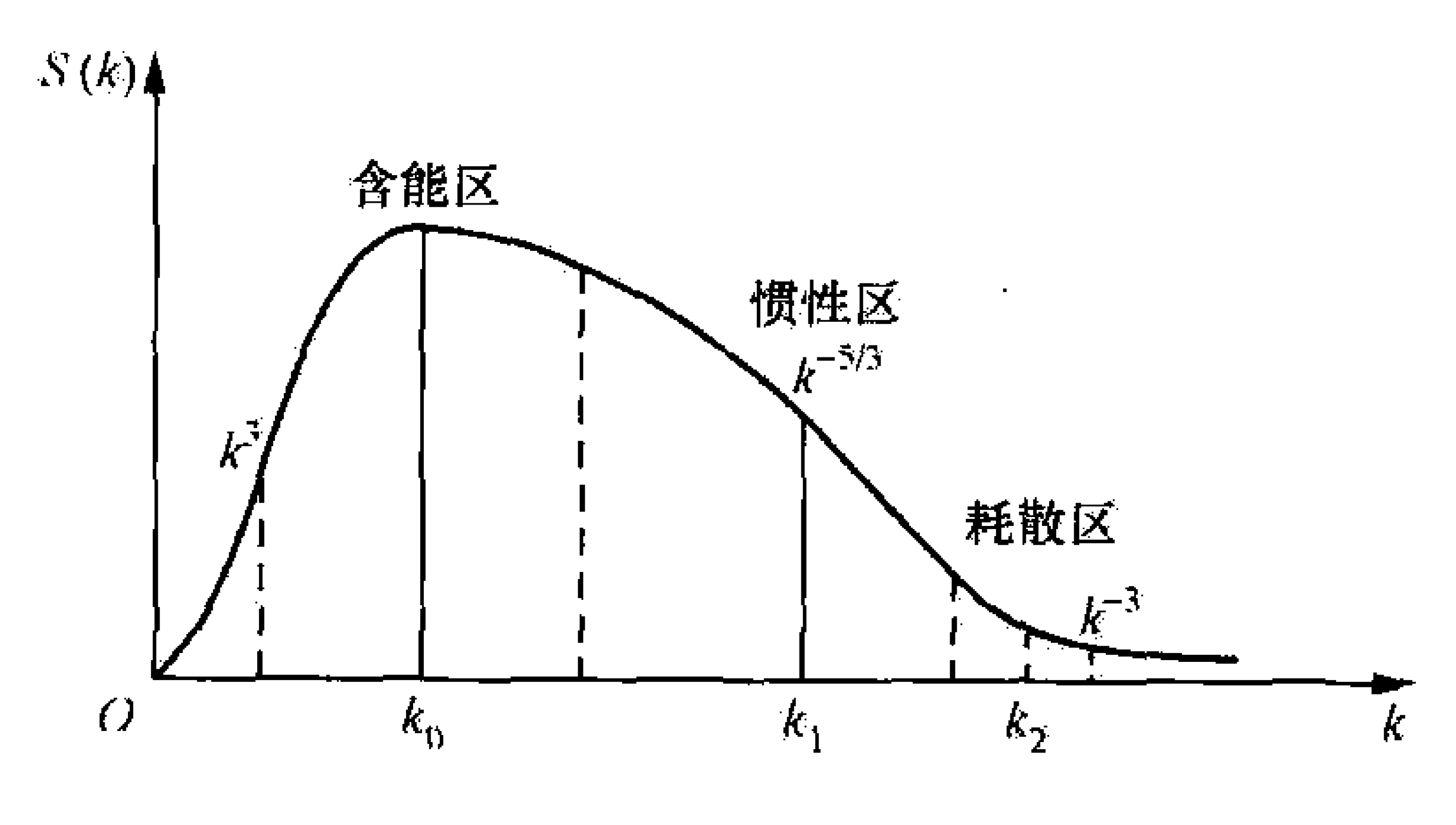


图 10.2 湍流脉动能谱图

k_2 附近的是小尺度湍涡的耗散区($S(k)\sim k^{-3}$). 显然,含能区是湍流的能源区,耗散区是湍流的能汇区,而介于含能区与耗散区之间的惯性区被认为在这里湍流具有局部各向同性的性质.

在惯性区内,Kolmogorov 认为:空间相距为 r 的两点的某物理量(例如脉动速度 u')的结构函数

$$D(r) = \overline{[u'(x+r) - u'(x)]^2}, \tag{10.70}$$

不仅与 r 有关,也与大尺度湍涡的能量输送率 ε(认为它等于能量的耗散率,与§10.5 中的 ε_p 意义相同,这里只是微分形式,其单位为 $m^2 \cdot s^{-3}$)有关. 应用量纲分析,他假定

$$D(r) = C_1(\varepsilon r)^{\alpha}, \tag{10.71}$$

其中 C_1 为无量纲常数. 上式中左端 $D(r)$ 的单位为 $m^2 \cdot s^{-2}$,而右端 εr 的单位为 $m^3 \cdot s^{-3}$,两边单位相同,则只能是

$$\alpha = 2/3, \tag{10.72}$$

因而

$$D(r) = C_1 \varepsilon^{2/3} r^{2/3}. \tag{10.73}$$

$\alpha=2/3$ 称为结构函数的标度(scaling)指数. (10.73)式称为惯性区结构函数的 2/3 次方定律,即结构函数的标度律(scaling law).

此外,Kolmogorov 也认为:在惯性区内的能谱 $S(k)$ 不仅与 k 有关,也与 ε 有关. 他同样假定

$$S(k) = C_2 \varepsilon^{\alpha} k^{-\beta}, \tag{10.74}$$

其中 $\alpha=2/3$,C_2 为无量纲常数. 上式中左端 $S(k)$ 的单位为 $m^3 \cdot s^{-2}$,而右端 ε^{α} 的单位为 $m^{4/3} \cdot s^{-2}$,k 的单位为 m^{-1}. 两边单位相同,则必须

$$\beta = 5/3, \tag{10.75}$$

因而

$$S(k) = C_2 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \tag{10.76}$$

$\beta=5/3$ 称为能谱的标度指数. (10.76)式称为惯性区能谱的 $-5/3$ 次方定律,即在波数空间能谱的标度律.

有人从不同角度分析和论证,在含能区和耗散区分别有

$$S(k) \sim k^3, \quad S(k) \sim k^{-3}. \tag{10.77}$$

复习思考题

1. 如果 Rossby 波槽线呈南北走向和铅直走向,基本气流的动能与扰动动能间有无转换? 为什么?

2. 如果温度槽与流场槽同位相,基本气流有效势能与扰动有效势能间有无转

换？为什么？若温度槽超前流场槽，结果又如何？

3. 用平均经圈环流说明$\{A_m, K_m\}$的意义和正负.

4. 在一天的中午，风速常常加强；日落，风速常常减弱，试从能量转换去解释.

5. 说明大气基本气流维持的能量因素.

6. 叙述对流层大气环流能量循环过程.

7. 叙述"负黏性"的物理含义.

8. 什么是湍流的串级过程？

习　题

1. 证明整个大气有效势能可表为

$$A^* = \frac{c_p}{(1+\kappa)gP_0^\kappa}\iint_S\int_0^\infty (p^{1+\kappa} - p_0^{1+\kappa})\delta\theta\delta S,$$

其中 $\kappa = R/c_p$，θ 为位温，p_0 为等位温面上的平均气压，S 为等位温面的总面积.

提示：利用第四章习题 5.

2. 证明整个大气的基本气流有效势能可表为

$$A_m^* = \frac{\kappa c_p}{2gP_0^\kappa}\iint_S\int_0^\infty p_0^{1+\kappa}\overline{\left(\frac{p'}{p_0}\right)^2}\delta\theta\delta S = -\frac{\kappa c_p}{2gP_0^\kappa}\iint_S\int_0^{p_0}\frac{\theta_0^2}{p_0^{1-\kappa}\left(\dfrac{\partial\theta_0}{\partial p}\right)}\overline{\left(\frac{\theta'}{\theta_0}\right)^2}\delta p\delta S.$$

提示：利用第四章习题 4 和 5.

3. 利用 Ekman 定律，对于行星边界层中的单位截面气柱，求

(1) 气压梯度力作功(或湍流摩擦耗损)；

(2) 基本气流动能(即平均运动动能)；

(3) 平均运动动能与脉动动能间的转换$\left(即 \{K_m, K_p\} = \iiint_V\left(T_{zx}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial z} + T_{zy}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)\delta v\right)$.

4. 上题若假定空气密度

$$\rho = \rho_0 e^{-\alpha z} \quad (\alpha > 0),$$

其结果如何？

第十一章　流动的稳定性

本章的主要内容有：

叙述流动稳定性的基本概念及表述方法；

论述扰动发展的能源及正压和斜压稳定度；

讨论主要大气波动，即重力波、惯性重力波和 Rossby 波的稳定性，附带讨论锋面波的稳定性；

简述弱非线性条件下，有限振幅 Rossby 波的稳定性；

介绍常微分方程的稳定性理论，并介绍它在大气中的应用，主要是气候系统的平衡态和大气流场的拓扑结构.

§11.1　稳定性的基本概念

在现实世界中，任何系统总会受着各种各样的扰动作用. 这种作用常常使系统偏离它原来的运动状态，因而有必要研究这种扰动对原有运动状态的影响. 通常把系统未受扰动的状态称为平衡态（在大气中，平衡态多指一定方式分布的基本流动）. 所谓平衡态是稳定的，就是说扰动使运动离开平衡位置后仍回到它原有的平衡位置. 反之，若运动趋向于达到一个新的位置，我们就称平衡态是不稳定的.

图 11.1 的单摆有两个平衡态 A 和 B. 位置低的平衡态 A 是稳定的，位置高的平衡态 B 则是不稳定的. 实际上，如果单摆位于 B 点，那么，即使是任意小的扰动都足以使单摆远离 B 点的邻域. 但单摆在 A 点就不一样了，在单摆受到扰动后，它以逐渐减小的速度运动，当扰动不太大时，单摆不会跑出 A 点附近的任意给定的区域.

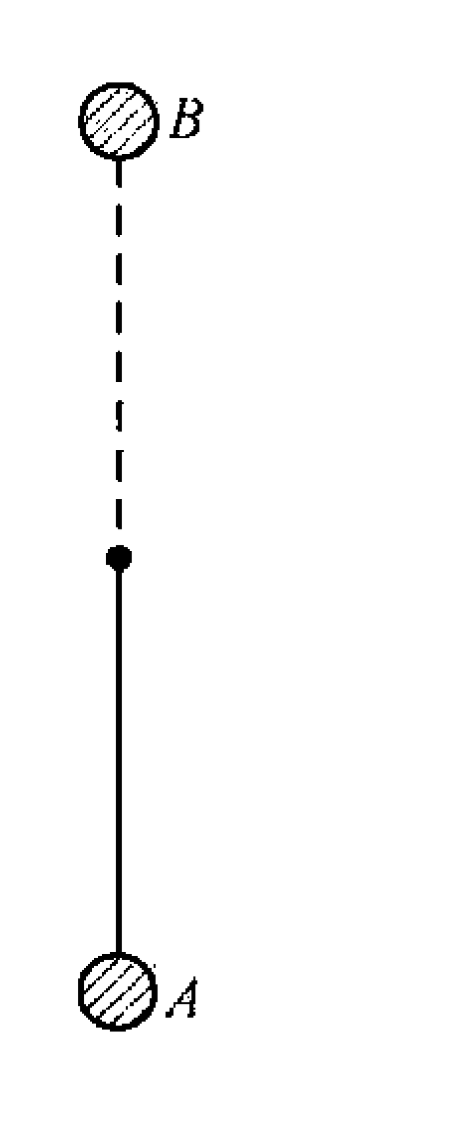


图 11.1　单摆运动的平衡态

若密度小的油在一个瓶子的下部，密度大的酱油在上部，这是一种很容易理解的不稳定的平衡态，这是因为密度大的酱油相对于密度小的油受到较大的重力的缘故. 大气也有类似的情况，不过，因为空气是可压缩性的流体，即便下层空气的密度大于上层空气的密度，也还不一定是稳定的状态. 因为它的运动还

受温度和气压所制约.在第四章我们已经知道,当温度的垂直减温率$\Gamma \equiv -\partial T_0/\partial z$大于干绝热过程温度垂直减温率$\Gamma_d \equiv -\mathrm{d}T/\mathrm{d}z = g/c_p$时,层结是不稳定的,否则,层结是稳定的.

流动稳定性最感兴趣的问题之一是层流向湍流过渡的问题,它是由 Reynolds 在 1883 年的圆管实验而引起的.通常认为湍流是层流不稳定的结果.

至于不稳定的原因,因具体问题而异.通常,力的平衡的破坏是造成不稳定的一个原因.例如,单摆是在重力和张力平衡受到破坏后形成不稳定的;而密度分层不同引起的不稳定是重力和浮力平衡破坏的结果.在流体中,不同因子对流动稳定性有不同的作用.例如,黏性通常耗散扰动的能量,因而它一般是稳定的因素.不过,在某些条件下(如存在平行切变流时),黏性乃是动量输送的体现,因而,它也内含着不稳定的作用.在流体中刚体边界通常是限制扰动发展的因子,但是在刚体边界附近的边界层内形成强的速度切变又是一个不稳定的因子.

在大气中存在很多波动通常都可以归之为基本状态(如层结、基本气流)对于小扰动的不稳定性,而且,其中许多充分发展的有限振幅波动往往是小振幅波动不稳定发展的结果.因此,大气中流动的稳定性常常是论述波动的稳定性.若在某些条件下,小扰动不发展或随时间衰减,则称基本状态是稳定的,有时也说波是稳定的;若在某些条件下,小扰动随时间增强,则称基本状态是不稳定的,有时也说波是不稳定的.扰动或波的稳定和不稳定统称为扰动或波的稳定度.研究扰动或波的稳定度的问题统称为稳定度问题.

关于稳定度问题,早在 19 世纪 80 年代,Poincaré 和 Lyapunov 就作了系统研究.如果是线性系统,系统的演化从稳定度角度考虑只会说明平衡态是稳定还是不稳定,绝不会有新的状态出现.但实际上物理状态的演化是各种因素相互作用的结果,它将导致系统的状态不断交替,新的状态不断出现,这些就只能用系统的非线性来说明.在实际问题中,系统的状态通常还依赖于一些参数,如μ,当参数μ平滑或突然变化时,常常要改变系统的宏观结构.若参数μ变化了$O(\varepsilon)$(ε表微量),相应,系统的结构(或解)也只改变了$O(\varepsilon)$,则我们说系统是结构稳定的,或者说系统的相图拓扑结构不变;否则称系统是构造不稳定的.在构造不稳定的情况下,随着参数μ的变化,系统的平衡状态常常分裂成一种或多种新的平衡态,这样,系统的老的结构被新的结构所代替,这就是所谓分岔(bifurcation)现象.有时,在参数μ变化时,系统的状态由一种平衡态突然变成另一种平衡态,这就是所谓突变(catastrophe)现象.分岔和突变是系统的非线性所形成的,它是自然科学中和社会科学中普遍存在的现象.例如,在 Reynolds 实验中,当控制参数 Re(Reynolds 数)变化超过某一临界值时,流动由层流分岔成湍流;在两平板间的流体,当两板温差或 Ra(Rayleigh 数)超过某一数值时,流体便由静止状态分岔成对流状态;地球由球形变

成椭球形是由于转动而引起的分岔；当温度达到 100℃时，液态水就突变成汽态，等等.

流体运动稳定性的研究归结为偏微分方程的求解和定性分析. 第一种方法是正交模方法(normal mode approach)，第二种方法是整体方法(global approach)，它包括能量法和 Lyapunov 直接方法. 正交模方法是将线性化的方程组的解设为 $Ae^{i(kx-\omega t)}$ 的形式，这在第七章我们已经讨论过，但这里我们考察在一定条件下 ω 是实数还是复数，这样，就将稳定度问题处理为以 ω 作为本征值的本征值问题. 正交模方法可以提供稳定或不稳定应满足的条件，用起来比较直观，也取得了不少有意义的结果，不过，它只能解决线性问题；整体方法，主要是 Lyapunov 方法，它是将偏微分方程组化为常微分方程，再建立常微分方程组稳定性的分析方法. 这种方法是从稳定度的最初概念(流动稳定性是对初始扰动的反应，即初值问题)出发的，它既能分析线性问题，又能分析非线性问题，不过，这种方法无统一法则来构造 Lyapunov 泛函. 20 世纪 60 年代以来，由于摄动法，特别是多尺度摄动的发展，使得稳定度的研究有较大的发展.

本章首先说明应用正交模方法研究稳定度的途径和一些结论，最后介绍常微分方程的稳定性理论及其在大气中的应用.

由第七章分析知，可考虑空气流动是在一定常的沿纬圈平均的基本气流 $\bar{u}(y,z)$ 上叠加一个小扰动，即

$$u=\bar{u}+u',\quad v=v',\quad w=w'. \tag{11.1}$$

相应，状态参量也是在基本状态上叠加一个小扰动量，即

$$p=\bar{p}+p',\quad \rho=\bar{\rho}+\rho',\quad T=\bar{T}+T',\quad \theta=\bar{\theta}+\theta'. \tag{11.2}$$

对扰动量的线性方程组，依正交模方法，可设特解为

$$q'=Ae^{i(kx-\omega t)}. \tag{11.3}$$

若 k 为实数，考虑基本流场对于扰动的稳定性就要看 ω 是实数还是复数. 若 ω 是实数，则扰动和波的振幅随时间没有变化，因而基本流场是稳定的，波称为是中性波(neutral waves). 若 ω 对某些 k 为复数，即

$$\omega=\omega_r+i\omega_i, \tag{11.4}$$

则将(11.4)式代入(11.3)式有

$$q'=Ae^{\omega_i t}e^{i(kx-\omega_r t)}. \tag{11.5}$$

由此可知，ω 的实部 ω_r 确定了波在 x 方向的相速度，即

$$c_r=\omega_r/k. \tag{11.6}$$

而 ω 的虚部 ω_i 出现在振幅因子 $Ae^{\omega_i t}$ 中，确定了波振幅随时间的增长. 形式上看，如 $\omega_i>0$，扰动将随时间增长；$\omega_i<0$，扰动将随时间衰减. 但复数经常成对出现(共轭复数对)，而且方程的通解为上述含有增长部分和含有衰减部分各特解之叠加，叠加

的结果扰动仍增长，所以，$\omega_i \neq 0$，即 ω 为复数就表征扰动和波的振幅随时间增长，因而基本流场是不稳定的，相应波也称为是不稳定的或发展的，而且 $|\omega_i|$ 称为不稳定波的增长率. 特别称 $\omega_i = 0$ 的情况为边际(marginal)稳定波. 因 $\omega = kc$，则(11.4)式可改写为

$$c = c_r + \mathrm{i}c_i \quad (\omega_i = kc_i). \tag{11.7}$$

这样，不稳定波的增长率为

$$|\omega_i| = |kc_i|. \tag{11.8}$$

通常，根据 $\omega_i \neq 0$ 或 $c_i \neq 0$ 导出的条件称为不稳定的必要条件；若在条件(A)下，导出 $\omega_i = 0$ ($c_i = 0$)，则条件(A)称为稳定的充分条件；若在条件(B)下，必有 $\omega_i \neq 0$ ($c_i \neq 0$)，则条件(B)称为不稳定的充分条件. 稳定或不稳定的充分条件通称为稳定度判据.

§11.2 重力波的稳定度

因为大气小尺度运动的主要波动是重力波，因而重力波的稳定度是大气小尺度运动的问题.

一般讨论重力波的稳定度都要涉及一个无量纲参数，它就是在第四章我们已定义过的 Richardson 数(见(4.58)式). 现在我们用 $\partial \bar{u}/\partial z$ 表风速的垂直切变，则它定义为

$$Ri \equiv N^2 \Big/ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2, \tag{11.9}$$

其中 N 是 Brunt-Väisälä 频率.

本节分密度连续和不连续两种情况来说明.

一、分层流中重力内波的稳定度(Kelvin-Helmholtz, K-H 稳定度)

在密度不连续的分界面系统中，若存在速度切变时，在界面上产生的重力内波称为分界面波(interfacial waves). 我们考虑两层流体系统，设每层流体都是无黏和均匀不可压缩的. 设下层流体($0 \leqslant z \leqslant h_1$)的密度为 ρ_1 = 常数，基本气流为 $\bar{u}_1$ = 常数；上层流体($h_1 \leqslant z \leqslant H = h_1 + h_2$)的密度为 ρ_2 = 常数，基本气流为 $\bar{u}_2$ = 常数. 通常

$$\rho_2 < \rho_1, \quad \bar{u}_2 > \bar{u}_1. \tag{11.10}$$

这样，两层流体的分界面为

$$z = h_1(x, y, t), \tag{11.11}$$

而流体的总深度为

$$H = h_1 + h_2, \tag{11.12}$$

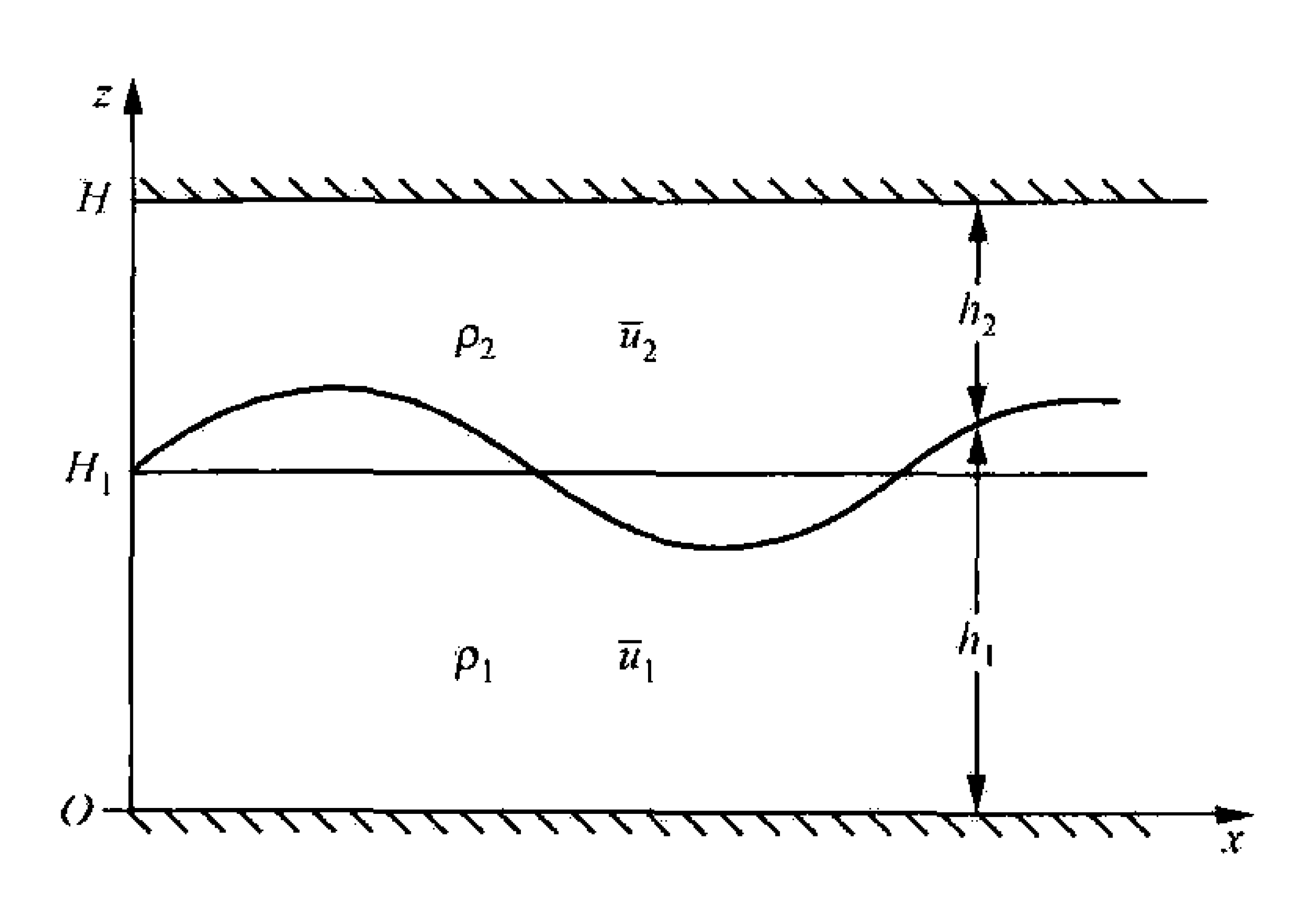


图 11.2 包含速度垂直切变的分层流体

见图 11.2.

为了简化,设运动限度在(x,z)平面,分界面受扰动后使得

$$h_1 = H_1 + h_1', \quad h_2 = H_2 + h_2', \tag{11.13}$$

相应

$$u_j = \bar{u}_j + u_j', \quad w_j = w_j',$$
$$p_j = \bar{p}_j + p_j' \quad (j = 1,2). \tag{11.14}$$

显然,$\bar{p}_j(j=1,2)$满足静力学关系:

$$\frac{\partial \bar{p}_j}{\partial z} = -g\rho_j \quad (j = 1,2). \tag{11.15}$$

设扰动量为小量,则线性化的方程组写为

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u_j' = -\dfrac{1}{\rho_j}\dfrac{\partial p_j'}{\partial x}, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \dfrac{\partial}{\partial x}\right) w_j' = -\dfrac{1}{\rho_j}\dfrac{\partial p_j'}{\partial z} \quad (j = 1,2), \\ \dfrac{\partial u_j'}{\partial x} + \dfrac{\partial w_j'}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{11.16}$$

式中 $j=1$ 代表下层,$j=2$ 代表上层.

将(11.16)的第一式对 z 微商,第二式对 x 微商,然后相减,并消去 p_j',再利用(11.16)的第三式消去 u_j',得到

$$\mathscr{L}_j w_j' = 0 \quad (j = 1,2), \tag{11.17}$$

其中

$$\mathscr{L}_j \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \quad (j = 1,2). \tag{11.18}$$

如图 11.2,两层流体限制于 $z=0$ 和 $z=H$ 的刚壁之间,因而,边条件取为

$$w_1'\big|_{z=0} = 0, \quad w_2'\big|_{z=H} = 0; \tag{11.19}$$

至于分界面 $z=h_1 \approx H_1$,根据压力场连续,有下列条件:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x}\right)(p_1' - p_2') + w_j' \frac{\partial}{\partial z}(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\right]_{z=H_1} = 0 \quad (j = 1,2). \tag{11.20}$$

利用(11.15)式,(11.20)式可改写为

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x}\right)(p_1' - p_2') - g(\rho_1 - \rho_2) w_j'\right]_{z=H_1} = 0 \quad (j = 1,2). \tag{11.21}$$

下面，在边条件(11.19)和(11.21)下，求方程组(11.17)的本征值问题. 设方程组(11.17)的单波解为

$$w_j' = W_j(z)e^{ik(x-ct)} \quad (j=1,2), \tag{11.22}$$

代入方程组(11.17)，在 $c \neq \bar{u}_j (j=1,2)$ 的条件下得

$$\frac{d^2 W_j}{dz^2} - k^2 W_j = 0 \quad (j=1,2). \tag{11.23}$$

利用边条件(11.19)，上述方程的解可以写为

$$\begin{cases} W_1(z) = A\sinh kz, \\ W_2(z) = B\sinh k(H-z), \end{cases} \tag{11.24}$$

其中 A,B 为二任意常数.

将(11.24)式代入(11.22)式即求得 $w_j'(j=1,2)$，再代入方程组(11.16)，可求得 $u_j', p_j' (j=1,2)$，在积分时，取积分常数为零，于是得

$$\begin{cases} u_1' = iA\cosh kz\, e^{ik(x-ct)}, \\ w_1' = A\sinh kz\, e^{ik(x-ct)}, \\ p_1' = i\rho_1(c-\bar{u}_1)A\cosh kz\, e^{ik(x-ct)}; \end{cases} \tag{11.25}$$

$$\begin{cases} u_2' = -iB\cosh k(H-z)e^{ik(x-ct)}, \\ w_2' = B\sinh k(H-z)e^{ik(x-ct)}, \\ p_2' = -i\rho_2(c-\bar{u}_2)B\cosh k(H-z)e^{ik(x-ct)}. \end{cases} \tag{11.26}$$

将 p_1', p_2', w_1', w_2' 代入分界面条件(11.21)，得

$$\begin{cases} [k(c-\bar{u}_1)^2\rho_1\cosh kH_1 - g(\rho_1-\rho_2)\sinh kH_1]A \\ \qquad + [k(c-\bar{u}_1)(c-\bar{u}_2)\rho_2\cosh kH_2]B = 0, \\ [k(c-\bar{u}_1)(c-\bar{u}_2)\rho_1\cosh kH_1]A \\ \qquad + [k(c-\bar{u}_2)^2\rho_2\cosh kH_2 - g(\rho_1-\rho_2)\sinh kH_2]B = 0. \end{cases} \tag{11.27}$$

这是 A,B 的齐次线性代数方程组，它有非零解的条件是必须而且只有 A,B 的系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} k(c-\bar{u}_1)^2\rho_1\cosh kH_1 - g(\rho_1-\rho_2)\sinh kH_1 & k(c-\bar{u}_1)(c-\bar{u}_2)\rho_2\cosh kH_2 \\ k(c-\bar{u}_1)(c-\bar{u}_2)\rho_1\cosh kH_1 & k(c-\bar{u}_2)^2\rho_2\cosh kH_2 - g(\rho_1-\rho_2)\sinh kH_2 \end{vmatrix}$$

$$=0. \tag{11.28}$$

将上述行列式展开得

$$k(c-\bar{u}_1)^2\rho_1\lambda_1 + k(c-\bar{u}_2)^2\rho_2\lambda_2 - g(\rho_1-\rho_2) = 0 \tag{11.29}$$

或

$$(\rho_1\lambda_1+\rho_2\lambda_2)c^2 - 2(\rho_1\lambda_1\bar{u}_1+\rho_2\lambda_2\bar{u}_2)c + \left[\rho_1\lambda_1\bar{u}_1^2 + \rho_2\lambda_2\bar{u}_2^2 - \frac{g}{k}(\rho_1-\rho_2)\right] = 0, \tag{11.30}$$

其中

$$\lambda_1 \equiv \coth kH_1, \quad \lambda_2 \equiv \coth kH_2. \tag{11.31}$$

由方程(11.30)求得

$$c = \frac{\lambda_1\rho_1\bar{u}_1 + \lambda_2\rho_2\bar{u}_2}{\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2} \pm \sqrt{\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{k(\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2)} - \frac{\lambda_1\lambda_2\rho_1\rho_2(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)^2}{(\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2)^2}}. \tag{11.32}$$

若令

$$\bar{u}_1 = \bar{u} - \hat{u}, \quad \bar{u}_2 = \bar{u} + \hat{u}, \tag{11.33}$$

即令

$$\bar{u} = (\bar{u}_1 + \bar{u}_2)/2, \quad \hat{u} = (\bar{u}_2 - \bar{u}_1)/2, \tag{11.34}$$

这意味着 $\bar{u}$ 表示平均基本气流，$\hat{u}$ 表征基本气流的垂直切变. 再令

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, \quad \Delta\rho = \rho_1 - \rho_2. \tag{11.35}$$

因通常 $\Delta\rho \ll \rho_1, \rho_2$，则可以近似取 $\rho \approx \rho_1 \approx \rho_2$（注意，这是数量上的近似，不能因此而取 $\Delta\rho = 0$）.

这样，(11.32)式可改写为

$$\begin{aligned} c &= \frac{\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \pm \sqrt{\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{k(\lambda_1 + \lambda_2)\rho} - \frac{\lambda_1\lambda_2(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}} \\ &= \bar{u} + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}\hat{u} \pm \sqrt{\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{k(\lambda_1 + \lambda_2)\rho} - \frac{4\lambda_1\lambda_2\hat{u}^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}. \end{aligned} \tag{11.36}$$

由此可知：c 与 $\bar{u}, \hat{u}, g, k, \rho_1 - \rho_2$ 等有关. 而且，若根号内的数值为零或正，c 为实数，则为中性波，分层流是稳定的；若根号内数值为负，c 为复数，则分层流是不稳定的. 所以，分层流中重力内波稳定度的充分必要条件为

$$\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{k(\lambda_1 + \lambda_2)\rho} - \frac{4\lambda_1\lambda_2\hat{u}^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \begin{cases} \geqslant 0, & \text{稳定}, \\ < 0, & \text{不稳定}. \end{cases} \tag{11.37}$$

显然，重力起稳定的作用，风速垂直切变起不稳定的作用. 注意在本问题中

$$\begin{cases} N^2 \equiv -\dfrac{g}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial z} \approx \dfrac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho H}, \\ \left(\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)^2 \approx \left(\dfrac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{H}\right)^2 = \dfrac{4\hat{u}^2}{H^2}. \end{cases} \tag{11.38}$$

这样，Richardson 数(11.9)式可改写为

$$Ri = (\rho_1 - \rho_2)gH/4\rho\hat{u}^2. \tag{11.39}$$

若再取

$$H_1 = H_2 = H/2,$$

相应

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \coth\frac{kH}{2},$$

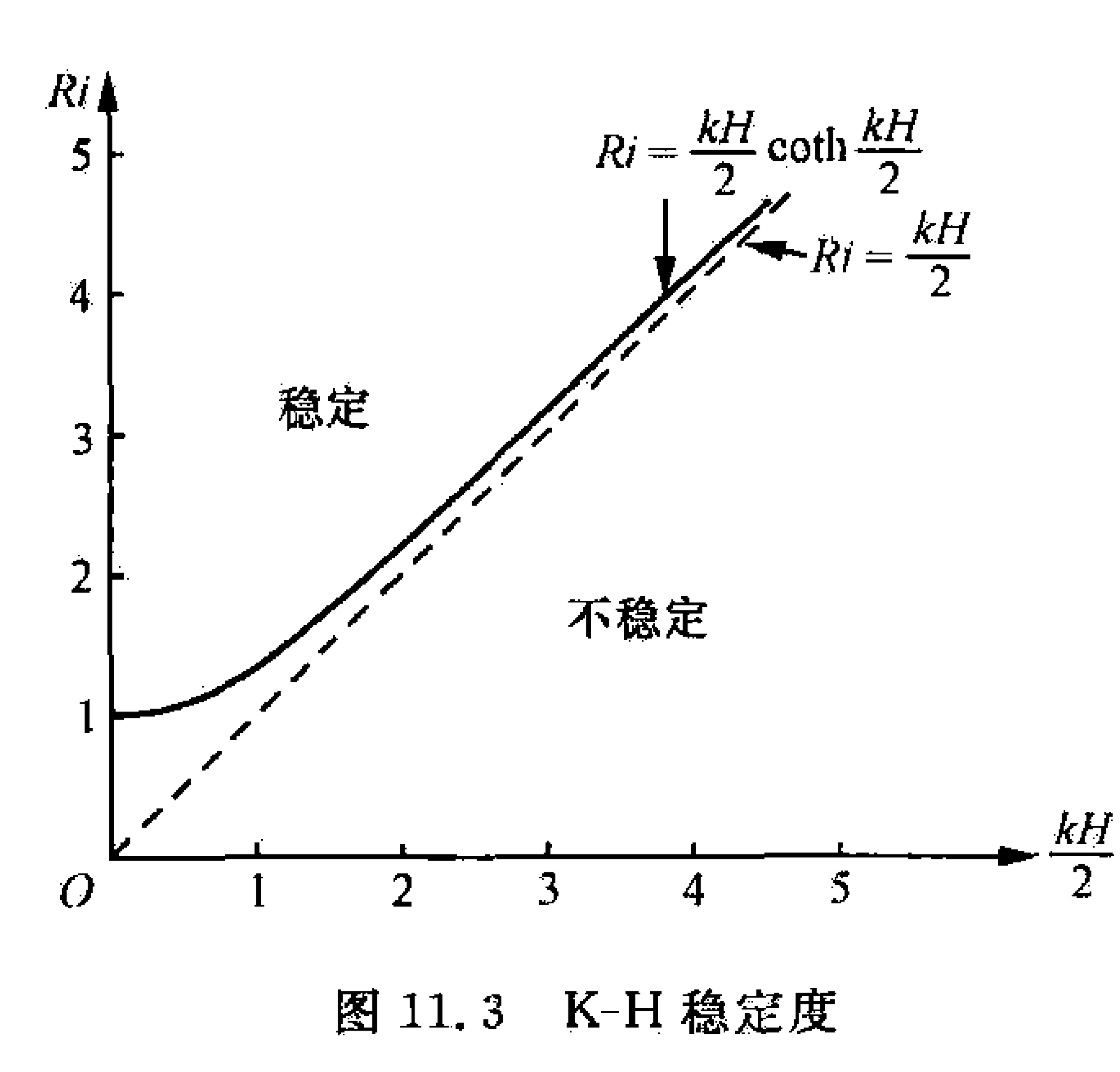


图 11.3 K-H 稳定度

这样,(11.37)式可改写为

$$Ri\begin{cases}\geqslant \dfrac{kH}{2}\lambda = \dfrac{kH}{2}\coth\dfrac{kH}{2}, & \text{稳定},\\ < \dfrac{kH}{2}\lambda = \dfrac{kH}{2}\coth\dfrac{kH}{2}, & \text{不稳定}.\end{cases}\tag{11.40}$$

图 11.3 画出了上述不等式所划分的稳定与不稳定区域. 其中曲线表示 $Ri=\dfrac{kH}{2}\coth\dfrac{kH}{2}$;虚线是它的渐近线 $Ri=\dfrac{kH}{2}$.

下面讨论两种特殊的情况.

(1) 相对于波长 H_1,H_2 很小的情况($kH_1\ll 1,kH_2\ll 1$),此时

$$\lambda_1\approx 1/kH_1,\quad \lambda_2\approx 1/kH_2.$$

相应,(11.36)式化为

$$c=\bar{u}+\frac{H_1-H_2}{H_1+H_2}\hat{u}\pm\sqrt{\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\rho}\cdot\frac{H_1H_2}{H_1+H_2}-\frac{4H_1H_2\hat{u}^2}{(H_1+H_2)^2}}.\tag{11.41}$$

若取 $H_1=H_2=H/2$,则由上式求得

$$Ri\begin{cases}\geqslant 1, & \text{稳定},\\ <1, & \text{不稳定},\end{cases}\tag{11.42}$$

它称为 Rayleigh 定理. 这实际上就是(11.40)式在 $kH\to 0$ 的极限情况.

特别当 $\hat{u}=0$,也就是 $\bar{u}_1=\bar{u}_2=\bar{u}$ 的情况,(11.41)式化为

$$c=\bar{u}\pm\sqrt{\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\rho}\cdot\frac{H_1H_2}{H_1+H_2}}.\tag{11.43}$$

上式表明:无风速垂直切变的分界面波与正压模式中的重力外波比较,存在一个相当深度(equivalent depth)

$$H=\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho}\cdot\frac{H_1H_2}{H_1+H_2}.\tag{11.44}$$

而且在 $H_1\ll H_2$ 时,(11.43)式可写为

$$c=\bar{u}\pm\sqrt{g^*H_1},\tag{11.45}$$

其中

$$g^*=(\rho_1-\rho_2)g/\rho\tag{11.46}$$

称为约化重力(reduced gravity).

(2) 相对于波长 H_1,H_2 很大的情况($kH_1\gg 1,kH_2\gg 1$),此时

$$\lambda_1\approx 1,\quad \lambda_2\approx 1.$$

相应,(11.36)式化为

$$u = \bar{u} \pm \sqrt{\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{2k\rho} - \hat{u}^2}. \tag{11.47}$$

则由上式求得

$$Ri\begin{cases} \geqslant kH/2, & \text{稳定}, \\ < kH/2, & \text{不稳定}, \end{cases} \tag{11.48}$$

这也就是(11.40)式在 $kH\to\infty$ 的极限情况.

二、一般重力内波的稳定度

应用方程组(7.70),但不考虑 f,也不考虑基本气流的水平切变$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}=0\right)$,仅考虑基本气流的垂直切变$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\neq 0\right)$,则重力内波的线性方程组可以写为

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u' + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}w' = -\frac{\partial \phi'}{\partial x}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)v' = -\frac{\partial \phi'}{\partial y}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)w' = -\frac{\partial \phi'}{\partial z} + g\frac{\theta'}{\theta_0}, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(g\frac{\theta'}{\theta_0}\right) + N^2 w' = 0. \end{cases} \tag{11.49}$$

将方程组(11.49)的第一式和第二式分别对 x 和 y 微商,然后相加并利用第四式得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\frac{\partial w'}{\partial x} = \nabla_h^2 \phi', \tag{11.50}$$

再将上式对 z 微商,并利用(11.49)的第三式,则得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2 w' - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}\frac{\partial w'}{\partial x} = \nabla_h^2\left(g\frac{\theta'}{\theta_0}\right). \tag{11.51}$$

将上式再作$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)$运算,并利用方程组(11.49)的第五式得

$$\mathscr{L}w' = 0, \tag{11.52}$$

其中

$$\mathscr{L} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x} + N^2 \nabla_h^2. \tag{11.53}$$

方程(11.52)的边界条件取为 $v'|_{y=y_1,y_2}=0$, $w'|_{z=0,H}=0$. 但是由(11.49)的第二式、第三式和第五式,$v'|_{y=y_1,y_2}=0$ 可改写为$\left.\frac{\partial w'}{\partial y}\right|_{y=y_1,y_2}=0$. 因而,方程(11.52)的

边条件写为

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial w'}{\partial y}\right|_{y=y_1}=0, & \left.\dfrac{\partial w'}{\partial y}\right|_{y=y_2}=0,\\ w'\,|_{z=0}=0, & w'\,|_{z=H}=0.\end{cases}\tag{11.54}$$

当 $\bar{u}=0$ 时,(11.52)式退化为

$$\mathscr{L}\equiv\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2+N^2\nabla_{\mathrm{h}}^2,\tag{11.55}$$

这就是第七章的(7.216)式.这样,由方程(11.52)($\mathscr{L}$取为(11.55)式)求得

$$\omega^2=\frac{K_{\mathrm{h}}^2}{K^2}N^2,\tag{11.56}$$

这就是第七章的(7.214)式.上式表明:当没有基本气流时,重力内波的稳定性完全由层结的稳定性来决定,这显然过于简单,不过,它也反映了层结稳定度在重力内波稳定度中的作用.

当 $\bar{u}\neq 0$ 时,考虑到边条件(11.54)式我们令方程(11.52)的解为

$$w'=W(z)\cos l(y-y_1)\mathrm{e}^{ik(x-ct)},\tag{11.57}$$

其中

$$l=\pi/d=2\pi/L_y,$$

而

$$d=y_2-y_1,\quad L_y=2d=2(y_2-y_1),$$

d 表示波的南北宽度,L_y 为南北方向的波长.

以(11.57)式代入方程(11.54)得

$$(\bar{u}-c)^2\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}z^2}+\left[\frac{K_{\mathrm{h}}^2N^2}{k^2}-(\bar{u}-c)\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}-K_{\mathrm{h}}^2(\bar{u}-c)^2\right]W=0.\tag{11.58}$$

这是变系数的二阶常微分方程,它可以在 $N(z)$和 $\bar{u}(z)$给定的情况下,利用边条件求解.但我们这里着重分析稳定性的一些条件.为此需作一些变换,首先令

$$F\equiv W/(\bar{u}-c),\tag{11.59}$$

注意

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}=(\bar{u}-c)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}+F\frac{\partial\bar{u}}{\partial z},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}z^2}=(\bar{u}-c)\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}z^2}+2\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}+F\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}z^2},$$

$$(\bar{u}-c)\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}z^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(\bar{u}-c)^2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right]+(\bar{u}-c)F\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2},$$

则方程(11.58)化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(\bar{u}-c)^2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\frac{K_{\mathrm{h}}^2N^2}{k^2}-K_{\mathrm{h}}^2(\bar{u}-c)^2\right]F=0.\tag{11.60}$$

若再令

$$G \equiv (\bar{u}-c)^{1/2}F, \tag{11.61}$$

注意

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}=(\bar{u}-c)^{-1/2}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}-\frac{1}{2}(\bar{u}-c)^{-3/2}G\frac{\partial\bar{u}}{\partial z},$$

$$(\bar{u}-c)^{3/2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}=(\bar{u}-c)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}-\frac{1}{2}G\frac{\partial\bar{u}}{\partial z},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(\bar{u}-c)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}\right]=(\bar{u}-c)^{-1/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(\bar{u}-c)^2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right]+\frac{1}{4}(\bar{u}-c)^{-1}G\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}G\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2},$$

则方程(11.60)化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(\bar{u}-c)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}\right]-\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}+K_{\mathrm{h}}^2(\bar{u}-c)+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)^2-\frac{K_{\mathrm{h}}^2N^2}{k^2}}{\bar{u}-c}\right]G=0. \tag{11.62}$$

注意，根据 z 方向 w' 的边条件可知，

$$W\big|_{z=0,H}=F\big|_{z=0,H}=G\big|_{z=0,H}=0. \tag{11.63}$$

1. 不稳定的必要条件

利用方程(11.58)，设 W 的复共轭为 W^*，c 的复共轭为 c^*，则 W^* 满足

$$(\bar{u}-c^*)^2\frac{\mathrm{d}^2W^*}{\mathrm{d}z^2}+\left[\frac{K_{\mathrm{h}}^2N^2}{k^2}-(\bar{u}-c^*)\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}-K_{\mathrm{h}}^2(\bar{u}-c^*)^2\right]W^*=0. \tag{11.64}$$

以 W^* 乘方程(11.58)，W 乘方程(11.59)，然后相减，并注意

$$W^*\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}z^2}-W\frac{\mathrm{d}^2W^*}{\mathrm{d}z^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(W^*\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}-W\frac{\mathrm{d}W^*}{\mathrm{d}z}\right)$$

和边条件，则从 $z=0$ 到 $z=H$ 积分得

$$\int_0^H\left\{\frac{K_{\mathrm{h}}^2N^2}{k^2}\left[\frac{1}{(\bar{u}-c)^2}-\frac{1}{(\bar{u}-c^*)^2}\right]-\left(\frac{1}{\bar{u}-c}-\frac{1}{\bar{u}-c^*}\right)\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}\right\}WW^*\delta z=0. \tag{11.65}$$

注意

$$WW^*=|W|^2,$$

$$\frac{1}{\bar{u}-c}-\frac{1}{\bar{u}-c^*}=\frac{c-c^*}{|\bar{u}-c|^2}=\frac{2\mathrm{i}c_{\mathrm{i}}}{|\bar{u}-c|^2},$$

$$\frac{1}{(\bar{u}-c)^2}-\frac{1}{(\bar{u}-c^*)^2}=\frac{[2\bar{u}-(c+c^*)](c-c^*)}{|\bar{u}-c|^4}=\frac{4\mathrm{i}(\bar{u}-c_{\mathrm{r}})c_{\mathrm{i}}}{|\bar{u}-c|^4},$$

则(11.65)式化为

$$c_{\mathrm{i}}\int_0^H\left[\frac{2K_{\mathrm{h}}^2N^2}{k^2}(\bar{u}-c_{\mathrm{r}})-|\bar{u}-c|^2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}\right]\frac{|W|^2}{|\bar{u}-c|^4}\delta z=0, \tag{11.66}$$

上式中$|W|^2/|\bar{u}-c|^4>0$. 若不稳定($c_i\neq0$),则上式成立要求

$$\frac{2K_h^2N^2}{k^2}(\bar{u}-c_r)-|\bar{u}-c|^2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2} \quad 在(0,H)改变符号, \tag{11.67}$$

或在$(0,H)$内,至少存在一点$z=z_c$,使得

$$\frac{2K_h^2N^2}{k^2}(\bar{u}-c_r)-|\bar{u}-c|^2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}=0, \quad 在\ z=z_c\in(0,H). \tag{11.68}$$

(11.67)式或(11.68)式是重力内波不稳定的一个必要条件.

若利用方程(11.62),我们还可以导得重力内波的另一个明显的稳定性条件. 以G的复共轭G^*乘方程(11.62),注意

$$G^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(\bar{u}-c)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(\bar{u}-c)G^*\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}\right]-(\bar{u}-c)\left|\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}\right|^2$$

和边条件,则从$z=0$到$z=H$积分得

$$\int_0^H\left\{(\bar{u}-c)\left(\left|\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}\right|^2+K_h^2|G|^2\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}|G|^2\right.$$
$$\left.+\left[\frac{K_h^2N^2}{k^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)^2\right]\frac{|G|^2}{\bar{u}-c}\right\}\delta z=0. \tag{11.69}$$

注意$1/(\bar{u}-c)=(\bar{u}-c^*)/|\bar{u}-c|^2$,则上式取虚部得

$$c_i\int_0^H\left\{\left|\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}\right|^2+K_h^2|G|^2+\left[\frac{K_h^2N^2}{k^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)^2\right]\frac{|G|^2}{|\bar{u}-c|^2}\right\}\delta z=0. \tag{11.70}$$

若上式的被积函数中,前两项为正,若第三项也为正或零,即

$$\frac{K_h^2N^2}{k^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)^2\geqslant0, \tag{11.71}$$

则$c_i=0$. 因而重力内波稳定,(11.71)是重力内波稳定的充分条件. 利用 Richardson 数(11.9)式,则上式可改写为

$$Ri\geqslant k^2/4K_h^2. \tag{11.72}$$

在$l=0$时,$K_h^2=k^2$,上式化为

$$Ri\geqslant1/4. \tag{11.73}$$

这就是所谓 Miles 定理:即在南北无限宽时,若$Ri\geqslant1/4$,则重力内波稳定.

反之,若重力内波不稳定($c_i\neq0$),则否定(11.72)式,必然要求

$$Ri<\frac{k^2}{4K_h^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+(l/k)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+(L_x/L_y)^2}<\frac{1}{4}. \tag{11.74}$$

上式表明:对于不稳定的重力内波,必须从满足上述不等式的波中去找,即若不等式(11.74)满足,则重力内波可能不稳定. 图 11.4 画出了$Ri=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+(L_x/L_y)^2}$的曲线,并且标出了稳定区域和可能的不稳定区域. 将其与 Miles 的结果相比,显然,

稳定区域扩大了，而可能的不稳定区域缩小了.

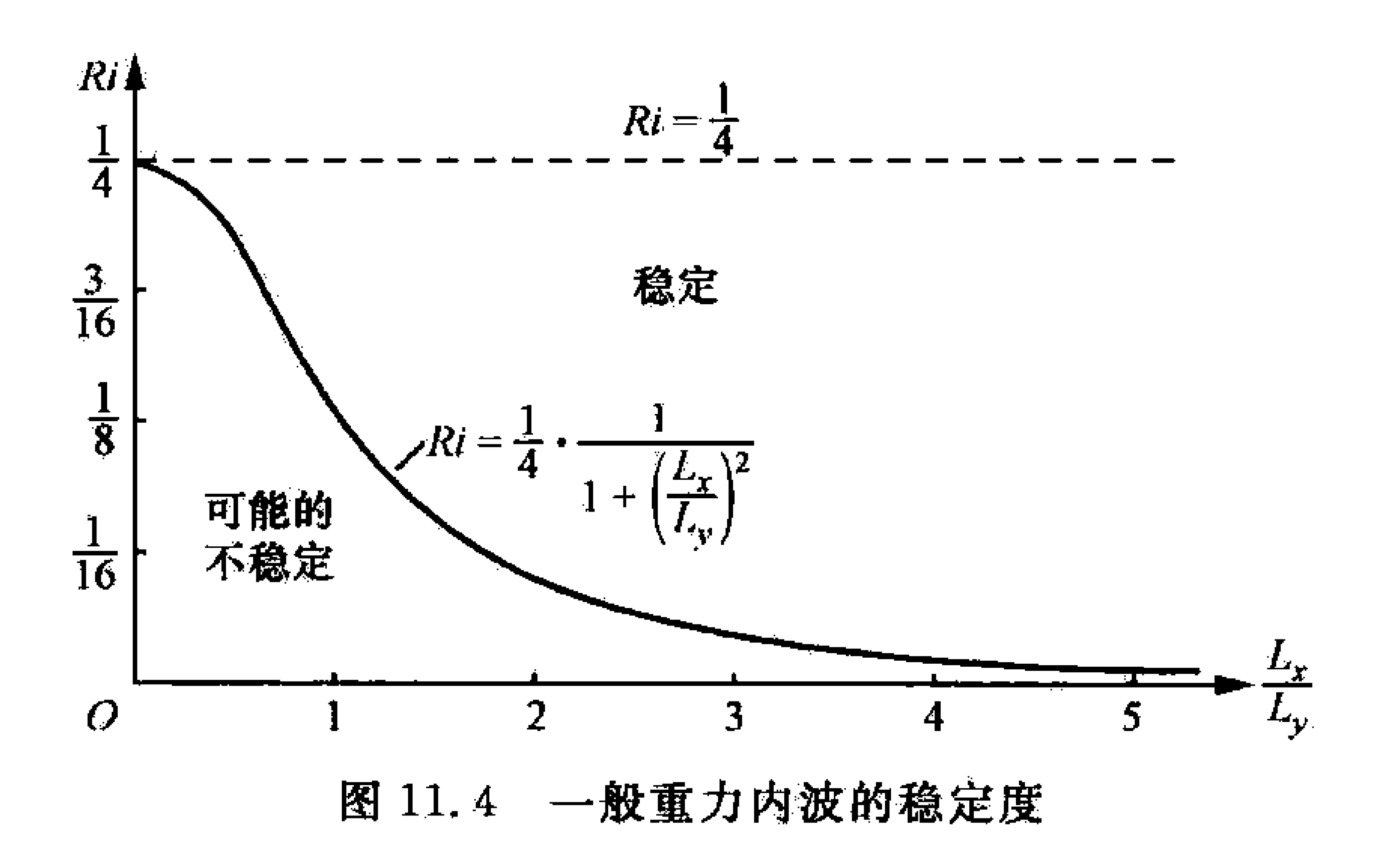


图 11.4 一般重力内波的稳定度

2. 不稳定波的增长率

对不稳定波，$c_i\neq 0$，则(11.70)式化为

$$\int_0^H\left\{\left|\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}\right|^2+K_h^2\mid G\mid^2+\left[\frac{K_h^2N^2}{k^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\mid G\mid^2}{\mid\bar{u}-c\mid^2}\right\}\delta z=0,$$

或

$$k^2\int_0^H\mid G\mid^2\delta z=\int_0^H\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{K_h^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{4K_h^2}-Ri\right)\frac{\mid G\mid^2}{\mid\bar{u}-c\mid^2}\delta z-\int_0^H\left(\left|\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}\right|^2+l^2\mid G\mid^2\right)\delta z. \tag{11.75}$$

注意

$$\frac{1}{\mid\bar{u}-c\mid^2}=\frac{1}{(\bar{u}-c_r)^2+c_i^2}\leqslant\frac{1}{c_i^2},$$

则由(11.75)式可得

$$0<k^2\int_0^H\mid G\mid^2\delta z\leqslant\frac{1}{c_i^2}\int_0^H\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)^2\frac{K_h^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{4K_h^2}-Ri\right)\mid G\mid^2\delta z,$$

因而

$$k^2c_i^2\leqslant\max_{(0,H)}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)^2\frac{K_h^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{4K_h^2}-Ri\right). \tag{11.76}$$

注意(11.74)式，则由上式求得不稳定重力内波的增长率满足

$$\mid kc_i\mid\leqslant\max_{(0,H)}\left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right|\frac{K_h}{k}\sqrt{\frac{k^2}{4K_h^2}-Ri}. \tag{11.77}$$

3. Howard 半圆定理

利用方程(11.60)，我们可以导得不稳定重力内波的其他条件. 以 F 的复共轭 F^* 乘方程(11.60)，注意

$$F^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(\bar{u}-c)^2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(\bar{u}-c)^2F^*\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right]-(\bar{u}-c)^2\left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right|^2$$

和边条件，则从 $z=0$ 到 $z=H$ 积分得

$$\int_0^H \left\{(\bar{u}-c)^2\left(\left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right|^2+K_{\mathrm{h}}^2|F|^2\right)-\frac{K_{\mathrm{h}}^2N^2}{k^2}|F|^2\right\}\delta z=0. \tag{11.78}$$

上式的实部和虚部分别是

$$\int_0^H[(\bar{u}-c_{\mathrm{r}})^2-c_{\mathrm{i}}^2]\left(\left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right|^2+K_{\mathrm{h}}^2|F|^2\right)\delta z-\int_0^H\frac{K_{\mathrm{h}}^2N^2}{k^2}|F|^2\delta z=0, \tag{11.79}$$

$$2c_{\mathrm{i}}\int_0^H(\bar{u}-c_{\mathrm{r}})\left(\left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right|^2+K_{\mathrm{h}}^2|F|^2\right)\delta z=0. \tag{11.80}$$

由(11.80)式知，对于不稳定波，$c_{\mathrm{i}}\neq0$，则要求

$$\bar{u}-c_{\mathrm{r}}\ 在(0,H)\ 改变符号, \tag{11.81}$$

或在$(0,H)$内至少存在一点 $z=z_{\mathrm{c}}$，使得

$$\bar{u}-c_{\mathrm{r}}=0,\quad 在\ z=z_{\mathrm{c}}\in(0,H). \tag{11.82}$$

(11.81)式或(11.82)式是重力的内波不稳定的又一个必要条件，这意味着不稳定的重力内波必定存在 $\bar{u}=c_{\mathrm{r}}$ 的临界层.

若令 $\bar{u}_{\mathrm{m}}$ 和 $\bar{u}_{\mathrm{M}}$ 分别是在$(0,H)$内 $\bar{u}$ 的最小值和量大值，则不稳定的必要条件(11.81)式或(11.82)式可改写为

$$\bar{u}_{\mathrm{m}}<c_{\mathrm{r}}<\bar{u}_{\mathrm{M}}. \tag{11.83}$$

又令

$$Q\equiv\left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right|^2+K_{\mathrm{h}}^2|F|^2\geqslant0, \tag{11.84}$$

则(11.79)式和(11.80)式分别写为

$$\int_0^H\bar{u}^2Q\delta z=(c_{\mathrm{i}}^2-c_{\mathrm{r}}^2)\int_0^HQ\delta z+2\int_0^H\bar{u}c_{\mathrm{r}}Q\delta z+\int_0^H\frac{K_{\mathrm{h}}^2N^2}{k^2}|F|^2\delta z, \tag{11.85}$$

$$\int_0^H\bar{u}Q\delta z=\int_0^Hc_{\mathrm{r}}Q\delta z. \tag{11.86}$$

将(11.86)式代入(11.85)式，得

$$\int_0^H\bar{u}^2Q\delta z=(c_{\mathrm{r}}^2+c_{\mathrm{i}}^2)\int_0^HQ\delta z+\int_0^H\frac{K_{\mathrm{h}}^2N^2}{k^2}|F|^2\delta z. \tag{11.87}$$

因

$$(\bar{u}-\bar{u}_{\mathrm{m}})(\bar{u}-\bar{u}_{\mathrm{M}})<0,$$

即

$$\bar{u}^2-(\bar{u}_{\mathrm{m}}+\bar{u}_{\mathrm{M}})\bar{u}+\bar{u}_{\mathrm{m}}\bar{u}_{\mathrm{M}}<0,$$

则

$$\int_0^H\{\bar{u}^2-(\bar{u}_{\mathrm{m}}+\bar{u}_{\mathrm{M}})\bar{u}+\bar{u}_{\mathrm{m}}\bar{u}_{\mathrm{M}}\}Q\delta z<0. \tag{11.88}$$

将(11.86)式和(11.87)式代入上式得

$$(c_r^2+c_i^2)\int_0^H Q\delta z+\int_0^H \frac{K_h^2N^2}{k^2}\mid F\mid^2\delta z-\int_0^H(\bar{u}_m+\bar{u}_M)c_r Q\delta z+\int_0^H \bar{u}_m\bar{u}_M Q\delta z<0,$$

即

$$\int_0^H\left\{\left[c_r-\frac{1}{2}(\bar{u}_m+\bar{u}_M)\right]^2+c_i^2-\frac{1}{4}(\bar{u}_m-\bar{u}_M)^2\right\}Q\delta z+\int_0^H\frac{K_h^2N^2}{k^2}\mid F\mid^2\delta z<0. \tag{11.89}$$

对稳定层结($N^2>0$),由此有

$$(c_r-\bar{u}_0)^2+c_i^2<c_R^2, \tag{11.90}$$

其中

$$\begin{cases}\bar{u}_0=\dfrac{1}{2}(\bar{u}_M+\bar{u}_m), \quad \hat{u}=\dfrac{1}{2}(\bar{u}_M-\bar{u}_m),\\ c_R^2=\hat{u}^2-\left(\dfrac{K_h^2}{k^2}\displaystyle\int_0^H N^2\mid F\mid^2\delta z\right)\Big/\displaystyle\int_0^H Q\delta z.\end{cases} \tag{11.91}$$

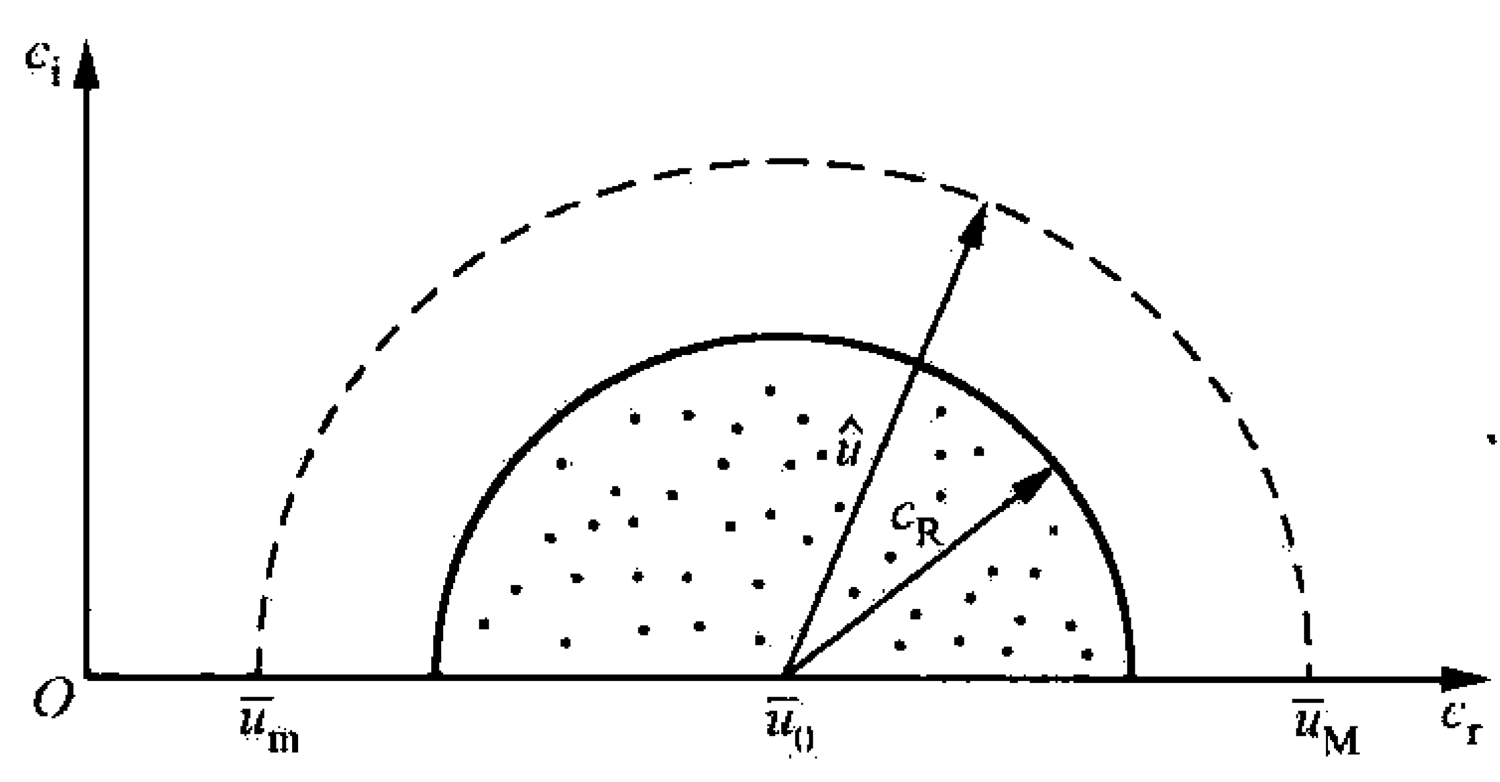


图 11.5 重力内波的半圆定理

(11.90)式说明:在相速度 c 的复平面内,不稳定重力内波的 c 必须位于以($\bar{u}_0$,0)为圆心,半径为 c_R 的上半圆内.对于稳定层结,$N^2>0$,则

$$c_R^2<\hat{u}^2.$$

这样,(11.90)式可写为

$$(c_r-\bar{u}_0)^2+c_i^2<\hat{u}^2, \tag{11.92}$$

它称为 Howard 半圆定理.图 11.5 给出了不等式(11.90)和(11.92)的结果.

§11.3 惯性-重力波的稳定度

大气中尺度运动的主要波动是惯性-重力波,因而惯性-重力波的稳定度是大气中尺度运动的问题.

与重力波类似,我们将密度连续与不连续分开说明.

一、锋面波的稳定度

锋面(frontal surface)是大气中的一个重要的天气系统,它是密度和速度不连续的分界面,不过分界面是倾斜的,这是 Coriolis 力作用的结果.在锋面上产生的惯性重力内波称为锋面波(frontal waves).在海洋中,也存在类似锋面的不连续.

设锋面被两种均匀不可压缩流体隔开,见图 11.6.锋面以下空气密度为 ρ_1,基本气流为 u_1;锋面以上空气密度为 ρ_2,基本气流为 $\bar{u}_2$.设 $\rho_2<\rho_1$,$\bar{u}_2>\bar{u}_1$.设未扰动的锋面为

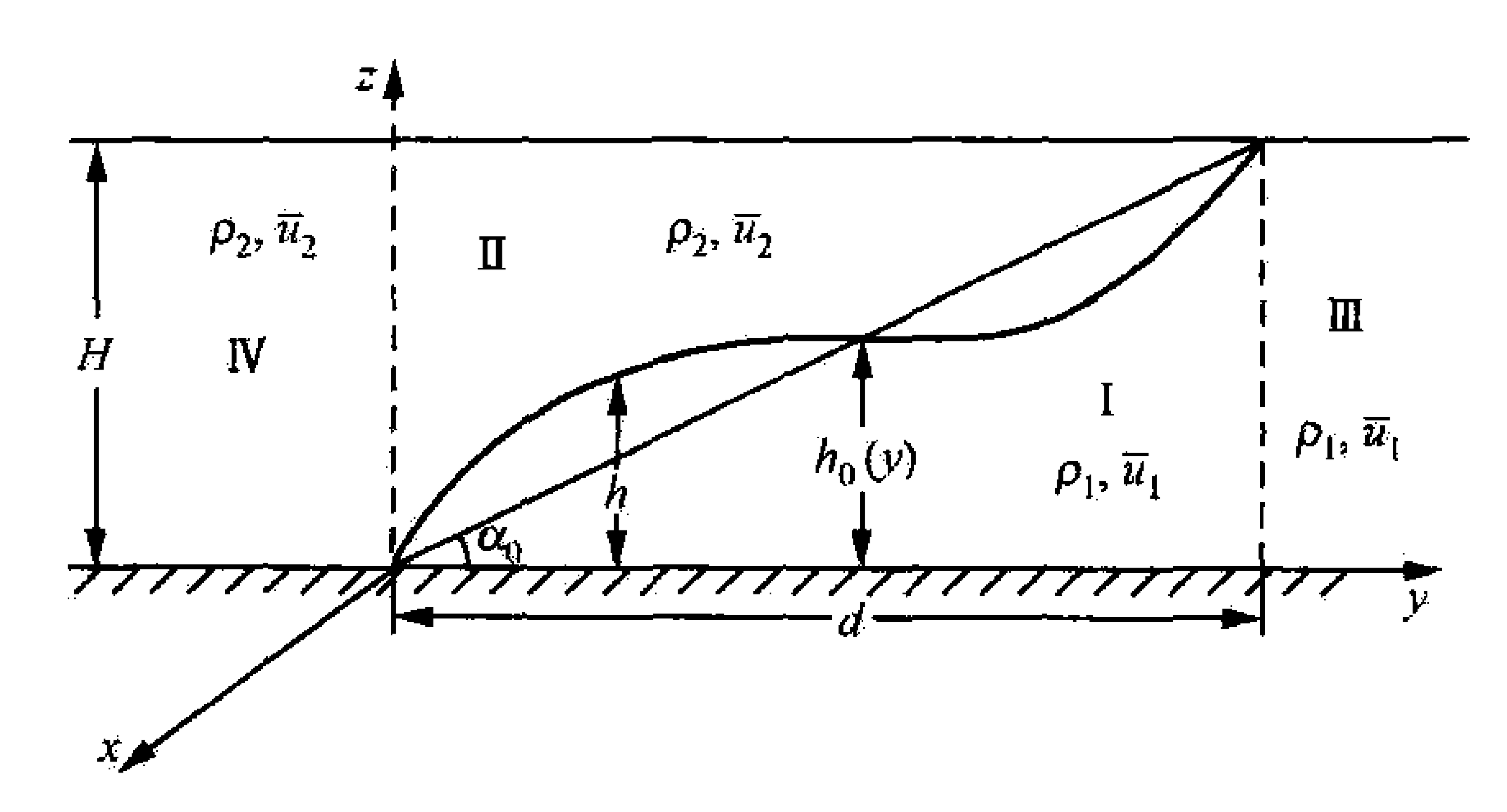


图 11.6 锋面模型

$$z = h_0(y), \tag{11.93}$$

其南北宽度为 d,垂直厚度为 H. 锋面受扰动后变为

$$z = h(x,y,t). \tag{11.94}$$

相应有

$$\begin{cases} u_j = \bar{u}_j + u_j', \quad v_j = v_j', \quad w_j = w_j', \\ p_j = \bar{p}_j + p_j', \quad h = h_0(y) + h' \end{cases} \quad (j = 1,2). \tag{11.95}$$

在不考虑摩擦的条件下,显然 $\bar{p}_j(j=1,2)$满足静力学关系和地转关系,即

$$\frac{\partial \bar{p}_j}{\partial z} = -g\rho_j, \quad \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial y} = -f_0\rho_j\bar{u}_j \quad (j = 1,2). \tag{11.96}$$

其中因为惯性-重力内波不考虑 f 的变化,我们已将 f 写成了 f_0.

设上界 $z=H$ 上的气压为 $p=p_H(y)$,未扰动锋面 $z=h_0(y)$上的气压为 $p_{h_0}(y)$,即

$$p\,|_{z=H} = p_H, \quad p\,|_{z=h_0} = p_{h_0}, \tag{11.97}$$

则积分静力学方程,不难求得图 11.6 所示四个区域的基本状态的气压,它们分别为

$$\bar{p}_1 = \begin{cases} p_{h_0} + g\rho_1(h_0 - z), & (\text{I}) \\ p_H + g\rho_1(H - z), & (\text{III}) \end{cases} \tag{11.98}$$

$$\bar{p}_2 = p_H + g\rho_2(H - z), \quad (\text{II}),(\text{IV}) \tag{11.99}$$

由(11.96)式和(11.99)式有

$$\frac{\partial \bar{p}_2}{\partial y} = \frac{\partial p_H}{\partial y} = -f_0\rho_2\bar{u}_2. \tag{11.100}$$

又由(11.99)式,令 $z=h_0(y)$可求得

$$p_{h_0} = p_H + g\rho_2(H - h_0). \tag{11.101}$$

将上式代入(11.98)式在(Ⅰ)区的表达式得

$$\bar{p}_1 = p_H + g\rho_2 H + g(\rho_1 - \rho_2)h_0 - g\rho_1 z, \quad (\text{I}) \tag{11.102}$$

将上式对 y 微商,并利用(11.96)式和(11.100)式,得

$$-f_0\rho_1\bar{u}_1=-f_0\rho_2\bar{u}_2+g(\rho_1-\rho_2)\frac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}y}. \tag{11.103}$$

由此求得未扰动的锋面坡度为

$$\tan\alpha_0\equiv\frac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}y}=\frac{f_0(\rho_2\bar{u}_2-\rho_1\bar{u}_1)}{g(\rho_1-\rho_2)}\approx\frac{f_0\rho(\bar{u}_2-\bar{u}_1)}{g\Delta\rho}, \tag{11.104}$$

这就是锋面坡度的 Margules 公式. 它也可以利用锋面气压场连续的性质,由

$$\delta(p_1-p_2)=\left(\frac{\partial\bar{p}_1}{\partial y}-\frac{\partial\bar{p}_2}{\partial y}\right)\delta y+\left(\frac{\partial\bar{p}_1}{\partial z}-\frac{\partial\bar{p}_2}{\partial z}\right)\delta z=0$$

得到. 在(11.104)式中

$$\Delta\rho=\rho_1-\rho_2\ll\rho_1,\rho_2,\quad \rho=(\rho_1+\rho_2)/2\approx\rho_1\approx\rho_2.$$

由图 11.6 知,

$$\tan\alpha_0=H/d=h_0(y)/y. \tag{11.105}$$

将(11.104)式与(11.105)式比较得

$$H=d\,\frac{f_0\rho(\bar{u}_2-\bar{u}_1)}{g\Delta\rho},\quad h_0(y)=\frac{f_0\rho(\bar{u}_2-\bar{u}_1)}{g\Delta\rho}y. \tag{11.106}$$

若认为垂直方向的气压总是满足静力平衡的,则锋面波的线性化的扰动方程组可以写为

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_j\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u_j'-f_0v_j'=-\dfrac{1}{\rho_j}\dfrac{\partial p_j'}{\partial x},\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_j\dfrac{\partial}{\partial x}\right)v_j'+f_0u_j'=-\dfrac{1}{\rho_j}\dfrac{\partial p_j'}{\partial y},\\ \dfrac{\partial p_j'}{\partial z}=0,\\ \dfrac{\partial u_j'}{\partial x}+\dfrac{\partial v_j'}{\partial y}+\dfrac{\partial w_j'}{\partial z}=0\end{cases}\quad (j=1,2). \tag{11.107}$$

因为$\dfrac{\partial p_j'}{\partial z}=0(j=1,2)$,则由方程组(11.107)的前两式判断,$u_j'$ 和 $v_j'(j=1,2)$也必然与 z 无关,因此,方程组(11.107)实质上就是线性化的正压模式(旋转浅水模式)方程组. 为了化简方程组,我们在锋面区域的上下界应用下列齐次边条件:

$$w'|_{z=0}=0,\quad w'|_{z=H}=0. \tag{11.108}$$

至于锋面上的运动学条件和动力学条件分别是

$$w_j'|_{z=h}\equiv\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial}{\partial x}\right)h'+v_j'\frac{\partial h_0}{\partial y}\quad (j=1,2), \tag{11.109}$$

$$(\bar{p}_1+p_1')_{z=h}=(\bar{p}_2+p_2')_{z=h}. \tag{11.110}$$

利用(11.99)式和(11.102)式,又考虑 $p_j'(j=1,2)$与 z 无关,则(11.110)式可改写为

$$
\begin{aligned}
p_1' - p_2' &= (\bar{p}_2 - \bar{p}_1)_{z=h} \\
&= [p_H + g\rho_2(H-h)] - [p_H + g\rho_2 H + g(\rho_1-\rho_2)h_0 - g\rho_1 h] \\
&= g(\rho_1-\rho_2)(h-h_0) = g\Delta\rho h' = \rho g^* h',
\end{aligned}
\tag{11.111}
$$

其中 g^* 即是约化重力(见(11.46)式). 因 $p_j'(j=1,2)$ 与 z 无关,则分界面条件(11.111)可作为一个方程式.

将连续性方程((11.107)的第四式)对 z 积分,并利用条件(11.108)和(11.109),则得到四个区域的连续性方程分别为

$$
\frac{\partial u_j'}{\partial x} + \frac{\partial v_j'}{\partial y} = 0 \quad (j=1,2), \qquad (\text{Ⅲ}),(\text{Ⅳ}) \tag{11.112}
$$

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_1\frac{\partial}{\partial x}\right)h' + v_1'\frac{\partial h_0}{\partial y} + h_0\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x} + \frac{\partial v_1'}{\partial y}\right) = 0, \qquad (\text{Ⅰ}) \tag{11.113}
$$

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_2\frac{\partial}{\partial x}\right)h' + v_2'\frac{\partial h_0}{\partial y} - (H-h_0)\left(\frac{\partial u_2'}{\partial x} + \frac{\partial v_2'}{\partial y}\right) = 0. \qquad (\text{Ⅱ}) \tag{11.114}
$$

若令

$$
\phi_1' \equiv p_1'/\rho_1 \approx p_1'/\rho, \quad \phi_2' \equiv p_2'/\rho_2 \approx p_2'/\rho, \tag{11.115}
$$

则(11.111)式化为

$$
\phi' \equiv \phi_1' - \phi_2' = g^* h'. \tag{11.116}
$$

又利用约化重力,(11.106)式可化为

$$
g^* H = f_0(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)d, \quad g^* h_0 = f_0(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)y. \tag{11.117}
$$

这样,四个区域的扰动方程组可改写为下列形式,它们分别是

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u_j' - f_0 v_j' = -\dfrac{\partial \phi_j'}{\partial x}, \\
\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j\dfrac{\partial}{\partial x}\right)v_j' + f_0 u_j' = -\dfrac{\partial \phi_j'}{\partial y}, \quad (j=1,2); \\
\dfrac{\partial u_j'}{\partial x} + \dfrac{\partial v_j'}{\partial y} = 0
\end{cases}
\qquad (\text{Ⅲ}),(\text{Ⅳ}) \tag{11.118}
$$

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_1\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u_1' - f_0 v_1' = -\dfrac{\partial \phi_1'}{\partial x}, \\
\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_1\dfrac{\partial}{\partial x}\right)v_1' + f_0 u_1' = -\dfrac{\partial \phi_1'}{\partial y}, \\
\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_1\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\phi' + f_0(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)v_1' + f_0(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)y\left(\dfrac{\partial u_1'}{\partial x} + \dfrac{\partial v_1'}{\partial y}\right) = 0;
\end{cases}
\qquad (\text{Ⅰ}) \tag{11.119}
$$

和

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_2\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u_2'-f_0v_2'=-\dfrac{\partial\phi_2'}{\partial x},\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_2\dfrac{\partial}{\partial x}\right)v_2'+f_0u_2'=-\dfrac{\partial\phi_2'}{\partial y},\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_2\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\phi'+f_0(\bar{u}_2-\bar{u}_1)v_2'-f_0(\bar{u}_2-\bar{u}_1)(d-y)\left(\dfrac{\partial u_2'}{\partial x}+\dfrac{\partial v_2'}{\partial y}\right)=0.\end{cases}$$

（Ⅱ）（11.120）

将方程组(11.118)，(11.119)和(11.120)的前两式分别消去 v_j'，u_j'，有

$$\begin{cases}\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_j\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2+f_0^2\right]u_j'=-\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_j\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\dfrac{\partial}{\partial x}+f_0\dfrac{\partial}{\partial y}\right]\phi_j',\\ \left[\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_j\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2+f_0^2\right]v_j'=-\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_j\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\dfrac{\partial}{\partial y}-f_0\dfrac{\partial}{\partial x}\right]\phi_j'\end{cases}\quad (j=1,2).$$

（11.121）

利用(11.121)式，方程组(11.118)化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla_h^2\phi_j'=0\quad (j=1,2).\qquad (Ⅲ),(Ⅳ)\qquad (11.122)$$

利用(11.116)式和(11.121)式，方程组(11.119)和(11.120)分别化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_1\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+f_0^2\right](\phi_1'-\phi_2')-f_0(\bar{u}_2-\bar{u}_1)\cdot\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(y\nabla_h^2+\frac{\partial}{\partial y}\right)-f_0\frac{\partial}{\partial x}\right]\phi_1'=0,\qquad (11.123)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_2\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_2\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+f_0^2\right](\phi_1'-\phi_2')-f_0(\bar{u}_2-\bar{u}_1)\cdot\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_2\frac{\partial}{\partial x}\right)\left((-d+y)\nabla_h^2+\frac{\partial}{\partial y}\right)-f_0\frac{\partial}{\partial x}\right]\phi_2'=0.\qquad (11.124)$$

下面，我们在 y 方向的边条件

$$\phi_2'\big|_{y\to-\infty}<\infty,\quad \phi_1'\big|_{y\to\infty}<\infty\qquad (11.125)$$

和

$$\begin{cases}\phi_2',\dfrac{\partial\phi_2'}{\partial y}\ \text{在}\ y=0\ \text{连续},\\ \phi_1',\dfrac{\partial\phi_1'}{\partial y}\ \text{在}\ y=d\ \text{连续}\end{cases}\qquad (11.126)$$

下，求解方程组(11.122)，(11.123)和(11.124).

设方程组(11.122)，(11.123)和(11.124)的解为

$$\phi_j'=\Phi_j(y)e^{i(kx-\omega t)}\quad (j=1,2).\qquad (11.127)$$

将(11.127)式代入(11.122)式，在 $\omega-k\bar{u}_j\neq0(j=1,2)$ 的条件下得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi_j}{\mathrm{d}y^2}-k^2\Phi_j=0 \quad (j=1,2). \tag{11.128}$$

利用边条件(11.125),不难求得

$$\begin{cases}\Phi_1(y)=A\mathrm{e}^{-ky}, & (\text{III})\\ \Phi_2(y)=B\mathrm{e}^{ky}, & (\text{IV})\end{cases} \tag{11.129}$$

由此求得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}y}=-k\Phi_1, & (\text{III})\\ \dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}y}=k\Phi_2. & (\text{IV})\end{cases} \tag{11.130}$$

将(11.127)式代入(11.123)式和(11.124)式,在 $\omega-k\bar{u}_j\neq 0(j=1,2)$ 的条件下得到

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(y\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}y}\right)-\left(k^2y-\dfrac{kf_0}{\omega-k\bar{u}_1}\right)\Phi_1=\dfrac{f_0^2-(\omega-k\bar{u}_1)^2}{f_0(\bar{u}_2-\bar{u}_1)}(\Phi_1-\Phi_2),\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[(d-y)\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}y}\right]-\left[k^2(d-y)+\dfrac{kf_0}{\omega-k\bar{u}_2}\right]\Phi_2=-\dfrac{f_0^2-(\omega-k\bar{u}_2)^2}{f_0(\bar{u}_2-\bar{u}_1)}(\Phi_1-\Phi_2).\end{cases} \tag{11.131}$$

令

$$\eta=\frac{2y}{d}-1, \tag{11.132}$$

则 $y=-\infty,0,d,\infty$ 分别对应 $\eta=-\infty,-1,1,\infty$,而且方程组(11.131)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[(1+\eta)\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}\eta}\right]-\left[\dfrac{k^2d^2}{4}(1+\eta)-\dfrac{kdf_0/2}{\omega-k\bar{u}_1}\right]\Phi_1\\ \qquad =\dfrac{d}{2}\cdot\dfrac{f_0^2-(\omega-k\bar{u}_1)^2}{f_0(\bar{u}_2-\bar{u}_1)}(\Phi_1-\Phi_2),\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[(1-\eta)\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}\eta}\right]-\left[\dfrac{k^2d^2}{4}(1-\eta)+\dfrac{kdf_0/2}{\omega-k\bar{u}_2}\right]\Phi_2\\ \qquad =-\dfrac{d}{2}\cdot\dfrac{f_0^2-(\omega-k\bar{u}_2)^2}{f_0(\bar{u}_2-\bar{u}_1)}(\Phi_1-\Phi_2).\end{cases} \tag{11.133}$$

而(11.130)式化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}\eta}=-\dfrac{kd}{2}\Phi_1, & (\text{III})\\ \dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}\eta}=\dfrac{kd}{2}\Phi_2. & (\text{IV})\end{cases} \tag{11.134}$$

考虑到边条件(11.126),则方程组(11.133)的边条件可以写为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}\eta}\right|_{\eta=1}=-\frac{kd}{2}\Phi_1,\quad \left.\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}\eta}\right|_{\eta=-1}=\frac{kd}{2}\Phi_2. \tag{11.135}$$

为了方便,我们令

$$
\begin{cases}
\bar{u} = (\bar{u}_1 + \bar{u}_2)/2, \quad \hat{u} = (\bar{u}_2 - \bar{u}_1)/2, \\
Ri \equiv g^* H/4\hat{u}^2 = f_0 d/2\hat{u}, \quad Ro \equiv k\hat{u}/f_0, \\
\lambda = RoRi = kd/2, \quad \tau = (\omega - k\bar{u})/k\hat{u},
\end{cases}
\tag{11.136}
$$

注意，这里 Ro 是用速度的垂直切变 $\hat{u}$ 来定义的.

将(11.136)式代入方程组(11.133)，得

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[(1+\eta)\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}\eta}\right] - \left[\lambda^2(1+\eta) - \dfrac{Ri}{1+\tau}\right]\Phi_1 = \dfrac{Ri}{2}[1 - Ro^2(1+\tau)^2](\Phi_1 - \Phi_2), \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[(1-\eta)\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}\eta}\right] - \left[\lambda^2(1-\eta) - \dfrac{Ri}{1-\tau}\right]\Phi_2 = -\dfrac{Ri}{2}[1 - Ro^2(1-\tau)^2](\Phi_1 - \Phi_2);
\end{cases}
\tag{11.137}
$$

边条件(11.135)化为

$$
\left.\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}\eta}\right|_{\eta=1} = -\lambda\Phi_1, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}\eta}\right|_{\eta=-1} = \lambda\Phi_2. \tag{11.138}
$$

方程组(11.137)的求解很困难，通常按(11.136)式中 Ro 的定义，其数值近于 10^{-1}. 若取 $Ro\approx 0$，则方程组(11.137)简化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[(1+\eta)\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}\eta}\right] + \dfrac{Ri}{1+\tau}\Phi_1 = \dfrac{Ri}{2}(\Phi_1 - \Phi_2), \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[(1-\eta)\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}\eta}\right] + \dfrac{Ri}{1-\tau}\Phi_2 = -\dfrac{Ri}{2}(\Phi_1 - \Phi_2);
\end{cases}
\tag{11.139}
$$

而边条件(11.138)简化为

$$
\left.\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}\eta}\right|_{\eta=1} = 0, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}\eta}\right|_{\eta=-1} = 0. \tag{11.140}
$$

将方程组(11.139)的第一式乘以$(1+\tau)$，第二式乘以$(1-\tau)$，然后相减得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left\{(1+\tau)(1+\eta)\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}\eta} - (1-\tau)(1-\eta)\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}\eta}\right\} = 0.
$$

上式积分得

$$
(1+\tau)(1+\eta)\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}\eta} - (1-\tau)(1-\eta)\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}\eta} = C, \tag{11.141}
$$

C 为积分常数. 但由边条件(11.140)定得 $C=0$，因而

$$
(1+\tau)(1+\eta)\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}\eta} = (1-\tau)(1-\eta)\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}\eta} \equiv \Psi(\eta). \tag{11.142}
$$

利用上式，方程组(11.139)和边条件(11.140)分别化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\eta} + Ri\Phi_1 = \dfrac{Ri}{2}(1+\tau)(\Phi_1 - \Phi_2), \\
\dfrac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\eta} + Ri\Phi_2 = -\dfrac{Ri}{2}(1-\tau)(\Phi_1 - \Phi_2);
\end{cases}
\tag{11.143}
$$

$$
\Psi\big|_{\eta=\pm 1} = 0. \tag{11.144}
$$

方程组(11.143)的任一式对 η 微商，然后乘以$(1-\eta^2)$，并利用(11.142)式，不难得到

$$(1-\eta^2)\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\eta^2}+(a+b\eta)\Psi=0, \tag{11.145}$$

其中

$$a=Ri\,\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2},\quad b=2Ri\,\frac{\tau}{1-\tau^2}. \tag{11.146}$$

注意 $\tau\to0$ 时$(\omega-k\bar{u}\ll k\bar{u})$，$a=Ri$，$b=0$，相应，方程(11.145)化为

$$(1-\eta^2)\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\eta^2}+Ri\Psi=0. \tag{11.147}$$

令

$$\Theta\equiv\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\eta}, \tag{11.148}$$

则方程(11.147)化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\eta}\right]+Ri\Theta=0. \tag{11.149}$$

而利用(11.144)式和(11.147)式有

$$\Theta\mid_{\eta=\pm1}<\infty. \tag{11.150}$$

方程(11.149)是 Legendre 方程，它满足条件(11.150)的本征值是

$$Ri=n(n+1)\quad(n=0,1,2,\cdots). \tag{11.151}$$

考虑到上述结果知 $\tau=0$ 时，$a=n(n+1)$ $(n=0,1,2,\cdots)$，则不需普遍求解方程(11.145)即知，它满足条件(11.144)的本征值是

$$a\equiv Ri\,\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}=n(n+1)\quad(n=0,1,2,\cdots). \tag{11.152}$$

由此求得

$$\tau=\pm\sqrt{\frac{n(n+1)-Ri}{n(n+1)+Ri}}. \tag{11.153}$$

但由(11.136)式中 τ 的定义知：τ 是实数时，ω 为实数；τ 为虚数时，ω 为复数. 因而，由上式求得锋面波稳定度的充分必要条件为

$$Ri\begin{cases}\leqslant n(n+1), & \text{稳定},\\ >n(n+1), & \text{不稳定},\end{cases} \tag{11.154}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$. 注意，这个结果是在 $Ro\approx0$ 的条件下得到的，它称为 Kotschin 定理. 根据实际情况，若限制 Ri 的变化范围，如规定

$$5<Ri\leqslant10, \tag{11.155}$$

则在(11.154)式中取 $n=2$，而有

$$\begin{cases} 5 < Ri \leqslant 6, & \text{稳定}, \\ 6 < Ri \leqslant 10, & \text{不稳定}. \end{cases} \tag{11.156}$$

二、基本气流水平切变条件下惯性-重力波的稳定度

应用方程组(7.70),注意$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \neq 0, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0, f = f_0$,则有

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u' - \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)v' = -\frac{\partial \phi'}{\partial x}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)v' + f_0 u' = -\frac{\partial \phi'}{\partial y}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)w' = -\frac{\partial \phi'}{\partial z} + g\frac{\theta'}{\theta_0}, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(g\frac{\theta'}{\theta_0}\right) + N^2 w' = 0, \end{cases} \tag{11.157}$$

注意,这里有层结和基本气流水平切变的作用.从方程组(11.157)的前两式分别消去v'和u',得到

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + I^2\right]u' = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \phi'}{\partial x} - \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)\frac{\partial \phi'}{\partial y}, \\ \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + I^2\right]v' = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \phi'}{\partial y} + f_0\frac{\partial \phi'}{\partial x}, \end{cases} \tag{11.158}$$

其中

$$I^2 \equiv f_0\left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \tag{11.159}$$

即是惯性稳定度参数.

将方程组(11.158)的第一式对x微商,第二式对y微商$\left(\text{微商过程中忽略}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + I^2\right]\text{随}\ y\ \text{的变化}\right)$,并利用方程组(11.157)的第四式,得到

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + I^2\right]\frac{\partial w'}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla_h^2 \phi'. \tag{11.160}$$

从方程组(11.157)的第三、第五两式消去θ',得到

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + N^2\right]w' = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \phi'}{\partial z}. \tag{11.161}$$

从(11.160)式和(11.161)式消去ϕ',则得到

$$\mathscr{L}w' = 0, \tag{11.162}$$

其中

$$\mathscr{L}\equiv\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+N^2\right]\nabla_h^2+\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+I^2\right]\frac{\partial^2}{\partial z^2},\quad(11.163)$$

方程(11.162)的边条件仍取为(11.154)的形式.

当 $\bar{u}=0$ 时,(11.163)退化为

$$\mathscr{L}\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+N^2\right)\nabla_h^2+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f_0^2\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2},\quad(11.164)$$

这就是第七章的(7.236)式.这样,由方程(11.162)($\mathscr{L}$取为(11.164)式),求得

$$\omega^2=\frac{K_h^2N^2+n^2f_0^2}{K^2},\quad(11.165)$$

这就是第七章的(7.234)式.上式说明:当没有基本气流时,惯性-重力内波不稳定的必要条件是层结不稳定,即

$$\text{不稳定}\Rightarrow N^2<0,\quad(11.166)$$

而不稳定的充分条件(即不稳定判据)为

$$K_h^2N^2+n^2f_0^2<0\quad(N^2<0).\quad(11.167)$$

若引进水平特征尺度 L 和斜压 Rossby 变形半径 L_1,它们分别满足

$$L^2=\frac{n^2H^2}{K_h^2},\quad L_1^2=-\frac{N^2H^2}{f_0^2}\quad(N^2<0).\quad(11.168)$$

如 $nH=2\pi$,L 即是水平波长.这样,(11.165)式可改写为

$$\omega^2=\frac{K_h^2f^2}{K^2H^2}(L^2-L_1^2).\quad(11.169)$$

相应,不稳定判据(11.167)可改写为

$$L<L_1,\quad(11.170)$$

它表明:当水平尺度 L 小于 Rossby 变形半径 L_1 时,惯性-重力内波不稳定;反之,当

$$L\geqslant L_1\quad(11.171)$$

时,惯性-重力内波一定稳定.

当 $\bar{u}\neq0$ 时,考虑到边条件(11.54)式,我们就以(11.57)式的解代入方程(11.162),则得到

$$\omega_D^2=\frac{K_h^2N^2+n^2I^2}{K^2},\quad(11.172)$$

其中

$$\omega_D=\omega-k\bar{u}\quad(11.173)$$

即是 Doppler 频率.

由(11.172)式我们得到:惯性-重力内波稳定的充分条件为层结与惯性都是稳定的,即

$$N^2 > 0 \quad 和 \quad I^2 > 0. \tag{11.174}$$

而惯性-重力内波不稳定的必要条件是层结和惯性二者之中有一个不稳定，即

$$N^2 < 0,\ I^2 > 0 \quad 或 \quad I^2 < 0,\ N^2 > 0. \tag{11.175}$$

惯性-重力内波不稳定的充分条件则为

$$K_h^2 N^2 + n^2 I^2 < 0. \tag{11.176}$$

实现条件(11.176)有两种可能：第一种可能是 N^2 和 I^2 皆负：

$$N^2 < 0 \quad 和 \quad I^2 < 0, \tag{11.177}$$

这是层结和惯性都不稳定的情况. 第二种可能是 N^2 和 I^2 中有一个为负，但仍满足(11.176)式. 此时，可仿照(11.168)式，引进 L 和 L_2，它们分别满足

$$L^2 = n^2 H^2 / K_h^2, \quad L_2^2 = -N^2 H^2 / I^2. \tag{11.178}$$

这样，(11.172)式可改写为

$$\omega_D^2 = \frac{K_h^2 I^2}{K^2 H^2}(L^2 - L_2^2). \tag{11.179}$$

相应，不稳定判据(11.176)改写为

$$\begin{cases} I^2 > 0\ (N^2 < 0), & L < L_2, \\ I^2 < 0\ (N^2 > 0), & L > L_2. \end{cases} \tag{11.180}$$

图 11.7 给出了在 N^2 给定的条件下，$L^2 = L_2^2 = -NH^2/I^2$ 的曲线，并标出了稳定与不稳定的区域，其中图 11.7(a)是 $N^2<0$ 的情况，图 11.7(b)是 $N^2>0$ 的情况.

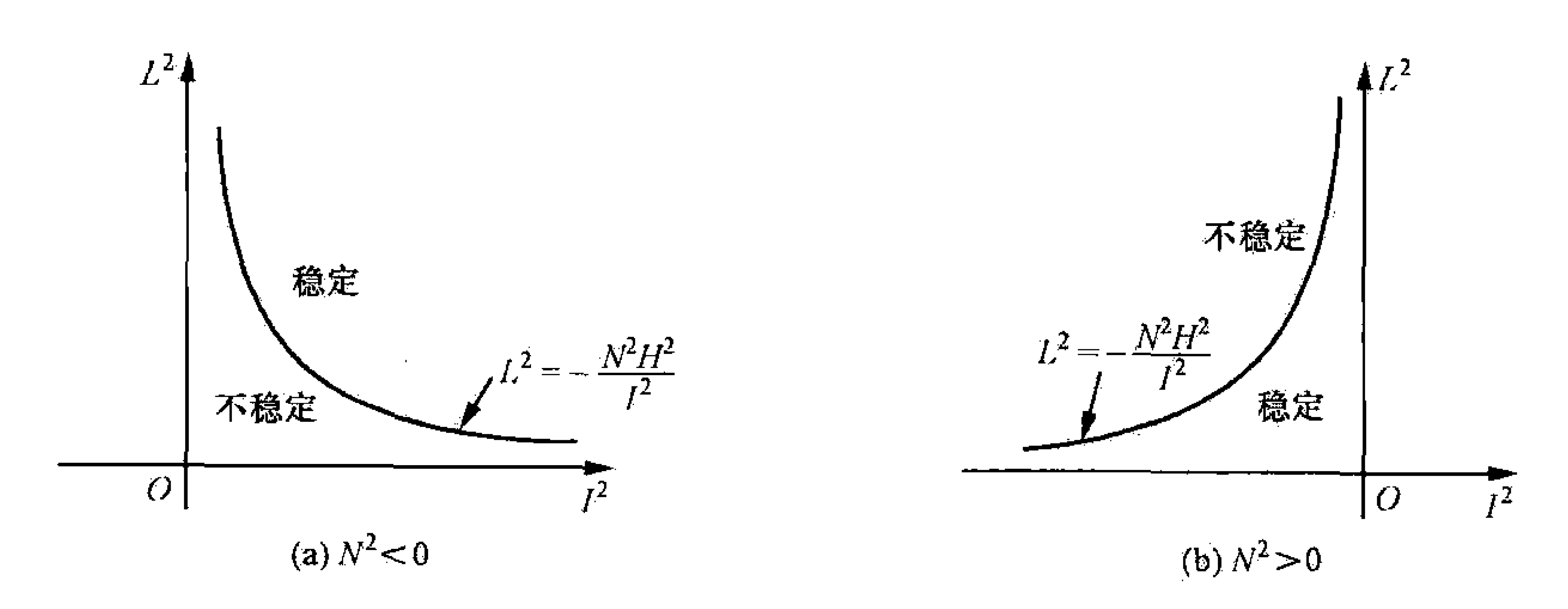


图 11.7　惯性-重力内波的稳定度

三、基本气流水平和垂直切变条件下惯性-重力内波的稳定度(对称稳定度)

上面只考虑了基本气流的水平切变，因而得到在层结和惯性都是稳定的条件下，惯性-重力内波一定是稳定的. 而考虑了基本气流的垂直切变后，即便层结是稳定的，惯性是稳定的，惯性-重力内波也仍可以是不稳定的.

从 § 4.1 知道，对于在背景是静力平衡的层结大气中运动的空气微团而言，其运动是绝热的，而且垂直方向的运动受层结稳定度参数 N^2 控制，即

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=0,\quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+N^2z=0,\quad N^2=\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial\theta_0}{\partial z}\quad\left(N^2z=\frac{\theta_0-\theta}{\theta_0}\right).\tag{11.181}$$

类似,从 § 3.5 知道,对于在背景是 $\partial\bar{p}/\partial x=0$ 和 y 方向是地转平衡的大气中运动的空气微团而言,其运动受 x 方向的运动方程和惯性稳定度参数 I^2 控制,即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-f_0v=0,\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+I^2y=0,\quad I^2=f_0\left(f_0-\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right).\tag{11.182}$$

若令

$$m=u-f_0y\tag{11.183}$$

表示运动空气的绝对纬向动量,相应,背景空气的绝对纬向动量为

$$\bar{m}=\bar{u}-f_0y,\tag{11.184}$$

这样,(11.182)式可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0,\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+I^2y=0,\quad I^2=-f_0\frac{\partial\bar{m}}{\partial y}\quad(I^2y=f_0(u-\bar{u})=f_0(m-\bar{m})).\tag{11.185}$$

上式说明:对于在背景是 $\partial\bar{p}/\partial x=0$ 和 y 方向是地转平衡的大气中运动的空气微团而言,其运动中绝对纬向动量是守恒的,而 y 方向的运动受背景大气的绝对纬向动量的经向变化控制.

在背景大气既存在层结又存在基本气流的情况下,背景大气的位温(θ_0 和 $\bar{\theta}$)不仅与 z 有关,而且与 y 有关. 由于 $\bar{\theta}$ 是位温沿纬圈的平均值,而 θ_0 可以认为是位温沿纬圈和经圈的平均值,因此,两者可统一表述为沿纬圈 θ 的平均值,就记为 $\bar{\theta}$. 若层结和惯性都是稳定的,则由(11.181)式和(11.185)式有

$$\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}>0,\quad \frac{\partial\bar{m}}{\partial y}<0.\tag{11.186}$$

因通常有 $\dfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}<0$, $\dfrac{\partial\bar{m}}{\partial z}=\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial z}>0$,则 $\bar{\theta}$ 和 $\bar{m}$ 在(y,z)平面上的等值线分布见图 11.8.

图 11.8 中的 P 点若受到扰动到达 Q 点,由于它在上升过程中的位温仍为 $\bar{\theta}$,Q 点的环境位温要小于 $\bar{\theta}$,因而还要继续上升,形成层结不稳定;同样,它在向北运动过程中,绝对纬向动量仍为 $\bar{m}$,但 Q 点的环境绝对纬向动量要大于 $\bar{m}$,因而还要继续向北运动,形成惯性不稳定. 这样,两者共同作用就有可能形成惯性-重力内波的不稳定.

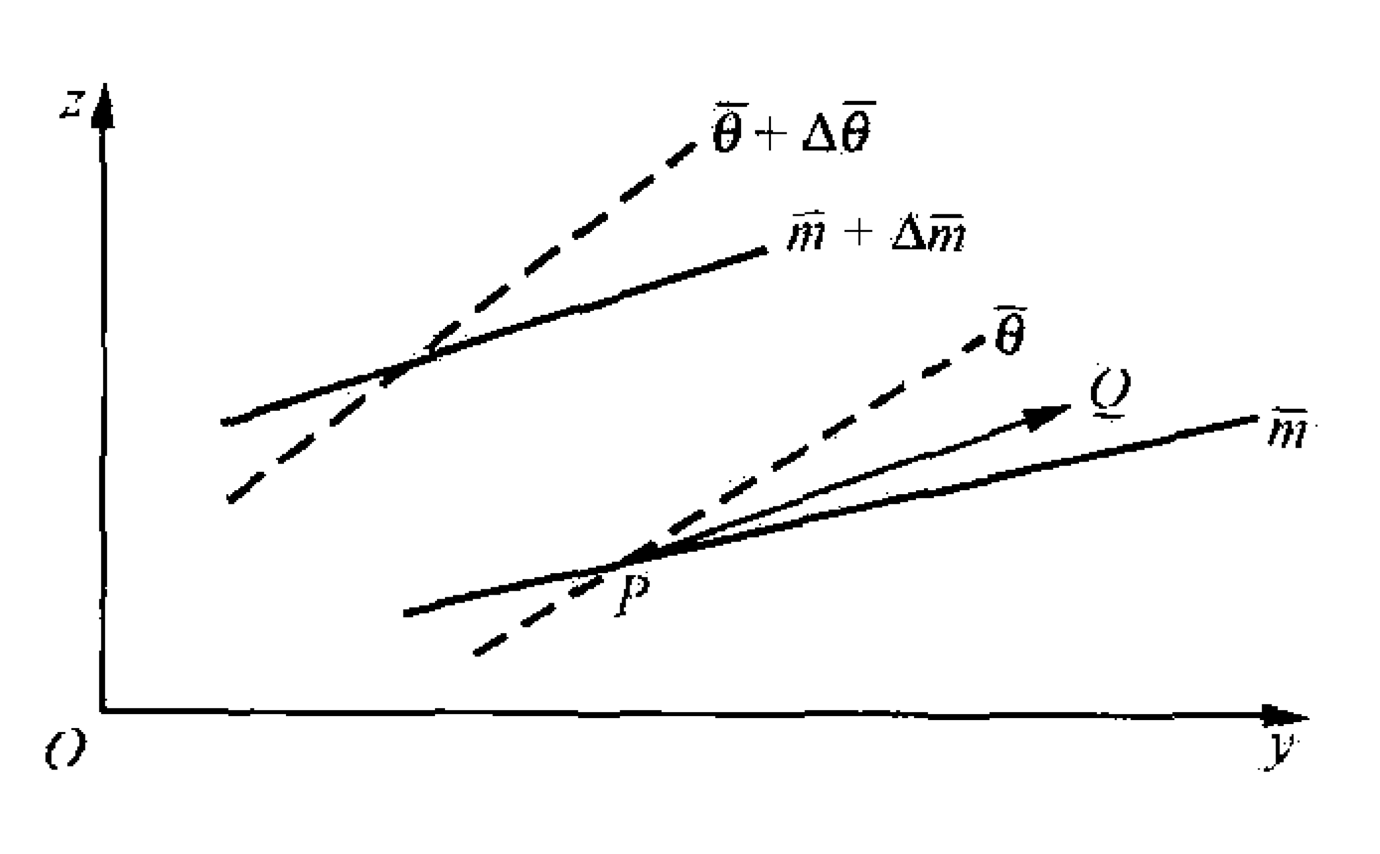


图 11.8 $\bar{\theta}$ 和 $\bar{m}$ 的等值线分布

为了综合表征基本气流水平切变和垂直切变的作用,我们应用方程组(7.70),但为了叙述方便,我们设所有扰动与 x 无关,则(7.70)式化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u'}{\partial t}-\left(f_0-\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)v'+w'\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z}=0,\\
\dfrac{\partial v'}{\partial t}+f_0u'=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial y},\\
\dfrac{\partial w'}{\partial t}=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial z}+g\dfrac{\theta'}{\theta_0},\\
\dfrac{\partial v'}{\partial y}+\dfrac{\partial w'}{\partial z}=0,\\
\dfrac{\partial}{\partial t}\left(g\dfrac{\theta'}{\theta_0}\right)-f_0\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z}v'+N^2w'=0,
\end{cases}
\tag{11.187}
$$

其中 f 已写成了 f_0. 由于基本气流 $\bar{u}$ 与扰动均与 x 无关,因此,由方程组(11.187)描写的惯性-重力内波的稳定度是在(y,z)平面内讨论的,波传播的方向与基本气流的方向垂直,所以又称为对称稳定度.

注意(7.69)式,我们引入参数

$$
J^2=f_0\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}=-\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y},
\tag{11.188}
$$

通常 $J^2>0$, J 可称为斜压频率. 利用(11.182)式,方程组(11.187)可改写为

$$
\begin{cases}
f_0\dfrac{\partial u'}{\partial t}-I^2v'+J^2w'=0,\\
\dfrac{\partial v'}{\partial t}+f_0u'=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial y},\\
\dfrac{\partial w'}{\partial t}=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial z}+g\dfrac{\theta'}{\theta_0},\\
\dfrac{\partial v'}{\partial y}+\dfrac{\partial w'}{\partial z}=0,\\
\dfrac{\partial}{\partial t}\left(g\dfrac{\theta'}{\theta_0}\right)-J^2v'+N^2w'=0.
\end{cases}
\tag{11.189}
$$

方程组(11.189)的头两式消去 u',得到

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+I^2\right)v'-J^2w'=-\frac{\partial^2\phi'}{\partial t\partial y}.
\tag{11.190}
$$

方程组(11.189)的第三式和第五式消去 $g\dfrac{\theta'}{\theta_0}$,得到

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+N^2\right)w'-J^2v'=-\frac{\partial^2\phi'}{\partial t\partial z}.
\tag{11.191}
$$

(11.190)式和(11.191)式消去 ϕ',并设 I^2, J^2 和 N^2 均为常数,得到

$$
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial v'}{\partial z}-\frac{\partial w'}{\partial y}\right)+I^2\frac{\partial v'}{\partial z}-N^2\frac{\partial w'}{\partial y}-J^2\left(\frac{\partial w'}{\partial z}-\frac{\partial v'}{\partial y}\right)=0.
\tag{11.192}
$$

但由方程组(11.187)的第四式可引入流函数 ψ' 使得

$$v' = \frac{\partial \psi'}{\partial z}, \quad w' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}. \tag{11.193}$$

这样,方程(11.192)就化为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2}\right) + N^2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + I^2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2} + 2J^2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y \partial z} = 0. \tag{11.194}$$

这就是我们分析同时具有基本气流水平和垂直切变条件下惯性-重力内波稳定度的基本方程.

考虑 ψ' 在 y 和 z 方向是齐次边条件,因而设方程(11.194)的解为

$$\psi' = \hat{\psi} e^{i(ly+nz-\omega t)}, \tag{11.195}$$

把它代入方程(11.194),求得

$$\omega^2 = \frac{l^2 N^2 + n^2 I^2 + 2lnJ^2}{l^2 + n^2}. \tag{11.196}$$

由此可见,即便层结稳定($N^2>0$)和惯性稳定($I^2>0$),但在 J^2(表征基本气流垂直切变)和 l,n 的共同作用下,ω^2 可能为负,从而出现惯性-重力内波的不稳定. 在 $J^2>0$ 的情况下就要求 l 和 n 反号.

在固定时刻,流函数 ψ' 的等相位线($ly+nz=$常数)的斜率为

$$\tan\alpha \equiv \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\psi'=\text{常数}} = -\frac{\partial \psi'/\partial y}{\partial \psi'/\partial z} = -\frac{l}{n}, \tag{11.197}$$

由此,(11.196)式还可以改写为

$$\omega^2 = N^2 \sin^2\alpha + I^2 \cos^2\alpha - 2J^2 \sin\alpha\cos\alpha. \tag{11.198}$$

从(11.196)式或(11.198)式看到,在 $N^2>0, I^2>0$ 和 $J^2>0$ 的条件下,扰动不稳定($\omega^2<0$)的必要条件为 l 与 n 反号或

$$\tan\alpha > 0, \tag{11.199}$$

即在(y,z)平面上,流函数 ψ' 的等相位线的斜率为正,这就是图 11.8 中扰动 PQ 的情况.

应用三角函数的二倍角公式,(11.198)式可改写为

$$\omega^2 = a - b\cos 2(\alpha - \alpha_0), \tag{11.200}$$

其中

$$a = \frac{1}{2}(N^2 + I^2), \quad b = \sqrt{J^4 + \left[\frac{1}{2}(N^2 - I^2)\right]^2}, \tag{11.201}$$

而 α_0 满足

$$\cos 2\alpha_0 = \frac{N^2 - I^2}{2b}, \quad \sin 2\alpha_0 = \frac{J^2}{b}, \quad \tan 2\alpha_0 = \frac{2J^2}{N^2 - I^2}. \tag{11.202}$$

从(11.200)式看到,当 $\alpha=\alpha_0$ 时,ω^2 最小,且 ω 的最小值 ω_m 满足

$$\omega_m^2 = a - b = \frac{1}{2}(N^2 + I^2) - \sqrt{J^4 + \frac{1}{4}(N^2 - I^2)^2} .$$

$$=\frac{1}{2}\left[(N^2+I^2)-\sqrt{(N^2+I^2)^2-4q}\right], \tag{11.203}$$

其中

$$q=N^2I^2-J^4. \tag{11.204}$$

从(11.203)式看到,在 $N^2>0, I^2>0$ 和 $J^2>0$ 的条件下,扰动不稳定($\omega_m^2<0$)的充分必要条件为 $q<0$,或

$$\frac{I^2}{J^2}<\frac{J^2}{N^2}. \tag{11.205}$$

因为等位温线($\bar{\theta}=$常数)和等绝对纬向动量线($\overline{m}=$常数)的斜率分别为

$$\tan\beta\equiv\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\bar{\theta}=\text{常数}}=-\frac{\partial\bar{\theta}/\partial y}{\partial\bar{\theta}/\partial z}=\frac{f_0\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial z}}{N^2}=\frac{J^2}{N^2} \tag{11.206}$$

和

$$\tan\gamma\equiv\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\overline{m}=\text{常数}}=-\frac{\partial\overline{m}/\partial y}{\partial\overline{m}/\partial z}=\frac{f_0-\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial y}}{\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial z}}=\frac{I^2}{J^2}, \tag{11.207}$$

因此,(11.205)式可改写为

$$\tan\gamma<\tan\beta. \tag{11.208}$$

即在(y,z)平面上等位温线的斜率大于等绝对纬向动量线的斜率,这也正是图11.8 所显示的情况.考虑到 Richardson 数 Ri 可表示为

$$Ri\equiv\frac{N^2}{(\partial\bar{u}/\partial z)^2}=\frac{f_0^2N^2}{J^4}=\frac{N^2I^2}{J^4}\cdot\frac{f_0^2}{I^2}, \tag{11.209}$$

则(11.205)式可改写为

$$Ri<\frac{f_0^2}{I^2}, \tag{11.210}$$

这是在 $N^2>0, I^2>0$ 和 $J^2>0$ 的情况下,惯性-重力内波不稳定的充分必要条件.

当然,从(11.196)式看到,只要层结不稳定($N^2<0$)或惯性不稳定($J^2<0$)都可能发生惯性-重力内波的不稳定.

四、惯性-重力内波的超临界(super-critical)稳定度

我们这里讨论的是在飑线系统中,惯性-重力内波的稳定度.

我们仍考虑一密度不连续的分界面,且认为存在一个满足地转关系的基本流场.问题是考查分界面上的扰动能否发展.与锋面波不同,这里认为基本流场是连续分布的.如图11.9,下层空气密度为 ρ_1,上层空气密度为 $\rho_2<\rho_1$,分界面为

$$z=h(x,y,t), \tag{11.211}$$

整个气层厚度为 H.

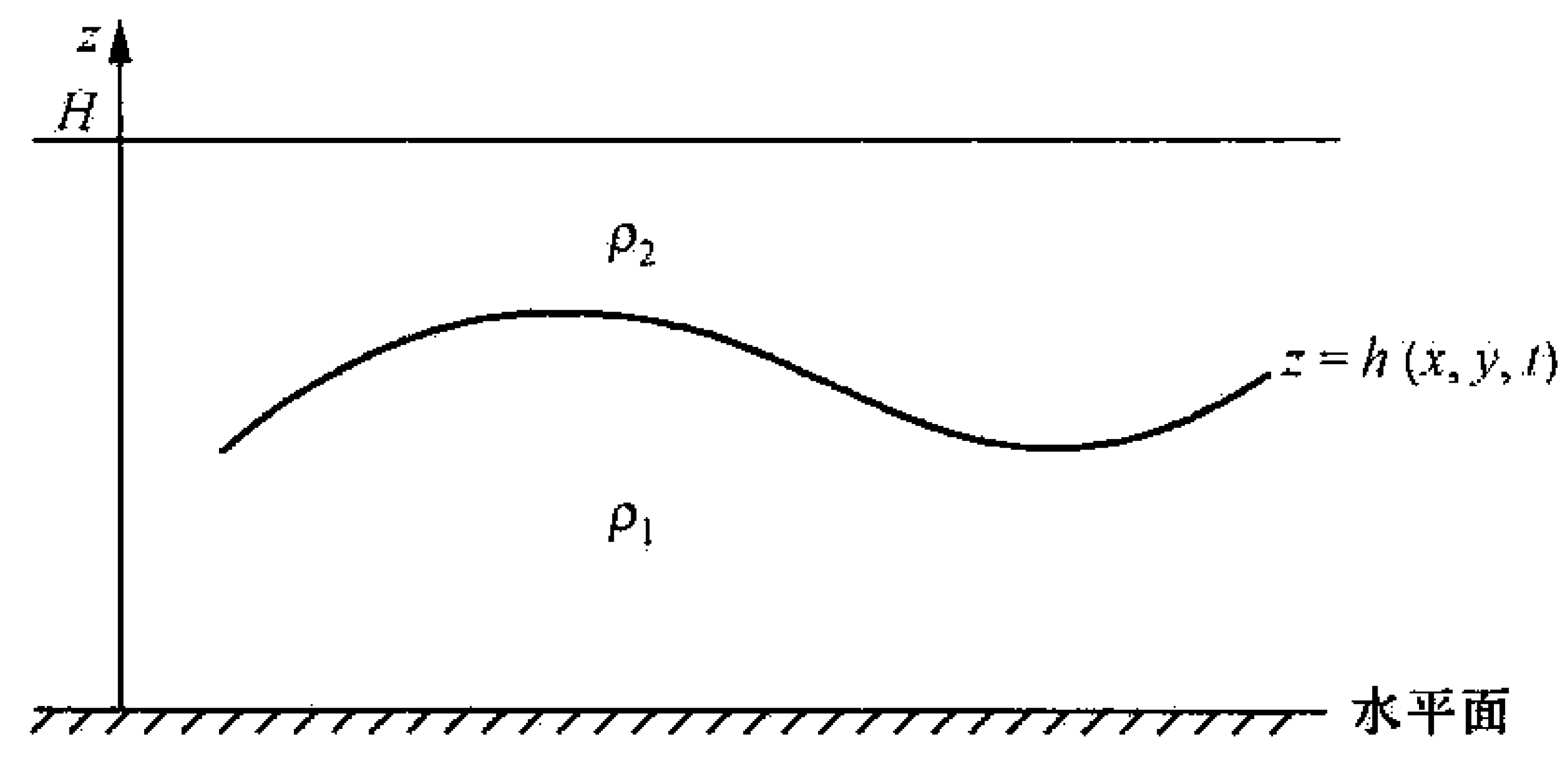


图 11.9 密度不连续面(流场连续分布)

设空气满足静力平衡,又设分界面和上界的气压分别是 p_h 和 p_H,则类似(11.102)式,求得下层空气的压强为

$$p_1 = p_H + g\rho_2 H + g(\rho_1 - \rho_2)h - g\rho_1 z. \tag{11.212}$$

因而

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial x} = g(\rho_1 - \rho_2)\dfrac{\partial h}{\partial x} = \rho_1 g^* \dfrac{\partial h}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial y} = g(\rho_1 - \rho_2)\dfrac{\partial h}{\partial y} = \rho_1 g^* \dfrac{\partial h}{\partial y}, \end{cases} \tag{11.213}$$

其中

$$g^* = g(\rho_1 - \rho_2)/\rho_1. \tag{11.214}$$

根据(11.213)式,我们可以把下层空气满足的方程写为正压模式(旋转浅水模式)的形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} - f_0 v = -g^* \dfrac{\partial h}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + f_0 u = -g^* \dfrac{\partial h}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial hu}{\partial x} + \dfrac{\partial hv}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{11.215}$$

令

$$u = \bar{u} + u', \quad v = v', \quad h = h_0(y) + h', \tag{11.216}$$

其中 $\bar{u}$ 满足下列地转关系

$$f_0 \bar{u} = -g^* \frac{\partial h_0}{\partial y}. \tag{11.217}$$

将(11.216)式代入方程组,并利用(11.217)式,则得到方程组(11.215)的线性化形式为

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u'-\left(f_0-\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)v'=-\frac{\partial \phi'}{\partial x},\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)v'+f_0u'=-\frac{\partial \phi'}{\partial y},\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi'-f_0\bar{u}v'+c_0^2\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)=0,\end{cases} \tag{11.218}$$

其中

$$\phi'=g^*h',\quad c_0^2=g^*h_0. \tag{11.219}$$

在飑线系统中，大约在 850 hPa 处有一密度的分界面，若取$(\rho_1-\rho_2)/\rho_1\approx 2.5\times10^{-2}$，则$g^*\approx2.5\times10^{-1}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. 相应$c_0^2\approx4\times10^2\,\mathrm{m^2\cdot s^{-2}}$，因而$c_0\approx20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，这是飑线系统中，波的特征传播速度.

为了简化，我们假定扰动与y无关，并设$\bar{u}=$常数，这样，方程组(11.218)化为

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u'-f_0v'=-\frac{\partial \phi'}{\partial x},\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)v'+f_0u'=0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi'-f_0\bar{u}v'+c_0^2\frac{\partial u'}{\partial x}=0.\end{cases} \tag{11.220}$$

从方程组(11.220)的前两式分别消去v'和u'得

$$\begin{cases}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+f_0^2\right]u'=-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \phi'}{\partial x},\\ \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+f_0^2\right]v'=f_0\frac{\partial \phi'}{\partial x}.\end{cases} \tag{11.221}$$

将方程组(11.220)的第三式作$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+f_0^2\right]$的运算，并利用(11.191)式，得到

$$\mathscr{L}\phi'=0, \tag{11.222}$$

其中

$$\mathscr{L}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+f_0^2-c_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]-f_0^2\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}. \tag{11.223}$$

当$\bar{u}=0$时，上式退化为

$$\mathscr{L}\equiv\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f_0^2-c_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right), \tag{11.224}$$

这样，由方程(11.222)($\mathscr{L}$取为(11.224)式)求得

$$\omega^2=k^2c_0^2+f_0^2. \tag{11.225}$$

因这里$c_0^2=g^*h_0=\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1}gh_0$，因而上式表征分界面上的惯性-重力内波，其形式同

惯性-重力外波.

当 $\bar{u}\neq 0$ 时,考虑到算子(11.223)式,我们令

$$\phi' = \hat{\phi}e^{ik(x-ct)}, \tag{11.226}$$

将其代入方程(11.222),得到

$$k^2(\bar{u}-c)^3-(k^2c_0^2+f_0^2)(\bar{u}-c)+f_0^2\bar{u}=0. \tag{11.227}$$

若令

$$p\equiv-\left(c_0^2+\frac{f_0^2}{k^2}\right),\quad q\equiv\frac{f_0^2\bar{u}}{k^2}, \tag{11.228}$$

则方程(11.227)可改写为

$$(\bar{u}-c)^3+p(\bar{u}-c)+q=0. \tag{11.229}$$

根据一元三次代数方程的理论,当

$$R\equiv\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}=-\frac{1}{27}\left(c_0^2+\frac{f_0^2}{k^2}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{f_0^2\bar{u}}{k^2}\right)^2>0 \tag{11.230}$$

时,方程(11.229)有一个实根和二共轭复根(它使得 $\bar{u}-c$ 为复数,c 的虚部不为零,造成不稳定),否则为三个实根(稳定的情况).若令

$$M\equiv\bar{u}/c_0,\quad \lambda=f_0/\sqrt{2}kc_0, \tag{11.231}$$

则条件(11.230)式化为

$$(\lambda^2M)^2>\left(\frac{1+2\lambda^2}{3}\right)^3. \tag{11.232}$$

上式或改写为

$$M^2>\frac{1}{\lambda^4}\left(\frac{1+2\lambda^2}{3}\right)^3. \tag{11.233}$$

注意下列不等式

$$(1-\lambda^2)^2(1+8\lambda^2)\geqslant 0, \tag{11.234}$$

展开上式左端,则上式化为

$$1+6\lambda^2+12\lambda^4+8\lambda^6\geqslant 27\lambda^4,$$

因而有

$$\left(\frac{1+2\lambda^2}{3}\right)^3\geqslant\lambda^4. \tag{11.235}$$

这样,不等式(11.233)可改写为

$$M^2>1 \tag{11.236}$$

或

$$\bar{u}^2>c_0^2. \tag{11.237}$$

上式表明,只要基本气流 $\bar{u}$ 的绝对值 $|\bar{u}|$ 大于特征波速 c_0,分界面上的惯性-重力内波将是不稳定的,它称为超临界不稳定.

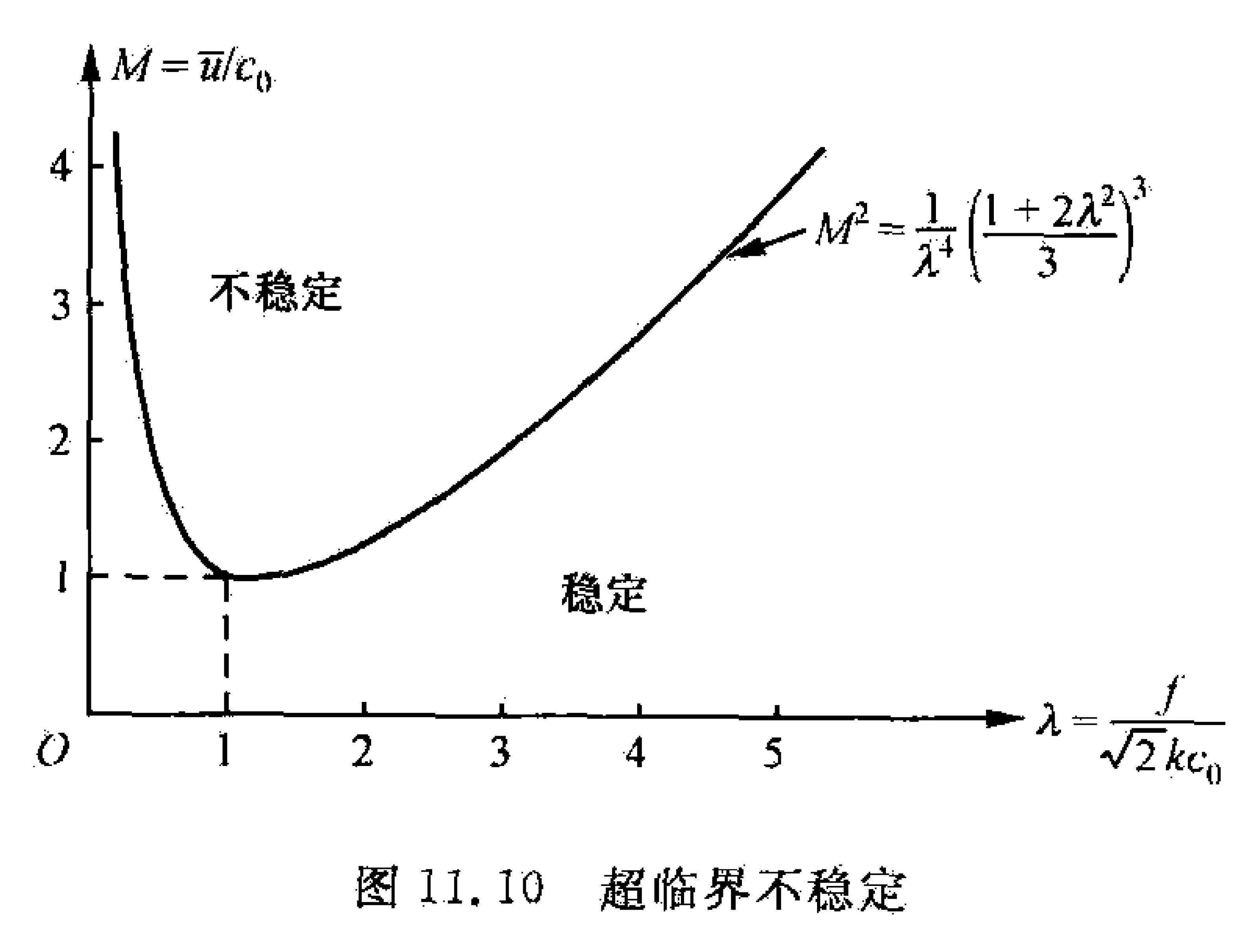


图 11.10　超临界不稳定

图 11.10 给出了 $M^2=\frac{1}{\lambda^4}\left(\frac{1+2\lambda^2}{3}\right)^3$ 的曲线. 由图可知，当 $M\geqslant 1$ 时产生不稳定，且 M 值越大，λ 的范围越宽，即不稳定的波长越多.

依一元三次代数方程的理论，我们可以求得方程(11.229)的三个根为

$$\begin{cases} c_1=\bar{u}-(A+B), \\ c_2=\bar{u}+\left[\frac{1}{2}(A+B)-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B)\right], \\ c_3=\bar{u}+\left[\frac{1}{2}(A+B)+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B)\right], \end{cases} \tag{11.238}$$

其中

$$\begin{aligned} A &\equiv \sqrt[3]{-\frac{f_0^2\bar{u}}{2k^2}+\sqrt{\left(\frac{f_0^2\bar{u}}{2k^2}\right)^2-\left(\frac{k^2c_0^2+f_0^2}{3k^2}\right)^3}}, \\ B &\equiv \sqrt[3]{-\frac{f_0^2\bar{u}}{2k^2}-\sqrt{\left(\frac{f_0^2\bar{u}}{2k^2}\right)^2-\left(\frac{k^2c_0^2+f_0^2}{3k^2}\right)^3}}. \end{aligned} \tag{11.239}$$

因 $A>B$，所以，波速为 c_2 的波是衰减的；而波速为 c_3 的波是增长的，其增长率为

$$|kc_i|=\frac{\sqrt{3}}{2}k(A-B). \tag{11.240}$$

五、锋生和 Q 矢量

锋是大气中温度(或位温)梯度较强的一个狭长区域，锋生是指锋加强，即锋区内温度(或位温)梯度增强的运动过程，通常定义锋生函数为

$$F=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nabla\theta)^2=\nabla\theta\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla\theta, \tag{11.241}$$

其中，θ 是位温. 设运动过程是绝热的 $\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=0\right)$，且舍弃与 w 有关的对流项. 因为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla\theta &= \left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\nabla\theta=\nabla\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\nabla\left(u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\nabla u+\frac{\partial\theta}{\partial y}\nabla v\right) \\ &= \nabla\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}-\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}\right], \end{aligned}$$

上式右端第一项因绝热而为零，右端最后一项若考虑 u,v 为地转风也近于零. 如果引进矢量 $\boldsymbol{Q}$，其定义为

$$Q \equiv -\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}\right], \tag{11.242}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla\theta = \boldsymbol{Q}. \tag{11.243}$$

此式说明，$\boldsymbol{Q}$ 矢量表征了位温梯度的个别变化.

(11.243)式代入(11.241)式，得到

$$F = \boldsymbol{Q}\cdot\nabla\theta. \tag{11.244}$$

它表示锋生函数乃是 $\boldsymbol{Q}$ 矢量与位温梯度的点乘，因而当 $F>0$ 时为锋生，且 $\boldsymbol{Q}$ 与 $\nabla\theta$ 同方向时，F 的数值最大，锋生最强，而当 $F<0$ 时为锋消，且 $\boldsymbol{Q}$ 与 $\nabla\theta$ 反方向时，$|F|$ 最大，锋消最强.

§11.4 Rossby 波的稳定度

因为大气大尺度运动的主要波动是 Rossby 波，因而 Rossby 波的稳定度是大气大尺度运动的问题.

讨论 Rossby 波要利用准地转位涡度守恒定律. 其线性化的形式为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)q'+\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial x}=0, \tag{11.245}$$

其中

$$\begin{cases} q' = \nabla_h^2\psi' + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{f_0^2}{N^2}\rho_0\dfrac{\partial \psi'}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta_0 - \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{f_0^2}{N^2}\rho_0\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right). \end{cases} \tag{11.246}$$

若取 $N^2=$常数，则上式化为

$$\begin{cases} q' = \nabla_h^2\psi' + \dfrac{f_0^2}{N^2}\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\dfrac{\partial \psi'}{\partial z}\right) = \nabla_h^2\psi' + \dfrac{f_0^2}{N^2}\left(\dfrac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2} - \sigma_0\dfrac{\partial \psi'}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta_0 - \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \dfrac{f_0^2}{N^2}\left(\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} - \sigma_0\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) \quad \left(\sigma_0 = -\dfrac{\partial \ln\rho_0}{\partial z}\right). \end{cases} \tag{11.247}$$

为了求解方程(11.245)，我们考虑区域：$0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi$，$y_1\leqslant y\leqslant y_2$，$0\leqslant z\leqslant H$. 除 λ 方向以 2π 为周期外，y 和 z 方向认为是刚性边条件：

$$\begin{cases} v'\big|_{y=y_1,y_2} = 0, \\ w'\big|_{z=0,H} = 0. \end{cases} \tag{11.248}$$

根据 $v'=\dfrac{\partial \psi'}{\partial x}$ 和(6.53)式(加以线性化)，上式化为

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial\psi'}{\partial x}\right|_{y=y_1,y_2}=0,\\ \left\{\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\dfrac{\partial\psi'}{\partial z}-\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial z}\dfrac{\partial\psi'}{\partial x}\right\}_{z=0,H}=0.\end{cases}\tag{11.249}$$

考虑到 q' 的形式,我们设方程(11.245)的解为

$$\psi'=\Psi(y,z)\mathrm{e}^{ik(x-ct)+\sigma_0 z/2}.\tag{11.250}$$

将其代入方程(11.245)得到

$$(\bar{u}-c)\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}-k^2\Psi+\frac{f_0^2}{N^2}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}-\frac{\sigma_0^2}{4}\Psi\right)\right]+\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}\Psi=0.\tag{11.251}$$

将(11.250)式代入边条件(11.249),得到

$$\begin{cases}\Psi\,|_{y=y_1,y_2}=0,\\ \left[(\bar{u}-c)\dfrac{\partial\Psi}{\partial z}-\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial z}\Psi\right]_{z=0,H}=0.\end{cases}\tag{11.252}$$

以 Ψ 的复共轭 Ψ^* 乘(11.251)式,注意

$$\begin{cases}\Psi^*\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\Psi^*\dfrac{\partial\Psi}{\partial y}\right)-\left|\dfrac{\partial\Psi}{\partial y}\right|^2,\\ \Psi^*\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\Psi^*\dfrac{\partial\Psi}{\partial z}\right)-\left|\dfrac{\partial\Psi}{\partial z}\right|^2,\end{cases}\tag{11.253}$$

则在 $\bar{u}-c\neq0$ 时(方程(11.251)无奇点),得到

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)+\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)-\left|\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right|^2-\frac{f_0^2}{N^2}\left|\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right|^2$$
$$+\left(\frac{\partial\bar{q}/\partial y}{\bar{u}-c}-k^2-\frac{\sigma_0 f_0^2}{4N^2}\right)|\Psi|^2=0.\tag{11.254}$$

利用边条件(11.252),将上式对 y,z 的整个区域积分得到

$$\int_0^H\int_{y_1}^{y_2}\left[\left|\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right|^2+\frac{f_0^2}{N^2}\left|\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right|^2+\left(k^2+\frac{\sigma_0 f_0^2}{4N^2}\right)|\Psi|^2\right]\delta y\delta z$$
$$=\frac{f_0^2}{N^2}\int_{y_1}^{y_2}\left[\frac{(\bar{u}-c^*)\partial\bar{u}/\partial z}{|\bar{u}-c|^2}|\Psi|^2\right]_{z=0}^{z=H}\delta y+\int_0^H\int_{y_1}^{y_2}\frac{(\bar{u}-c^*)\partial\bar{q}/\partial y}{|\bar{u}-c|^2}|\Psi|^2\delta y\delta z,\tag{11.255}$$

其中 c^* 为 c 的复共轭.

将上式分成实部和虚部,有

$$\int_0^H\int_{y_1}^{y_2}\left[2E_p-\frac{(\bar{u}-c_r)\partial\bar{q}/\partial y}{|\bar{u}-c|^2}|\Psi|^2\right]\delta y\delta z=\frac{f_0^2}{N^2}\int_{y_1}^{y_2}\left[\frac{(\bar{u}-c_r)\partial\bar{u}/\partial z}{|\bar{u}-c|^2}|\Psi|^2\right]_{z=0}^{z=H}\delta y,\tag{11.256}$$

$$c_i\left\{\int_0^H\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial\bar{q}/\partial y}{|\bar{u}-c|^2}|\Psi|^2\delta y\delta z+\frac{f_0^2}{N^2}\int_{y_1}^{y_2}\left[\frac{\partial\bar{u}/\partial z}{|\bar{u}-c|^2}|\Psi|^2\right]_{z=0}^{z=H}\delta y=0,\right.\tag{11.257}$$

在(11.256)式中

$$E_p = \frac{1}{2}\left\{\left|\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right|^2 + \frac{f_0^2}{N^2}\left|\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right|^2 + \left(k^2 + \frac{\sigma_0^2 f_0^2}{4N^2}\right)|\Psi|^2\right\} > 0. \quad (11.258)$$

在准地转条件下，$u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}, v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}, \frac{\theta'}{\theta_0} = \frac{f_0}{g}\frac{\partial \psi'}{\partial z}$，则由(11.250)式可知，扰动动能与扰动有效势能的实数值分别是

$$\begin{cases} K_p = \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2) = \frac{1}{2}\left\{\left|\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right|^2 + k^2|\Psi|^2\right\}, \\ A_p = \frac{g^2}{2N^2}\left(\frac{\theta'}{\theta_0}\right)^2 = \frac{f_0^2}{2N^2}\left\{\left|\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right|^2 + \frac{\sigma_0^2}{4}|\Psi|^2\right\}. \end{cases} \quad (11.259)$$

因而

$$E_p = K_p + A_p, \quad (11.260)$$

即在(11.258)中的 E_p 是扰动总能量.

对不稳定 Rossby 波，$c_i \neq 0$，则由(11.257)式得到

$$\int_0^H\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \bar{q}/\partial y}{|\bar{u}-c|^2}|\Psi|^2 \delta y \delta z + \frac{f_0^2}{N^2}\int_{y_1}^{y_2}\left[\frac{\partial \bar{u}/\partial z}{|\bar{u}-c|^2}|\Psi|^2\right]_{z=0}^{z=H}\delta y = 0, \quad (11.261)$$

这是 Rossby 波不稳定的第一个必要条件. 将(11.227)式代入(11.222)式得到

$$\int_0^H\int_{y_1}^{y_2} 2E_p \delta y \delta z = \int_0^H\int_{y_1}^{y_2} \frac{\bar{u}\partial \bar{q}/\partial y}{|\bar{u}-c|^2}|\Psi|^2 \delta y \delta z + \frac{f_0^2}{N^2}\int_{y_1}^{y_2}\left[\frac{\bar{u}\partial \bar{u}/\partial z}{|\bar{u}-c|^2}|\Psi|^2\right]_{z=0}^{z=H}\delta y > 0, \quad (11.262)$$

这是 Rossby 波不稳定的第二个必要条件. 下面，我们分开纯正压、纯斜压两种情况来说明. 关于 Rossby 波的演变和结构，我们在第八章已从能量的观点作了详尽的讨论，这里不再说明.

一、纯正压稳定度

在纯正压情况，基本流场

$$\bar{u} = \bar{u}(y), \quad (11.263)$$

因而$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = 0$；若考虑扰动也与 z 无关的情况，则(11.247)式化为

$$q' = \nabla_h^2 \psi', \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta_0 - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}. \quad (11.264)$$

1. 不稳定的必要条件

此时，(11.261)式和(11.262)式分别化为

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \bar{q}/\partial y}{|\bar{u}-c|^2}|\Psi|^2 \delta y = 0, \quad (11.265)$$

$$\int_{y_1}^{y_2}\left(\left|\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right|^2+k^2|\Psi|^2\right)\delta y=\int_{y_1}^{y_2}\frac{\bar{u}\partial\bar{q}/\partial y}{|\bar{u}-c|^2}|\Psi|^2\delta y>0. \quad (11.266)$$

因$|\Psi|^2>0$，$|\bar{u}-c|^2>0$，则上两式成立分别要求：

$$\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}=\beta_0-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}\text{在}(y_1,y_2)\text{中必须改变正负号；} \quad (11.267)$$

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}=\bar{u}\left(\beta_0-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}\right)\text{在}(y_1,y_2)\text{上正相关.} \quad (11.268)$$

(11.267)式称为郭晓岚(H. L. Kuo)定理，它说明正压不稳定扰动要求$\bar{u}(y)$必须使得$\beta_0-\partial^2\bar{u}/\partial y^2$在$(y_1,y_2)$的某些点上取零值；(11.268)式称为Fjörtoft定理，它从扰动能量上说明正压不稳定扰动能量增加要求$\bar{u}(\beta_0-\partial^2\bar{u}/\partial y^2)$至少在$(y_1,y_2)$的某些区域上为正值，即便在某些点上$\bar{u}(\beta_0-\partial^2\bar{u}/\partial y^2)$为负，但在整个区域$(y_1,y_2)$上，$\bar{u}\partial\bar{q}/\partial y$必须是正相关. 如果Fjörtoft定理不满足，那么即便郭晓岚定理成立，正压扰动也是稳定的，这是因为扰动能量是减小的.

在纯正压的条件下，扰动的振幅方程(11.251)和边条件(11.252)分别化为

$$(\bar{u}-c)\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}-k^2\Psi\right)+\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}\Psi=0, \quad (11.269)$$

$$\Psi|_{y=y_1}=0,\quad \Psi|_{y=y_2}=0. \quad (11.270)$$

2. 不稳定波的增长率

在正压条件和扰动与z无关的条件下，(11.256)式化为

$$\int_{y_1}^{y_2}\frac{(\bar{u}-c_r)\partial\bar{q}/\partial y}{|\bar{u}-c|^2}|\Psi|^2\delta y=\int_{y_1}^{y_2}\left(\left|\frac{d\Psi}{dy}\right|^2+k^2|\Psi|^2\right)\delta y. \quad (11.271)$$

设扰动的南北宽度为

$$d\equiv y_2-y_1, \quad (11.272)$$

考虑到边条件(11.270)，则将$\Psi(y)$展为下列Fourier级数：

$$\Psi(y)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi(y-y_1)}{d}, \quad (11.273)$$

因而

$$\frac{d\Psi}{dy}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{d}b_n\cos\frac{n\pi(y-y_1)}{d}. \quad (11.274)$$

利用(11.273)式和(11.274)式，我们可以对(11.271)式的右端作出估计. 由(11.273)式和(11.274)式有

$$\int_{y_1}^{y_2}|\Psi|^2\delta y=\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\int_{y_1}^{y_2}\sin^2\frac{n\pi(y-y_1)}{d}\delta y=\frac{d}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2,$$

$$\int_{y_1}^{y_2}\left|\frac{d\Psi}{dy}\right|^2\delta y=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2b_n^2\int_{y_1}^{y_2}\cos^2\frac{n\pi(y-y_1)}{d}\delta y$$

$$= \frac{d}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 b_n^2 \geqslant \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 \cdot \frac{d}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

因而，(11.271)式右端

$$\int_{y_1}^{y_2}\left(\left|\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}y}\right|^2 + k^2 \mid \Psi \mid^2\right)\delta y \geqslant \left(k^2 + \frac{\pi^2}{d^2}\right)\frac{d}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \left(k^2 + \frac{\pi^2}{d^2}\right)\int_{y_1}^{y_2} \mid \Psi \mid^2 \delta y, \tag{11.275}$$

而且，(11.271)式化为

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{(\bar{u} - c_r)\partial \bar{q}/\partial y}{\mid \bar{u} - c \mid^2} \mid \Psi \mid^2 \delta y \geqslant \left(k^2 + \frac{\pi^2}{d^2}\right)\int_{y_1}^{y_2} \mid \Psi \mid^2 \delta y. \tag{11.276}$$

又因 $|\bar{u}-c|^2=(\bar{u}-c_r)^2+c_i^2\geqslant 2(\bar{u}-c_r)c_i$，则上式左端

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{(\bar{u} - c_r)\dfrac{\partial \bar{q}}{\partial y}}{\mid \bar{u} - c \mid^2} \mid \Psi \mid^2 \delta y \leqslant \int_{y_1}^{y_2} \left|\frac{(\bar{u} - c_r)\dfrac{\partial \bar{q}}{\partial y}}{\mid \bar{u} - c_r \mid^2}\right| \mid \Psi \mid^2 \delta y$$

$$\leqslant \int_{y_1}^{y_2} \frac{\left|\dfrac{\partial \bar{q}}{\partial y}\right|}{2 \mid c_i \mid} \mid \Psi \mid^2 \delta y \leqslant \frac{\max\limits_{(y_1, y_2)}\left|\dfrac{\partial \bar{q}}{\partial y}\right|}{2 \mid c_i \mid}\int_{y_1}^{y_2} \mid \Psi \mid^2 \delta y. \tag{11.277}$$

将上式与(11.276)式结合有

$$\left(k^2 + \frac{\pi^2}{d^2}\right)\int_{y_1}^{y_2} \mid \Psi \mid^2 \delta y \leqslant \frac{\max\limits_{(y_1, y_2)}\left|\dfrac{\partial \bar{q}}{\partial y}\right|}{2 \mid c_i \mid}\int_{y_1}^{y_2} \mid \Psi \mid^2 \delta y, \tag{11.278}$$

所以

$$\mid c_i \mid \leqslant \max_{(y_1, y_2)}\left|\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\right| \Big/ 2\left(k^2 + \frac{\pi^2}{d^2}\right). \tag{11.279}$$

上式给出了正压不稳定扰动的 c_i 一个上限. 由此求得不稳定增长率满足

$$\mid kc_i \mid \leqslant k \max_{(y_1, y_2)}\left|\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\right| \Big/ 2\left(k^2 + \frac{\pi^2}{d^2}\right). \tag{11.280}$$

上式右端当 $k\to 0$ 和 $k\to\infty$ 时都趋向于零，这就表明：最不稳定的波长既不会太长，也不会太短.

3. 半圆定理

不稳定 Rossby 波的移速 c_r 也是有限制的. 为此，对方程(11.269)作变换

$$\Psi(y) = (\bar{u} - c)F(y), \tag{11.281}$$

则类似于(11.60)式，方程(11.269)化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[(\bar{u} - c)^2 \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\right] + [\beta_0(\bar{u} - c) - k^2(\bar{u} - c)^2]F = 0. \tag{11.282}$$

以 F 的复共轭 F^* 乘以上式，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[(\bar{u} - c)^2 F^* \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\right] + \beta_0(\bar{u} - c) \mid F \mid^2 - (\bar{u} - c)^2\left(\left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\right|^2 + k^2 \mid F \mid^2\right) = 0.$$

自 y_1 到 y_2 积分上式，注意 F^* 也满足边条件(11.270)，得

$$\int_{y_1}^{y_2}(\bar{u}-c)^2\left(\left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\right|^2+k^2|F|^2\right)\delta y=\int_{y_1}^{y_2}\beta_0(\bar{u}-c)|F|^2\delta y. \quad (11.283)$$

上式的实部和虚部分别是

$$\int_{y_1}^{y_2}[(\bar{u}-c_r)^2-c_i^2]\left(\left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\right|^2+k^2|F|^2\right)\delta y=\int_{y_1}^{y_2}\beta_0(\bar{u}-c_r)|F|^2\delta y, \quad (11.284)$$

$$c_i\left\{\int_{y_1}^{y_2}(\bar{u}-c_r)\left(\left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\right|^2+k^2|F|^2\right)\delta y-\frac{1}{2}\int_{y_1}^{y_2}\beta_0|F|^2\delta y\right\}=0. \quad (11.285)$$

对不稳定扰动，$c_i\neq 0$，则由(11.285)式，得到

$$\int_{y_1}^{y_2}(\bar{u}-c_r)\left(\left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\right|^2+k^2|F|^2\right)\delta y=\frac{1}{2}\int_{y_1}^{y_2}\beta_0|F|^2\delta y. \quad (11.286)$$

由此求得

$$c_r=\left(\int_{y_1}^{y_2}\bar{u}Q\delta y\Big/\int_{y_1}^{y_2}Q\delta y\right)-\left(\frac{\beta_0}{2}\int_{y_1}^{y_2}|F|^2\delta y\Big/\int_{y_1}^{y_2}Q\delta y\right), \quad (11.287)$$

其中

$$Q\equiv\left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\right|^2+k^2|F|^2\geqslant 0. \quad (11.288)$$

注意 $\frac{\beta_0}{2}\int_{y_1}^{y_2}|\Psi|^2\delta y>0$，且对 F 应用(11.275)式，若设 $\bar{u}_m$ 和 $\bar{u}_M$ 分别是 $\bar{u}$ 在 (y_1,y_2) 上的最小值与最大值，则由(11.287)式求得

$$\bar{u}_m-\frac{\beta_0}{2\left(k^2+\frac{\pi^2}{d^2}\right)}<c_r<\bar{u}_M, \quad (11.289)$$

这就是正压不稳定 Rossby 波移速 c_r 的限制.

利用(11.286)式，(11.284)式化为

$$\int_{y_1}^{y_2}\bar{u}^2Q\delta y=(c_r^2+c_i^2)\int_{y_1}^{y_2}Q\delta y+\int_{y_1}^{y_2}\beta_0\bar{u}|F|^2\delta y. \quad (11.290)$$

仿(11.87)式到(11.88)式的分析，我们得到

$$\int_{y_1}^{y_2}\{\bar{u}^2-(\bar{u}_m+\bar{u}_M)\bar{u}+\bar{u}_m\bar{u}_M\}Q\delta y\leqslant 0. \quad (11.291)$$

将(11.286)式和(11.288)式代入上式得

$$(c_r^2+c_i^2)\int_{y_1}^{y_2}Q\delta y+\int_{y_1}^{y_2}\beta_0\bar{u}|F|^2\delta y-\int_{y_1}^{y_2}(\bar{u}_m+\bar{u}_M)c_rQ\delta y$$
$$-\frac{\bar{u}_m+\bar{u}_M}{2}\int_{y_1}^{y_2}\beta_0|F|^2\delta y\leqslant 0,$$

即

$$\int_{y_1}^{y_2}\left\{\left[c_r-\frac{1}{2}(\bar{u}_m+\bar{u}_M)\right]^2+c_i^2-\frac{1}{4}(\bar{u}_m+\bar{u}_M)^2\right\}Q\delta y$$

$$+\int_{y_1}^{y_2}\beta_0\left(\bar{u}-\frac{\bar{u}_m+\bar{u}_M}{2}\right)|F|^2\delta y\leqslant 0. \tag{11.292}$$

但 $\bar{u}\geqslant\bar{u}_m$，且对 F 应用(11.275)式，则上式左端第二项

$$\int_{y_1}^{y_2}\beta_0\left(\bar{u}-\frac{\bar{u}_m+\bar{u}_M}{2}\right)|F|^2\delta y\geqslant\int_{y_1}^{y_2}\beta_0\left(\bar{u}_m-\frac{\bar{u}_m+\bar{u}_M}{2}\right)|F|^2\delta y$$

$$=-\frac{\beta_0}{2}(\bar{u}_M-\bar{u}_m)\int_{y_1}^{y_2}|F|^2\delta y\geqslant-\frac{\frac{\beta_0}{2}(\bar{u}_M-\bar{u}_m)}{k^2+\frac{\pi^2}{d^2}}\int_{y_1}^{y_2}Q\delta y.$$

这样，(11.292)式就化为

$$\int_{y_1}^{y_2}\left\{\left[c_r-\frac{1}{2}(\bar{u}_m+\bar{u}_M)\right]^2+c_i^2-\frac{1}{4}(\bar{u}_m+\bar{u}_M)^2-\frac{\beta_0(\bar{u}_M-\bar{u}_m)/2}{k^2+\pi^2/d^2}\right\}Q\delta y\leqslant 0.$$

由此得到

$$(c_r-\bar{u}_0)^2+c_i^2\leqslant c_R^2, \tag{11.293}$$

其中

$$\bar{u}_0=\frac{1}{2}(\bar{u}_M+\bar{u}_m),\quad c_R^2=\bar{u}_0^2+\frac{\beta_0}{k^2+\pi^2/d^2}\hat{u},\quad \hat{u}=\frac{1}{2}(\bar{u}_M-\bar{u}_m). \tag{11.294}$$

(11.293)式就是正压不稳定 Rossby 波的半圆定理.

4. 本征值问题

下面，我们在给定的风速分布条件下，讨论方程(11.269)在边条件(11.270)下的本征值问题. 为了方便起见，我们应用下列无量纲变量

$$\begin{cases}\eta=(y-y_0)/d,\quad \bar{u}_1=\bar{u}/\bar{u}_0,\quad c_1=c/\bar{u}_0,\\ \Psi_1=\Psi/\bar{u}_0 d,\quad k_1=k\cdot d,\quad \beta_1=\beta_0 d^2/\bar{u}_0,\end{cases} \tag{11.295}$$

其中 y_0 为 (y_1, y_2) 间的一个特征位置；$\bar{u}_0$ 是基本风速 $\bar{u}(y)$ 的一个特征量；β_1 就是无量纲的 Rossby 参数. 利用(11.295)式，扰动振幅方程(11.269)和边条件(11.270)分别化为

$$\frac{d^2\Psi_1}{d\eta^2}+\left[\frac{\beta_1-\frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial\eta^2}}{\bar{u}_1-c_1}-k_1^2\right]\Psi_1=0, \tag{11.296}$$

$$\Psi_1|_{\eta=\eta_1,\eta_2}=0\quad(\eta_1=(y_1-y_0)/d,\eta_2=(y_2-y_0)/d). \tag{11.297}$$

我们考查如下两种基本气流分布.

(1) 双曲正切气流

$$\bar{u}=-\bar{u}_0\tanh\frac{y-y_0}{d}. \tag{11.298}$$

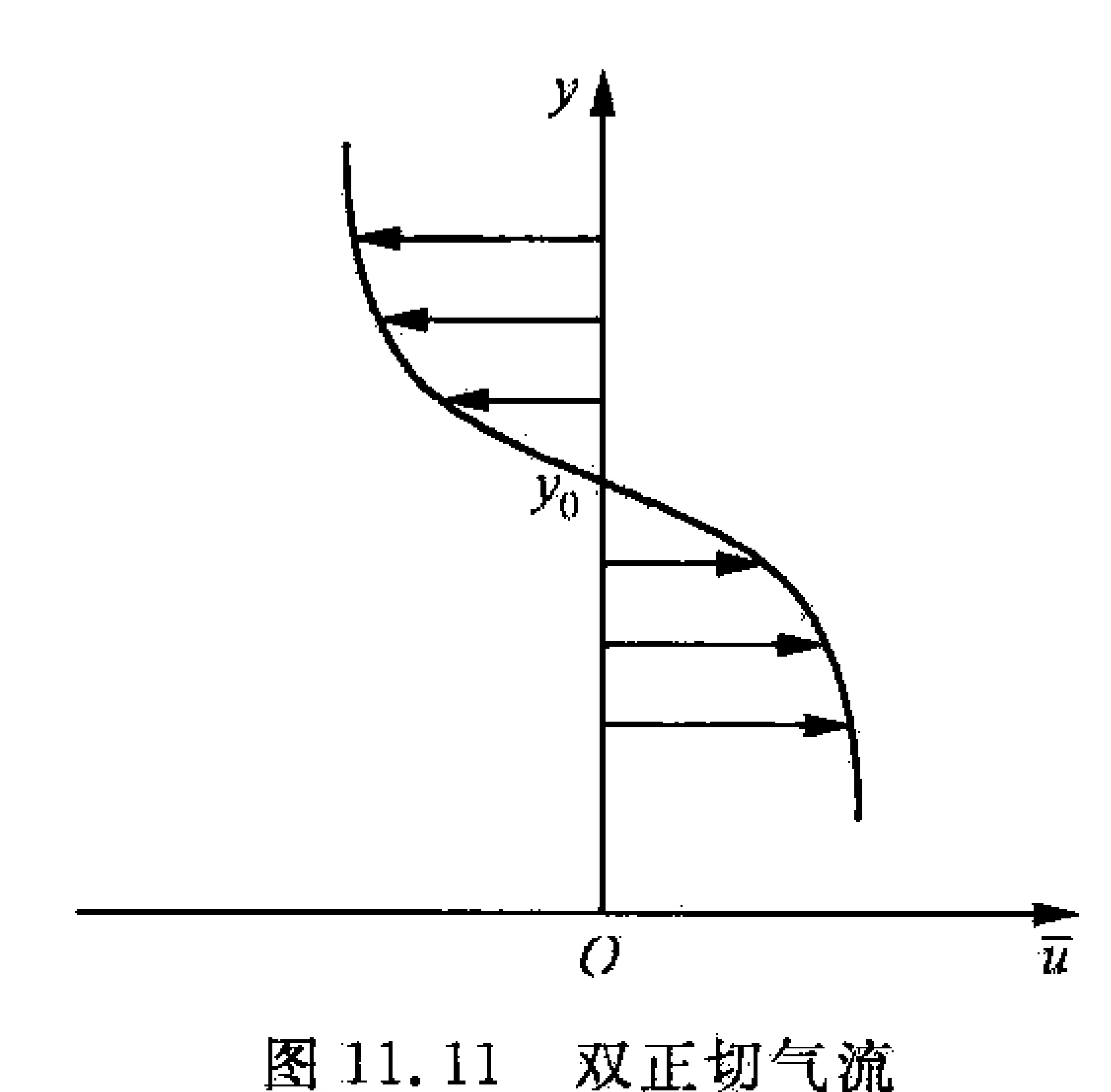


图 11.11 双正切气流

显然，$y=y_0$ 时 $\bar{u}=0$；$y<y_0$ 时 $\bar{u}>0$；$y>y_0$ 时 $\bar{u}<0$. 其图像见图 11.11，它是风速切变区域的抽象.

(11.298)式的无量纲形式为

$$\bar{u}_1 = -\tanh\eta. \tag{11.299}$$

因为

$$\tanh(\pm 3) = \pm 0.99505 \approx \pm 1,$$

因而，可以认为：当 $|\eta|>3$ 时，$\bar{u}_1$ 的数值近于 ±1. 即此时 $\bar{u}_1$ 不再随 η 而变化，而接近于 $\eta\to\pm\infty$ 时的基本气流.

利用(11.299)式，求得无量纲的绝对涡度梯度为

$$\frac{\partial \bar{q}_1}{\partial \eta} \equiv \beta_1 - \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \eta^2} = \beta_1 - 2t_1(1-t_1^2) = \beta_1 + f(t_1), \tag{11.300}$$

其中

$$t_1 = -\bar{u}_1 = \tanh\eta \tag{11.301}$$

和

$$f(t_1) \equiv 2t_1^3 - 2t_1. \tag{11.302}$$

而当 $t_1=-\sqrt{1/3}$ 时，$f(t_1)$ 有极大值 $4/3\sqrt{3}\approx 0.7698$；当 $t_1=\sqrt{1/3}$ 时，$f(t_1)$ 有极小值 $-4/3\sqrt{3}\approx -0.7698$. 所以，$\dfrac{\partial \bar{q}_1}{\partial \eta}$ 在 (η_1,η_2) 上要改变正负号的条件可写为

$$|\beta_1| < 4/3\sqrt{3} \approx 0.7698. \tag{11.303}$$

上式还原为有量纲形式为

$$\left|\frac{\beta_0 d^2}{\bar{u}_0}\right| < \frac{4}{3\sqrt{3}} \approx 0.7698. \tag{11.304}$$

因此，对于双曲正切气流，要产生不稳定扰动，基本气流必须满足 $|\bar{u}_{\max}|=|\bar{u}_0|$ 要大和切变宽度 d 要小.

(2) 双曲正割气流

$$\bar{u} = \bar{u}_0 \operatorname{sech}^2 \frac{y-y_0}{d}. \tag{11.305}$$

显然，$y=y_0$ 时，$\bar{u}=\bar{u}_0$，这是 $\bar{u}$ 的最大值，其图像见图 11.12，它是急流区域的抽象.

(11.305)式的无量纲形式为

$$\bar{u}_1 = \operatorname{sech}^2\eta. \tag{11.306}$$

因为

$$\operatorname{sech}^2(\pm 4) \approx 0,$$

因而，可以认为：急流的有效区间为

$$-4 < \eta < 4.$$

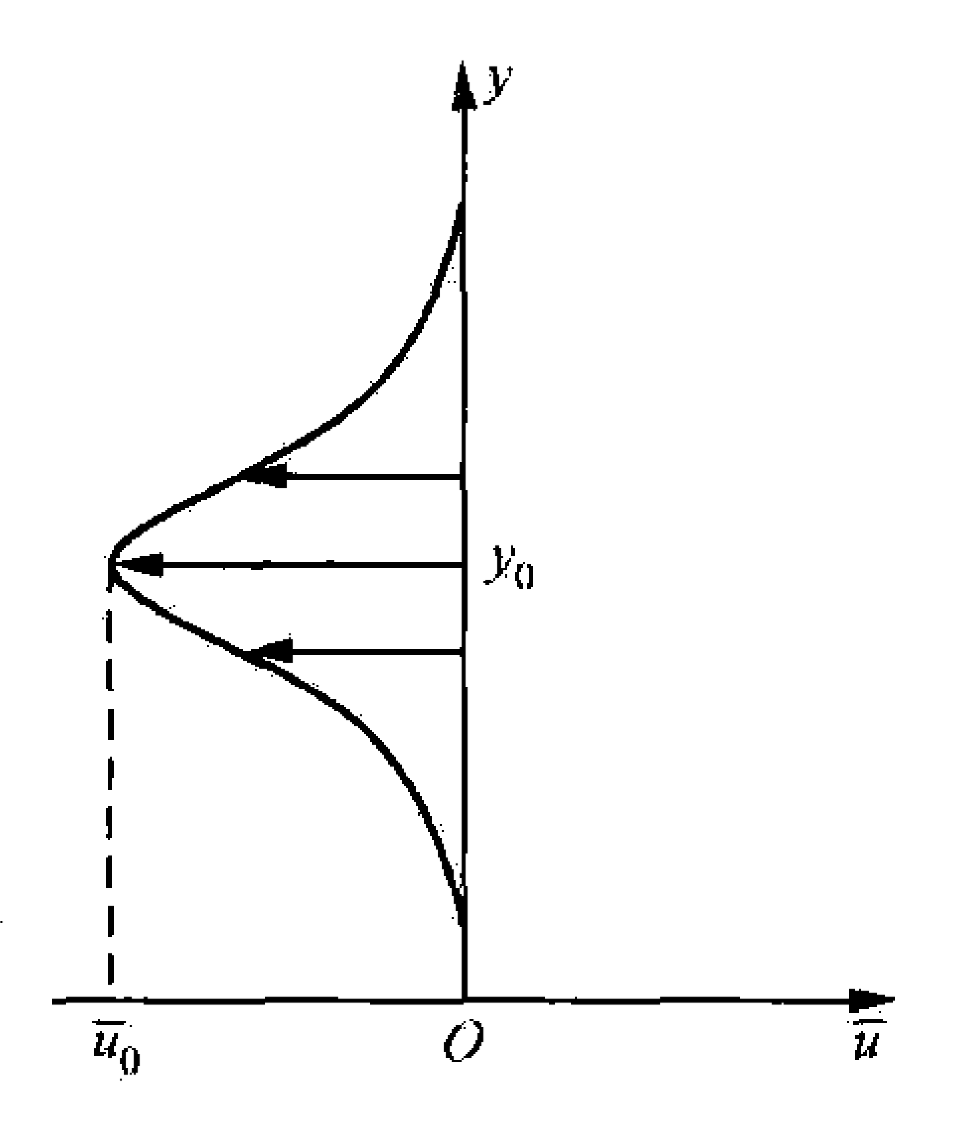


图 11.12 双曲正割气流

利用(11.306)式，求得无量纲的绝对涡度梯度为

$$\frac{\partial \bar{q}_1}{\partial \eta} \equiv \beta_1 - \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \eta^2} = \beta_1 + 6s_1^4 - 4s_1^2 = \beta_1 + g(s_1), \tag{11.307}$$

其中

$$s_1 = \mathrm{sech}\eta \tag{11.308}$$

和

$$g(s_1) = 6s_1^4 - 4s_1^2. \tag{11.309}$$

而当 $s_1=0$ 时，$g(s_1)$有极大值 0，当 $s_1^2=1/3$ 时，$g(s_1)$有极小值$-2/3$. 所以，$\partial\bar{q}_1/\partial\eta$ 在(η_1,η_2)上要改变正负号的条件可写为

$$-2/3 < \beta_1 < 0. \tag{11.310}$$

上式还原为有量纲形式为

$$-\frac{2}{3} < \frac{\beta_0 d^2}{\bar{u}_0} < 0 \quad \left(\left|\frac{\beta_0 d^2}{\bar{u}_0}\right| < \frac{2}{3}\right). \tag{11.311}$$

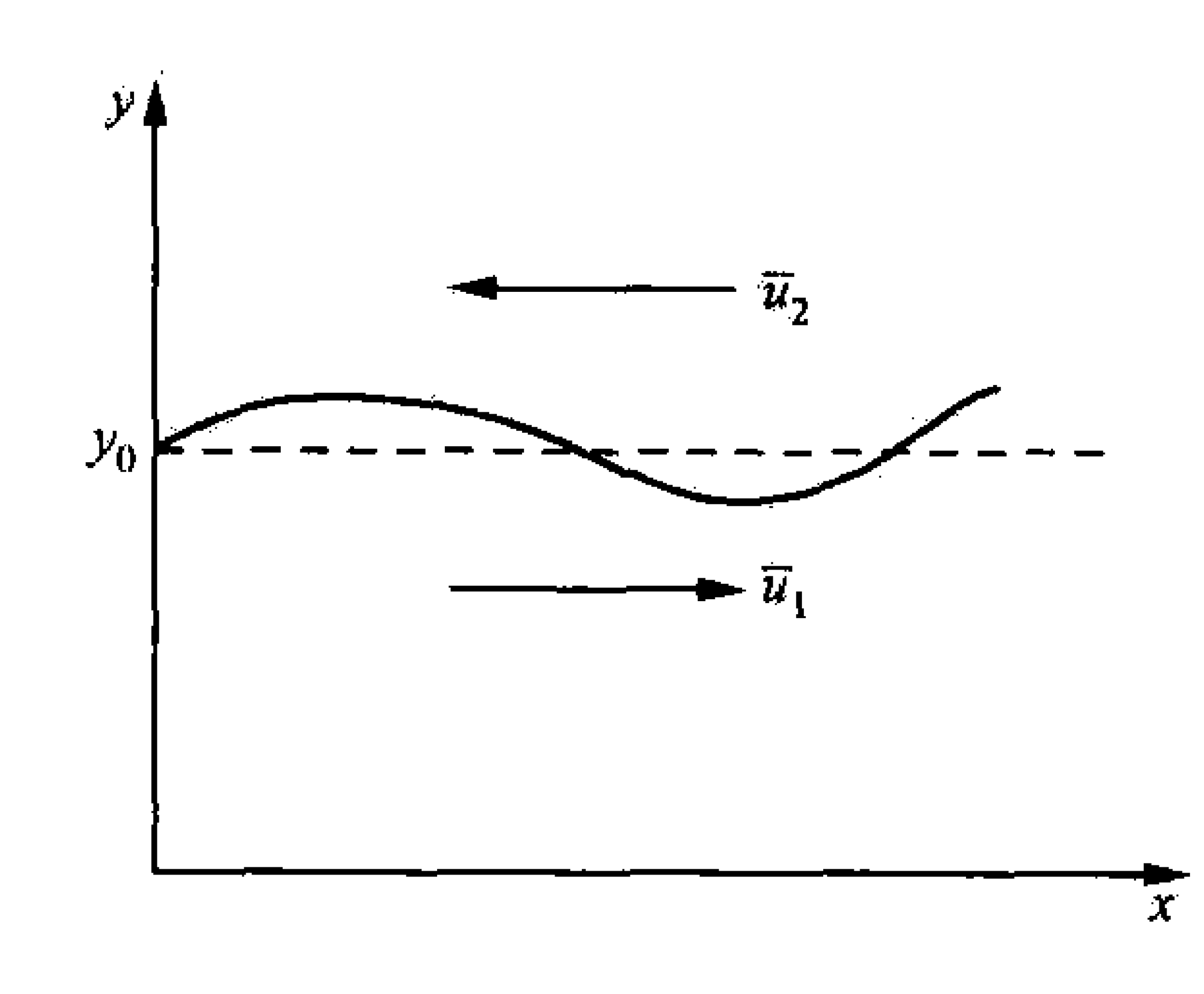


图 11.13 速度切变

因此，对双曲正割气流，$\bar{u}_0>0$ 时(西风急流)，扰动是稳定的；而只有 $\bar{u}_0<0$ 时(东风急流)才会产生不稳定扰动，且$|\bar{u}_0|$要大和急流宽度 d 要小.

以上两种基本气流分布的初步分析表明：当速度切变较大和有效宽度较小时，可以形成大和有效宽度较小时，可以形成正压不稳定. 为了简化，我们考虑如图 11.13 的具有速度不连续的 Rossby 波的正压稳定度，其中 $y=y_0$ 为分界面，且认为界面以南和以北各延伸到无穷远. $y<y_0$ 时，$\bar{u}=\bar{u}_1>0$；$y>y_0$ 时，$\bar{u}=\bar{u}_2<0$. 此时的正压稳定度又称为切变稳定度.

设运动是水平无辐散的，则描述各层的线性化的方程组可以写为

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \dfrac{\partial}{\partial x}\right)u_j' - f_i v_j' = -\dfrac{\partial \phi_j'}{\partial x}, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \dfrac{\partial}{\partial x}\right)v_j' + f_j u_j' = -\dfrac{\partial \phi_j'}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u_j'}{\partial x} + \dfrac{\partial v_j'}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{11.312}$$

其中 $j=1,2$，分别表 $y<y_0$ 和 $y>y_0$ 的区域. 由连续性方程引入流函数 $\psi_j'(j=1,2)$，使得

$$u_j' = -\frac{\partial \psi_j'}{\partial y}, \quad v_j' = \frac{\partial \psi_j'}{\partial x} \quad (j = 1,2), \tag{11.313}$$

则方程组(11.312)化为

$$\mathscr{L}_j \psi_j' = 0 \quad (j = 1,2), \tag{11.314}$$

其中

$$\mathscr{L}_j \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla_h^2 + \beta_j \frac{\partial}{\partial x} \quad (j = 1,2). \tag{11.315}$$

在无穷远处，我们取下列齐次边条件：

$$\psi_1' \mid_{y\to-\infty} \to 0, \quad \psi_2 \mid_{y\to\infty} \to 0; \tag{11.316}$$

在分界面，取位势场(相当于气压场)连续的条件，即

$$y = y_0:\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x}\right)(\phi_1' - \phi_2') + v_j' \frac{\partial(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)}{\partial y} = 0 \quad (j = 1,2). \tag{11.317}$$

因基本位势场满足地转关系，即

$$\frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial y} = - f_1 \bar{u}_1, \quad \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial y} = - f_2 \bar{u}_2, \tag{11.318}$$

这样，(11.317)式化为

$$y = y_0:\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x}\right)(\phi_1' - \phi_2') - (f_1\bar{u}_1 - f_2\bar{u}_2)v_j' = 0 \quad (j = 1,2). \tag{11.319}$$

设方程(11.314)的解为

$$\psi_j' = \Psi_j(y)\mathrm{e}^{ik(x-ct)} \quad (j = 1,2), \tag{11.320}$$

将其代入方程(11.314)，在 $\bar{u}_j - c \neq 0 (j=1,2)$ 时得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Psi_j}{\mathrm{d}y^2} - \alpha_j^2 \Psi_j = 0 \quad (j = 1,2), \tag{11.321}$$

其中

$$\alpha_j^2 = k^2 + \frac{\beta_{0j}}{c - \bar{u}_j} \quad (j = 1,2). \tag{11.322}$$

方程(11.321)要满足边条件(11.316)，只有 $\alpha_j^2 > 0 (j=1,2)$，而且

$$\Psi_1(y) = A\mathrm{e}^{\alpha_1 y}, \quad \Psi_2(y) = B\mathrm{e}^{-\alpha_2 y}, \tag{11.323}$$

其中 α_1, α_2 分别为 α_1^2, α_2^2 的正根，A, B 为两常数.

将上式代入(11.321)式可求得 $\psi_j' (j=1,2)$，然后再代入(11.313)式可求得 $u_j', v_j' (j=1,2)$，再代入方程组(11.312)的第一式或第二式可求得 $\phi_j' (j=1,2)$. 取积分常数为零，我们得到

$$\begin{cases} u_1' = \alpha_1 A e^{\alpha_1 y} e^{ik(x-ct)}, \\ v_1' = ikA e^{\alpha_1 y} e^{ik(x-ct)}, \\ \phi_1' = -[\alpha_1(c-\bar{u}_1) - f_1] A e^{\alpha_1 y} e^{ik(x-ct)}; \end{cases} \tag{11.324}$$

$$\begin{cases} u_2' = \alpha_2 B e^{-\alpha_2 y} e^{ik(x-ct)}, \\ v_2' = ikB e^{-\alpha_2 y} e^{ik(x-ct)}, \\ \phi_2' = [\alpha_2(c-\bar{u}_2) + f_2] B e^{-\alpha_2 y} e^{ik(x-ct)}. \end{cases} \tag{11.325}$$

将(11.324)式和(11.325)式代入分界面条件(11.319)，注意在分界面上 $f_1 = f_2 = f_0$，$\beta_{01} = \beta_{02} = \beta_0$，则有

$$\begin{cases} [\alpha_1(c-\bar{u}_1)^2 - f_0(c-\bar{u}_2)] A e^{\alpha_1 y_0} + [\alpha_2(c-\bar{u}_1)(c-\bar{u}_2) + f_0(c-\bar{u}_1)] B e^{-\alpha_2 y_0} = 0, \\ [\alpha_1(c-\bar{u}_1)(c-\bar{u}_2) - f_0(c-\bar{u}_2)] A e^{\alpha_1 y_0} + [\alpha_2(c-\bar{u}_2)^2 + f_0(c-\bar{u}_1)] B e^{-\alpha_2 y_0} = 0. \end{cases} \tag{11.326}$$

这是待定常数 A,B 的代数方程组，欲使 A,B 有非零解必须而且只有

$$\begin{vmatrix} \alpha_1(c-\bar{u}_1)^2 - f_0(c-\bar{u}_2) & \alpha_2(c-\bar{u}_1)(c-\bar{u}_2) + f_0(c-\bar{u}_1) \\ \alpha_1(c-\bar{u}_1)(c-\bar{u}_2) - f_0(c-\bar{u}_2) & \alpha_2(c-\bar{u}_2)^2 + f_0(c-\bar{u}_1) \end{vmatrix} = 0.$$

将上式展开得

$$\alpha_1(c-\bar{u}_1)^2 + \alpha_2(c-\bar{u}_2)^2 = 0. \tag{11.327}$$

因为 $\alpha_1 > 0$，$\alpha_2 > 0$，则上式成立只有 c 为复数. 以(11.322)式代入，得到下列 c 的三次代数方程：

$$c^3 + ac^2 + bc + d = 0, \tag{11.328}$$

其中

$$\begin{cases} a = -\left[\dfrac{3}{2}(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) - \dfrac{3\beta_0}{4k^2}\right], \\ b = \left[(\bar{u}_1^2 + \bar{u}_1\bar{u}_2 + \bar{u}_2^2) - \dfrac{3\beta_0}{4k^2}(\bar{u}_1 + \bar{u}_2)\right], \\ d = -\left[\dfrac{1}{4}(\bar{u}_1 + \bar{u}_2)(\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2) - \dfrac{\beta_0}{4k^2}(\bar{u}_1^2 + \bar{u}_1\bar{u}_2 + \bar{u}_2^2)\right]. \end{cases} \tag{11.329}$$

令

$$\begin{cases} p \equiv b - \dfrac{1}{3}a^2 = \dfrac{1}{4}\left[(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2 - \dfrac{3\beta_0^2}{4k^4}\right], \\ q \equiv d - \dfrac{1}{3}ab + \dfrac{2}{27}a^3 = \dfrac{\beta_0^3}{32k^6}. \end{cases} \tag{11.330}$$

根据一元三次代数方程的理论，当

$$R \equiv \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = \frac{1}{12^3}\left[(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2 - \frac{3\beta_0^2}{4k^4}\right]^3 + \frac{1}{64^2}\left(\frac{\beta_0}{k^2}\right)^6 > 0 \tag{11.331}$$

时，方程(11.328)有一实根和二共轭复根，因而扰动不稳定．但(11.331)式很容易改写为

$$R \equiv \frac{(\bar{u}_1-\bar{u}_2)^2}{12^3}\left\{\left[(\bar{u}_1-\bar{u}_2)^2-\frac{9\beta_0^2}{8k^4}\right]^2+\frac{27\beta_0^4}{64k^8}\right\}>0. \tag{11.332}$$

这是一个恒不等式，即不管 $\bar{u}_1$，$\bar{u}_2$ 及 k 值如何，不等式都成立，因而扰动不稳定．

方程(11.328)的三个根是

$$\begin{cases} c_1=\dfrac{1}{2}\left[(\bar{u}_1+\bar{u}_2)-\dfrac{\beta_0}{2k^2}\right]+A+B, \\ c_2=\dfrac{1}{2}\left[(\bar{u}_1+\bar{u}_2)-\dfrac{\beta_0}{2k^2}\right]+\gamma A+\gamma^2 B=\dfrac{1}{2}\left[(\bar{u}_1+\bar{u}_2)-\dfrac{\beta_0}{2k^2}\right]-\dfrac{1}{2}(A+B)+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}(A-B), \\ c_3=\dfrac{1}{2}\left[(\bar{u}_1+\bar{u}_2)-\dfrac{\beta_0}{2k^2}\right]+\gamma^2 A+\gamma B=\dfrac{1}{2}\left[(\bar{u}_1+\bar{u}_2)-\dfrac{\beta_0}{2k^2}\right]-\dfrac{1}{2}(A+B)-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}(A-B), \end{cases} \tag{11.333}$$

其中

$$\gamma=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \gamma^2=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \gamma^3=1 \tag{11.334}$$

和

$$\begin{cases} A\equiv\left(-\dfrac{q}{2}+\sqrt{R}\right)^{1/3}=\left\{-\dfrac{\beta_0^3}{64k^6}+\dfrac{\bar{u}_1-\bar{u}_2}{24\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\left[(\bar{u}_1-\bar{u}_2)^2-\dfrac{9\beta_0^2}{8k^4}\right]^2+\dfrac{27\beta_0^4}{64k^8}}\right\}^{1/3}, \\ B\equiv\left(-\dfrac{q}{2}+\sqrt{R}\right)^{1/3}=\left\{-\dfrac{\beta_0^3}{64k^6}-\dfrac{\bar{u}_1-\bar{u}_2}{24\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\left[(\bar{u}_1-\bar{u}_2)^2-\dfrac{9\beta_0^2}{8k^4}\right]^2+\dfrac{27\beta_0^4}{64k^8}}\right\}^{1/3}. \end{cases} \tag{11.335}$$

又因为 $A>B$，所以，对应 c_3 的波是衰减的，而对应 c_2 的波是增长的，其增长率为

$$|kc_i|=\sqrt{3}k(A-B)/2. \tag{11.336}$$

二、纯斜压稳定度

在纯斜压情况，基本流场

$$\bar{u}=\bar{u}(z). \tag{11.337}$$

因而$\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial y}=0$，$\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}=0$；这样，(11.247)式的第二式化为

$$\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}=\beta_0-\frac{f_0^2}{N^2}\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}-\sigma_0\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right). \tag{11.338}$$

在纯斜压情况下的 Rossby 波，层结通常是稳定的，即 $N^2>0$．

关于纯斜压条件下 Rossby 波不稳定的必要条件(参见本章末习题 11)和半圆定理等可以仿正压情况作类似的讨论，这里我们不再说明．下面，我们应用准地转

的斜压两层正压模式讨论 Rossby 波的纯斜压稳定度，其示意图见图 11.2. 为了简化，我们假定：在未扰动时，两层空气以 $H_1=H/2$ 作为其分界面，因而，两层空气的厚度均是 $D=H/2$.

依第六章的分析，准地转正压模式的涡度方程可以写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u^{(0)}\frac{\partial}{\partial x}+v^{(0)}\frac{\partial}{\partial y}\right)\zeta^{(0)}+\beta_0 v^{(0)}=f_0\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{11.339}$$

其中

$$u^{(0)}=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v^{(0)}=\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \zeta^{(0)}=\nabla_h^2\psi. \tag{11.340}$$

这里，准地转流函数 ψ 为

$$\psi=p'/f_0\rho.$$

在此两层模式中，我们应用的边条件是

$$w|_{z=0}=0,\quad w|_{z=H}=0, \tag{11.341}$$

分界面条件为

$$w|_{z=H/2}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+u^{(0)}\frac{\partial}{\partial x}+v^{(0)}\frac{\partial}{\partial y}\right)h', \tag{11.342}$$

其中 h' 为分界面的扰动. 而由(11.111)式知

$$p_1'-p_2'=\rho g^* h'\quad\left(g^*=\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho}g,\ \rho=\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\right). \tag{11.343}$$

对下层空气，从 $z=0$ 到 $z=H/2=D$ 积分涡度方程(11.339)，并应用下边界和分界面条件得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_1^{(0)}\frac{\partial}{\partial x}+v_1^{(0)}\frac{\partial}{\partial y}\right)\zeta_1^{(0)}+\beta_0 v_1^{(0)}=\frac{f_0}{D}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_1^{(0)}\frac{\partial}{\partial x}+v_1^{(0)}\frac{\partial}{\partial y}\right)h'. \tag{11.344}$$

类似，对上层空气，从 $z=H/2=D$ 到 $z=H=2D$ 积分涡度方程(11.339)，并应用分界面条件和上边界条件为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_2^{(0)}\frac{\partial}{\partial x}+v_2^{(0)}\frac{\partial}{\partial y}\right)\zeta_2^{(0)}+\beta_0 v_2^{(0)}=-\frac{f_0}{D}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_2^{(0)}\frac{\partial}{\partial x}+v_2^{(0)}\frac{\partial}{\partial y}\right)h'. \tag{11.345}$$

利用(11.343)式，并令

$$c_0^2=g^* D,\quad \lambda_0^2=f_0^2/c_0^2, \tag{11.346}$$

则方程(11.344)和(11.345)化为

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)[\nabla_h^2\psi_1+\lambda_0^2(\psi_2-\psi_1)]+\beta_0\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)[\nabla_h^2\psi_2-\lambda_0^2(\psi_2-\psi_1)]+\beta_0\frac{\partial\psi_2}{\partial x}=0\end{cases}\quad(\psi_1\equiv p_1'/f_0\rho,\ \psi_2\equiv p_2'/f_0\rho). \tag{11.347}$$

这就是准地转两层正压模式的方程组，其中 ψ_1,ψ_2 分别为下层和上层空气的准地转流函数.

为了求解方程组(11.347)，我们令

$$\psi_1=-\bar{u}_1 y+\psi_1',\quad \psi_2=-\bar{u}_2 y+\psi_2',\tag{11.348}$$

显然 $\bar{u}_1,\bar{u}_2$ 分别为下层和上层的基本气流，$\bar{u}_2-\bar{u}_1\neq 0$ 表征了大气斜压性. 将(11.348)式代入方程组(11.347)，则方程组化为

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_1\dfrac{\partial}{\partial x}\right)q_1'+[\beta_0-\lambda_0^2(\bar{u}_2-\bar{u}_1)]\dfrac{\partial\psi_1'}{\partial x}=-\mathrm{J}(\psi_1',q_1'),\\[2ex]\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_2\dfrac{\partial}{\partial x}\right)q_2'+[\beta_0+\lambda_0^2(\bar{u}_2-\bar{u}_1)]\dfrac{\partial\psi_2'}{\partial x}=-\mathrm{J}(\psi_2',q_2'),\end{cases}\tag{11.349}$$

其中

$$q_1'=\nabla_h^2\psi_1'+\lambda_0^2(\psi_2'-\psi_1'),\quad q_2'=\nabla_h^2\psi_2'-\lambda_0^2(\psi_2'-\psi_1').\tag{11.350}$$

去掉方程组(11.349)右端的非线性项，则方程组(11.349)化为

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_1\dfrac{\partial}{\partial x}\right)(\nabla_h^2\psi_1'+\lambda_0^2\psi_2')-\lambda_0^2\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_2\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\psi_1'+\beta_0\dfrac{\partial\psi_1'}{\partial x}=0,\\[2ex]\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_2\dfrac{\partial}{\partial x}\right)(\nabla_h^2\psi_2'+\lambda_0^2\psi_1')-\lambda_0^2\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_1\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\psi_2'+\beta_0\dfrac{\partial\psi_2'}{\partial x}=0.\end{cases}\tag{11.351}$$

为了求解方程组(11.351)，我们取 y 方向是齐次边条件：

$$\psi_j'\big|_{y=y_1}=0,\quad \psi_j'\big|_{y=y_2}=0\quad(j=1,2).\tag{11.352}$$

这样，我们可设方程组(11.351)的解为

$$(\psi_1',\psi_2')=(\hat{\psi}_1,\hat{\psi}_2)\sin l(y-y_1)\mathrm{e}^{ik(x-ct)},\tag{11.353}$$

其中 $l=\pi/d=\pi/(y_2-y_1)$.

将(11.353)式代入方程组(11.351)，得到

$$\begin{cases}[K_h^2(c-\bar{u}_1)+\lambda_0^2(c-\bar{u}_2)+\beta_0]\hat{\psi}_1-\lambda_0^2(c-\bar{u}_1)\hat{\psi}_2=0,\\-\lambda_0^2(c-\bar{u}_2)\hat{\psi}_1+[K_h^2(c-\bar{u}_2)+\lambda_0^2(c-\bar{u}_1)+\beta_0]\hat{\psi}_2=0.\end{cases}\tag{11.354}$$

这是 $\hat{\psi}_1,\hat{\psi}_2$ 的线性方程组，欲使 $\hat{\psi}_1,\hat{\psi}_2$ 有非零解，其系数行列式必须为零，即

$$\begin{vmatrix}K_h^2(c-\bar{u}_1)+\lambda_0^2(c-\bar{u}_2)+\beta_0 & -\lambda_0^2(c-\bar{u}_1)\\ -\lambda_0^2(c-\bar{u}_2) & K_h^2(c-\bar{u}_2)+\lambda_0^2(c-\bar{u}_1)+\beta_0\end{vmatrix}=0.\tag{11.355}$$

由此得到下列 c 的二次代数方程

$$ac^2+bc+d=0,\tag{11.356}$$

其中

$$\begin{cases}a=K_h^2(K_h^2+2\lambda_0^2),\quad b=2\beta_0(K_h^2+\lambda_0^2)-K_h^2(K_h^2+2\lambda_0^2)(\bar{u}_1+\bar{u}_2),\\d=\beta_0^2-\beta_0(K_h^2+\lambda_0^2)(\bar{u}_1+\bar{u}_2)+K_h^2\lambda_0^2(\bar{u}_1^2+\bar{u}_2^2)+K_h^4\bar{u}_1\bar{u}_2.\end{cases}\tag{11.357}$$

若令

$$\bar{u} = (\bar{u}_1 + \bar{u}_2)/2, \quad \hat{u} = (\bar{u}_2 - \bar{u}_1)/2, \tag{11.358}$$

则方程(11.356)化为

$$(c-\bar{u})^2 + \frac{2\beta_0(K_h^2+\lambda_0^2)}{K_h^2(K_h^2+2\lambda_0^2)}(c-\bar{u}) + \frac{\beta_0^2 - K_h^2\hat{u}^2(K_h^2-2\lambda_0^2)}{K_h^2(K_h^2+2\lambda_0^2)} = 0. \tag{11.359}$$

由此求得

$$c = \bar{u} - \frac{\beta_0}{K_h^2}\cdot\frac{K_h^2+\lambda_0^2}{K_h^2+2\lambda_0^2} \pm \frac{\sqrt{\beta_0^2\lambda_0^4 - K_h^4\hat{u}^2(4\lambda_0^4-K_h^4)}}{K_h^2(K_h^2+2\lambda_0^2)}. \tag{11.360}$$

由此可知，在分层流中，Rossby 波斜压稳定度的充分必要条件为

$$\beta_0^2\lambda_0^4 - K_h^4\hat{u}^2(4\lambda_0^4-K_h^4)\begin{cases}\geqslant 0, & \text{稳定},\\ < 0, & \text{不稳定}.\end{cases} \tag{11.361}$$

所以，β_0 起稳定的作用，风速垂直切变 $\hat{u}$ 起不稳定的作用，而且，风速垂直切变数值越大，越易不稳定. 当

$$K_h^2 \geqslant 2\lambda_0^2 \tag{11.362}$$

时，波是稳定的；只有当

$$K_h^2 < 2\lambda_0^2 \tag{11.363}$$

时，波才有可能不稳定. 由 $K_h^2=2\lambda_0^2$，取 $K_h=2\pi/L$ 求得临界波长为

$$L_c = \sqrt{2}\pi/\lambda_0. \tag{11.364}$$

$L_c\approx3100$ km. 这样，(11.363)式可改写为

$$L > L_c, \tag{11.365}$$

即只有 $L>L_c$ 时，波才有可能不稳定. (11.363)式或(11.365)式即是两层斜压 Rossby 波不稳定的必要条件. 在这个条件满足时，(11.361)式可以化为

$$\hat{u}\begin{cases}\leqslant \hat{u}_c, & \text{稳定},\\ > \hat{u}_c, & \text{不稳定},\end{cases} \tag{11.366}$$

其中

$$\hat{u}_c = \beta_0\lambda_0^2/K_h^2\sqrt{4\lambda_0^4-K_h^4} \tag{11.367}$$

为 $\hat{u}$ 的临界值. 根据实际资料分析，$\hat{u}_c\approx4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，因而 $(\bar{u}_2-\bar{u}_1)_c\approx8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，所以，当风速垂直切变 $(\bar{u}_2-\bar{u}_1)>8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 时，才会出现不稳定波.

由上分析知，(11.367)式表征 $K_h^2<2\lambda_0^2$ 时，稳定与不稳定的两层斜压 Rossby 波的分界线. 若以 K_h^2 为横坐标，$\bar{u}_s=\bar{u}_2-\bar{u}_1=2\hat{u}$ 为纵坐标，画出(11.367)式所表示的曲线，见图 11.14. 图中曲线的最低点为 $(\sqrt{2}\lambda_0^2, \beta_0/\lambda_0^2)$，称它为临界点，因此

$$\hat{u}_{c,\min} = \beta_0/2\lambda_0^2. \tag{11.368}$$

类似，取 $K_h=2\pi/L$，还可画出以 L 为横坐标，$\hat{u}$ 为纵坐标的由(11.367)式所表示的曲线，见图 11.15. 由图看出，只有 $\hat{u}>\hat{u}_c$（$\hat{u}_c\approx4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$）和 $L>L_c$（$L_c\approx3100$ km）的斜压

Rossby 波才可能不稳定，而且，风速垂直切变越大，不稳定波段的范围也越大.

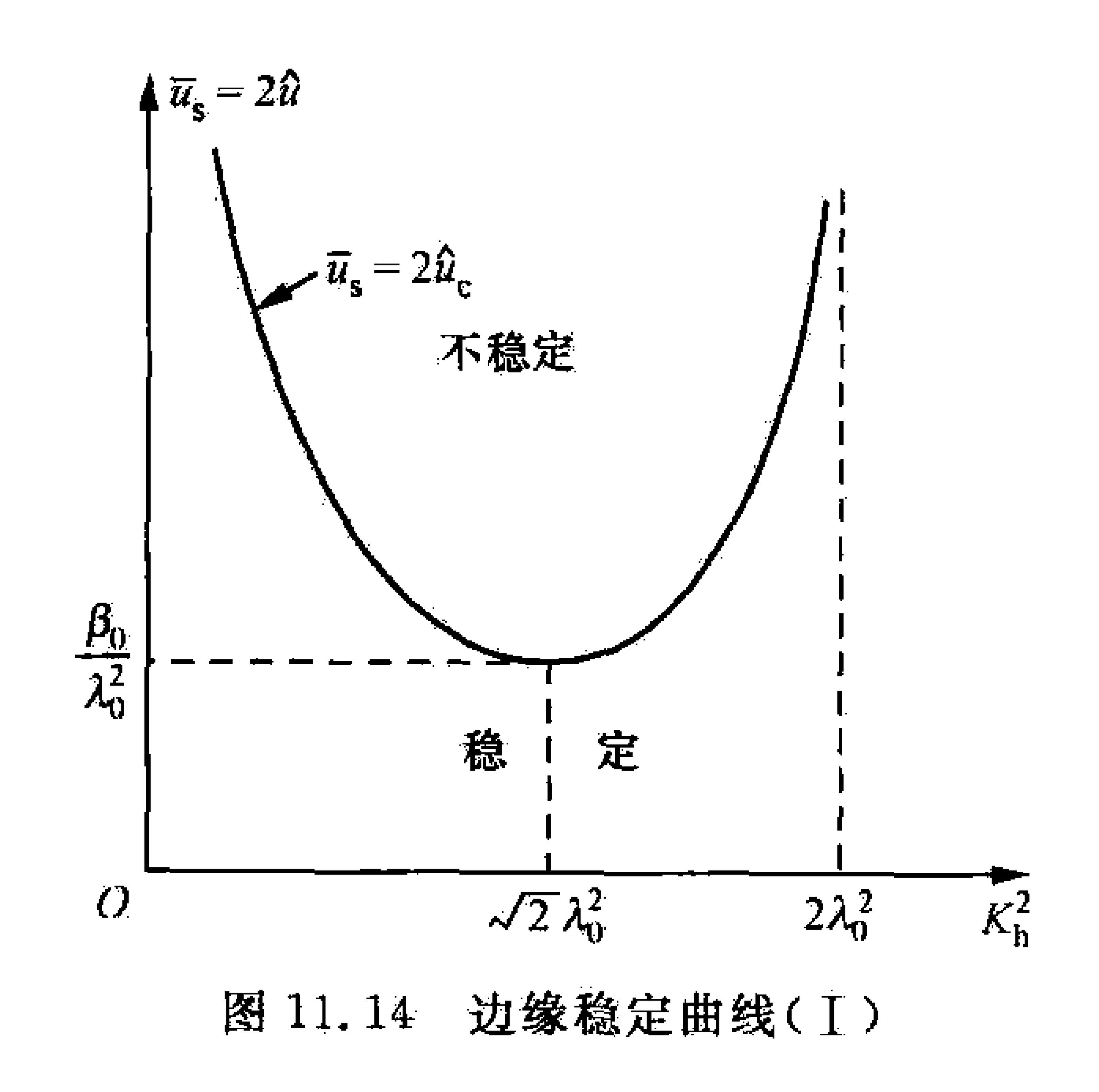


图 11.14 边缘稳定曲线（Ⅰ）

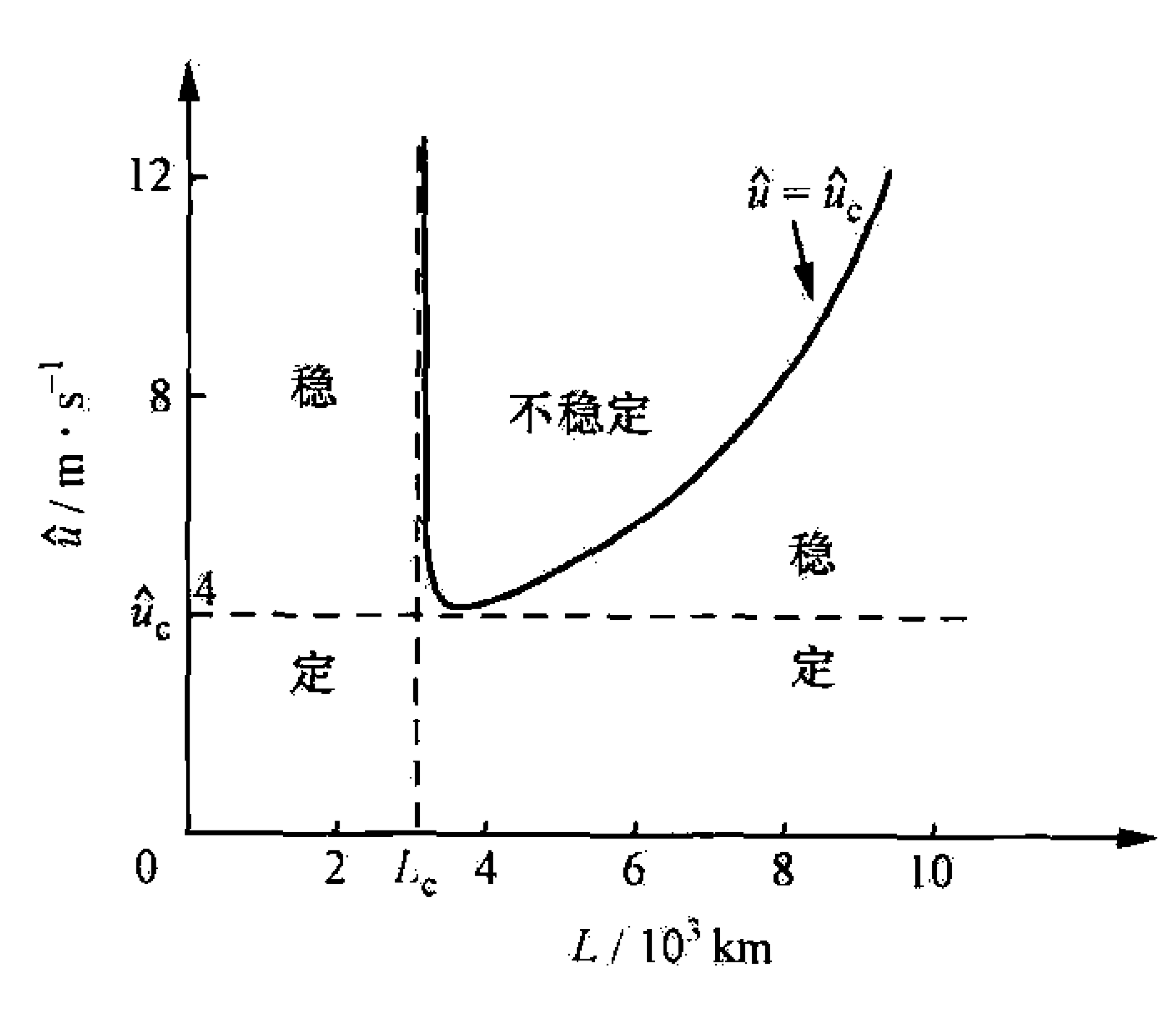


图 11.15 边缘稳定曲线（Ⅱ）

由(11.360)式，令 $\hat{u}=0$（相当于正压状态），求得

$$c_1 = \bar{u} - \frac{\beta_0}{K_h^2}, \quad c_2 = \bar{u} - \frac{\beta_0}{K_h^2 + 2\lambda_0^2}, \tag{11.369}$$

它们分别表征水平无辐散和有辐散的 Rossby 波. 显然，

$$c_2 > c_1. \tag{11.370}$$

而当 $K_h^2 < 2\lambda_0^2$ 和 $\hat{u} \leqslant \hat{u}_c$ 时，波稳定，c 为实数，且不难证明

$$c_1 < c < c_2. \tag{11.371}$$

但当 $\hat{u} = \hat{u}_c$ 以后，波开始出现不稳定，c 为复数，其实部

$$c_r = \bar{u} - \frac{\beta_0(K_h^2 + \lambda_0^2)}{K_h^2(K_h^2 + 2\lambda_0^2)} \equiv c_3 \tag{11.372}$$

就代表不稳定波的移速，显然

$$c_1 < c_3 < c_2. \tag{11.373}$$

图 11.16 c_r 随 $\hat{u}^2$ 的变化

图 11.16 是由(11.360)式表征的 c_r 随 $\hat{u}^2$ 的变化图.

由(11.360)式求得不稳定波的虚部为

$$c_i = \frac{\beta_0 \lambda_0^2}{K_h^2(K_h^2 + 2\lambda_0^2)} \sqrt{\left(\frac{\hat{u}}{\hat{u}_c}\right)^2 - 1}. \tag{11.374}$$

若令

$$\bar{u}_s = 2\hat{u} = \bar{u}_2 - \bar{u}_1, \tag{11.375}$$

并用 $\bar{u}_c$ 表示 $\bar{u}_s$ 的临界值，即

$$\bar{u}_c = 2\hat{u}_c = \frac{2\beta_0\lambda_0^2}{K_h^2 \cdot \sqrt{4\lambda_0^4 - K_h^4}}, \tag{11.376}$$

则当 $\bar{u}_s$ 略大于 $\bar{u}_c$ 时,即当

$$\bar{u}_s = \bar{u}_c + \Delta, \quad 0 < \Delta \ll \bar{u}_c \tag{11.377}$$

时,由(11.374)式求得

$$c_i = \frac{\beta_0\lambda_0^2}{K_h^2(K_h^2 + 2\lambda_0^2)}\sqrt{\left(1 - \frac{\Delta}{\bar{u}_c}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{2}\beta_0\lambda_0^2}{K_h^2(K_h^2 + 2\lambda_0^2)}\sqrt{\frac{\Delta}{\bar{u}_c}} + O(\Delta). \tag{11.378}$$

它说明不稳定斜压 Rossby 波的振幅随时间增长率的量级为 $O(\Delta^{1/2})$.

三、空间稳定度

以上,我们讨论的都是对时间的稳定度问题,在空间上认为是作周期性变化.实际并非一概如此,如认为 x 方向仍呈波动状态,若 y 方向也呈周期性变化,我们称波在空间上是稳定的,否则,就称为空间不稳定.

我们就以斜压两层的方程组(11.351)来说明.但这时设解为

$$(\psi_1', \psi_2') = (\Psi_1(y), \Psi_2(y))e^{ik(x-ct)}. \tag{11.379}$$

将上式代入方程组(11.351),得到

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Psi_1}{dy^2} + a^2\Psi_1 = -\lambda_0^2\Psi_2, \\ \dfrac{d^2\Psi_2}{dy^2} + b^2\Psi_2 = -\lambda_0^2\Psi_1, \end{cases} \tag{11.380}$$

其中

$$a^2 \equiv \frac{\beta_0}{\bar{u}_1 - c} - \lambda_0^2\frac{\bar{u}_2 - c}{\bar{u}_1 - c} - k^2, \quad b^2 \equiv \frac{\beta_0}{\bar{u}_2 - c} - \lambda_0^2\frac{\bar{u}_1 - c}{\bar{u}_2 - c} - k^2. \tag{11.381}$$

从方程组(11.380)看到:λ_0^2 反映高低层间的相互作用.为了反映这种情况,我们设 $a^2 > 0, b^2 > 0$.

方程组(11.380)通过消元可化为

$$\mathscr{L}(\Psi_1, \Psi_2) = 0, \tag{11.382}$$

其中

$$\mathscr{L} \equiv \frac{d^4}{dy^4} + (a^2 + b^2)\frac{d^2}{dy^2} + (a^2b^2 - \lambda_0^4). \tag{11.383}$$

方程(11.382)为双二次线性常系数的微分方程,其特征方程为

$$r^4 + (a^2 + b^2)r^2 + (a^2b^2 - \lambda_0^4) = 0, \tag{11.384}$$

相应的特征根为

$$\begin{cases} r_{1,2}^2 = \dfrac{1}{2}\{-(a^2+b^2) - \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4(a^2b^2-\lambda_0^4)}\} \\ \quad\ = \dfrac{1}{2}\{-(a^2+b^2) - \sqrt{(a^2-b^2)^2 + 4\lambda_0^4}\}, \\ r_{3,4}^2 = \dfrac{1}{2}\{-(a^2+b^2) + \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4(a^2b^2-\lambda_0^4)}\} \\ \quad\ = \dfrac{1}{2}\{-(a^2+b^2) + \sqrt{(a^2-b^2)^2 + 4\lambda_0^4}\}. \end{cases} \tag{11.385}$$

特征根的性质反映了解的性质，从而可以判断空间稳定性．谢义炳教授按如下三种情况进行说明．

1. $a^2b^2-\lambda_0^4=0$

此时，由(11.385)式求得

$$r_1 = \sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{i},\quad r_2 = -\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{i},\quad r_3 = 0,\quad r_4 = 0. \tag{11.386}$$

相应，方程(11.382)的解为

$$\begin{cases} \Psi_1(y) = A_1 + B_1 y + C_1\cos\sqrt{a^2+b^2}\,y + D_1\sin\sqrt{a^2+b^2}\,y, \\ \Psi_2(y) = A_2 + B_2 y + C_2\cos\sqrt{a^2+b^2}\,y + D_2\sin\sqrt{a^2+b^2}\,y, \end{cases} \tag{11.387}$$

其中 $A_1, B_1, C_1, D_1; A_2, B_2, C_2, D_2$ 为任意常数．由(11.387)式可看出，这是一种临界状态，即是说，当边界条件合适，可使 $B_1=B_2=0$，这是空间稳定状态；否则，是空间不稳定状态．

将(11.381)式代入 $a^2b^2-\lambda_0^4=0$，整理后得

$$c = c_\mathrm{r} \pm \sqrt{R}, \tag{11.388}$$

其中

$$c_\mathrm{r} = \bar{u} - \frac{\beta_0(k^2+\lambda_0^2)}{k^2(k^2+2\lambda_0^2)},\quad R = \frac{\beta_0^2\lambda_0^4 - k^4\bar{u}^2(4\lambda_0^2-k^4)}{k^4(k^2+2\lambda_0^2)^2}. \tag{11.389}$$

(11.389)式即是(11.360)式 $l=0$ 的特例．所以，在空间临界状态 $a^2b^2-\lambda_0^4=0$ 下，时间稳定度的判据为

$$R\begin{cases} \geqslant 0, & \text{时间稳定}, \\ < 0, & \text{时间不稳定}. \end{cases} \tag{11.390}$$

2. $a^2b^2-\lambda_0^4>0$

此时，由(11.385)式求得

$$r_{1,2} = \pm l_1\mathrm{i},\quad r_{3,4} = \pm l_2\mathrm{i}, \tag{11.391}$$

其中 l_1, l_2 为正数，且满足

$$\begin{cases} l_1^2 = \dfrac{1}{2}\{(a^2+b^2) + \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4(a^2b^2-\lambda_0^4)}\}, \\ l_2^2 = \dfrac{1}{2}\{(a^2+b^2) - \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4(a^2b^2-\lambda_0^4)}\}. \end{cases} \tag{11.392}$$

相应，方程(11.382)的解为

$$\begin{cases}\Psi_1(y) = A_1\cos l_1 y + B_1\sin l_1 y + C_1\cos l_2 y + D_1\sin l_2 y, \\ \Psi_2(y) = A_2\cos l_1 y + B_2\sin l_1 y + C_2\cos l_2 y + D_2\sin l_2 y,\end{cases} \tag{11.393}$$

显然，这是空间稳定状态.

将(11.381)式代入 $a^2b^2-\lambda_0^4>0$，得到

$$(c-c_r)^2 - R < 0. \tag{11.394}$$

显然 $R>0$ 时不等式成立，c 可以为实数(要求 $|c-c_r|<\sqrt{R}$ 即 $c_r-\sqrt{R}<c<c_r+\sqrt{R}$)，也可以为复数(要求 $c=c_r+\mathrm{i}c_i, c_i\neq 0$)；而当 $R\leqslant 0$ 时，c 只能为复数. 所以，此时再用(11.390)式作为时间稳定度判据已不完全合适. 当然，当 $R\leqslant 0$ 时，时间仍然是不稳定的.

3. $a^2b^2-\lambda_0^4<0$

此时，由(11.385)式求得

$$r_{1,2} = \pm l\mathrm{i}, \quad r_{3,4} = \pm\gamma, \tag{11.395}$$

其中 l,γ 为正数，且满足

$$\begin{cases}l^2 = \dfrac{1}{2}\{(a^2+b^2) + \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4(a^2b^2-\lambda_0^4)}\}, \\ \gamma^2 = \dfrac{1}{2}\{-(a^2+b^2) + \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4(a^2b^2-\lambda_0^4)}\}.\end{cases} \tag{11.396}$$

相应，方程(11.382)的解为

$$\begin{cases}\Psi_1(y) = A_1 e^{\gamma y} + B_1 e^{-\gamma y} + C_1\cos ly + D_1\sin ly, \\ \Psi_2(y) = A_2 e^{\gamma y} + B_2 e^{-\gamma y} + C_2\cos ly + D_2\sin ly.\end{cases} \tag{11.397}$$

显然，这是空间不稳定状态.

此时，$a^2b^2-\lambda_0^4<0$ 化为

$$(c-c_r)^2 - R > 0. \tag{11.398}$$

显然，当 $R\geqslant 0$ 时，上不等式成立，c 只能为实数；当 $R<0$ 时，c 可以是实数，也可以为复数. 同样，(11.390)式作为时间稳定度判据也已不完全合适，但当 $R\geqslant 0$ 时，时间仍然是稳定的.

§11.5 临界层问题

前面，我们举的许多稳定度问题的例子都是假定 $\bar{u}-c\neq 0$，即认为方程无奇点，但实际情况可能存在奇点. 下面，我们就正压 Rossby 波的扰动振幅方程(11.269)在边条件(11.270)下的本征值问题

$$\begin{cases}(\bar{u}(y)-c)\left(\dfrac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}y^2}-k^2\Psi\right)+B\Psi=0,\\ \Psi|_{y=y_1}=0,\quad \Psi|_{y=y_2}=0\end{cases}\tag{11.399}$$

为例来说明，其中

$$B\equiv\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}=\beta_0-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}.\tag{11.400}$$

设在(y_1,y_2)内存在一点 $y=y_c$ 使得

$$\bar{u}(y_c)=c.\tag{11.401}$$

这样，$y=y_c$ 即是方程的一个奇点. 在 $y=y_c$ 的邻域，$\bar{u}(y)-c$ 可近似地表为

$$\bar{u}(y)-c=(\bar{u}(y_c)-c)+\left.\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right|_{y=y_c}\cdot(y-y_c)=\left.\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right|_{y=y_c}\cdot(y-y_c).\tag{11.402}$$

因 $\bar{u}(y)$为实数，若 c 为实数(中性波)，上式可能为零；但若 c 为复数(不稳定波)，则要使 $\bar{u}(y)-c=0$，只有 y_c 是复数，这样，问题就转化为在 y 的复平面内讨论.

若 $y=y_c$ 为 $\bar{u}(y)-c$ 的一阶零点，即

$$\left.\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right|_{y=y_c}\neq 0,$$

这样的点称为临界点，由(11.402)式看到，它也是方程的正则奇点. 在临界点附近的区域称为临界层.

在临界层内讨论本征值问题(11.399)，就是设 $\Psi(y)$为下列正则解的形式：

$$\Psi(y)=\eta^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\eta^k,\quad \eta=y-y_c,\ a_0\neq 0,\tag{11.403}$$

式中 ρ 称为指标.

同时，将 $\bar{u}(y)-c$ 和 $B(y)$也展为 η 的幂级数，即

$$\begin{cases}\bar{u}(y)-c=\bar{u}'(y_c)\eta+\dfrac{1}{2}\bar{u}''(y_c)\eta^2+\cdots,\\ B(y)=B(y_c)+B'(y_c)\eta+\dfrac{1}{2}B''(y_c)\eta^2+\cdots.\end{cases}\tag{11.404}$$

将(11.403)式和(11.404)式一起代入方程，按 η 的幂次排列求得

$$\begin{cases}\bar{u}'(y_c)\rho(\rho-1)a_0=0,\\ \bar{u}'(y_c)\rho(\rho+1)a_1+\left[\dfrac{1}{2}\bar{u}''(y_c)\rho(\rho-1)+B(y_c)\right]a_0=0,\\ \bar{u}'(y_c)(\rho+2)(\rho+1)a_2+\left[\dfrac{1}{2}\bar{u}''(y_c)\rho(\rho+1)+B(y_c)\right]a_1\\ \qquad-[k^2\bar{u}'(y_c)-B'(y_c)]a_0=0,\\ \cdots.\end{cases}\tag{11.405}$$

因 $\bar{u}'(y_c)\neq 0, a_0\neq 0$,则由(11.405)的第一式求得指标方程为

$$\rho(\rho-1)=0. \tag{11.406}$$

取 $\rho=1, a_0=1$,则由(11.405)的第二式求得

$$a_1=-B(y_c)/2\bar{u}'(y_c). \tag{11.407}$$

类似,还可求得 $a_2,\cdots$.

这样,方程的一个正则解便是

$$\Psi_1=\eta-\frac{B(y_c)}{2\bar{u}'(y_c)}\eta^2+\cdots. \tag{11.408}$$

方程的另一个解是下列含 $\ln\eta$ 的正则解:

$$\Psi_2=\frac{B(y_c)}{\bar{u}'(y_c)}\Psi_1\ln\eta+(-1+b_1\eta+b_2\eta^2+\cdots). \tag{11.409}$$

因为 $\eta=y-y_c$,则当 $\eta>0$,即 $y>y_c$ 时,$\ln\eta$ 为实数;但当 $\eta<0$,即 $y<y_c$ 时,$\ln\eta$ 为复数. 此时在(11.409)式中

$$\ln\eta=\ln|\eta|-\mathrm{i}\pi \quad (\eta<0). \tag{11.410}$$

这样,在 $\eta<0$ 时,(11.409)式改写为

$$\Psi_2^*=\frac{B(y_c)}{\bar{u}'(y_c)}\Psi_1(\ln|\eta|-\mathrm{i}\pi)+(-1+b_1\eta+b_2\eta^2+\cdots). \tag{11.411}$$

所以,方程的通解最后写为

$$\Psi=\begin{cases}A\Psi_1+B\Psi_2, & \eta\geqslant 0\ (y\geqslant y_c),\\ A^*\Psi_1+B^*\Psi_2^*, & \eta\leqslant 0\ (y\leqslant y_c),\end{cases} \tag{11.412}$$

其中 A,A^*,B,B^* 为待定常数. 由 $y=y_1$ 和 $y=y_2$ 的边条件和 Ψ 在 $y=y_c$ 的连续性条件,我们定得

$$\begin{cases}B^*=B,\\ A\Psi_1(y_2)=-B\Psi_2(y_2),\\ A^*\Psi_1(y_1)=-B\Psi_2^*(y_1),\end{cases} \tag{11.413}$$

这是 A,A^* 和 B 之间的相互联系. 显然,方程有非零解,A,A^*,B 都不能为零. 这样,对应于(11.410)式,必然会出现 c 为复数的不稳定波解. 曾庆存教授(1986)曾论证:由(11.412)式和(11.413)式所确定的 Ψ 在 $[y_1,y_2]$ 的任何点上都连续,而且 c 为连续谱($\bar{u}_{\min}\leqslant c\leqslant\bar{u}_{\max}$).

关于斜压 Rossby 波的临界层问题可参见本章末习题 12.

§11.6 非线性稳定度

前面讨论稳定度用的都是线性方程. 对于线性的不稳定波,其振幅随时间按指数增长,这种增长是无限制的,不符合实际. 所以,讨论稳定度问题必须考虑非线性

的作用.事实上,线性理论也只在扰动发展的初始阶段才成立,一当扰动发展到有限振幅时,非线性项就不能再忽略了.我们就以分层的斜压模式为例,应用多尺度方法讨论非线性 Rossby 波的稳定度,其控制方程是方程组(11.349).

先将方程组(11.349)无量纲化.水平尺度取为 L,速度尺度取为 U,时间尺度取为 L/U,流函数的尺度取为 LU,再注意无量纲的 Rossby 参数为 $\beta_1=\beta_0 L^2/U$,这样,我们得到方程组(11.349)的无量纲形式为

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_1\dfrac{\partial}{\partial x}\right)q_1'+[\beta_1-\mu_0^2(\bar{u}_2-\bar{u}_1)]\dfrac{\partial\psi_1'}{\partial x}=-\mathrm{J}(\psi_1',q_1'),\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_2\dfrac{\partial}{\partial x}\right)q_2'+[\beta_1+\mu_0^2(\bar{u}_2-\bar{u}_1)]\dfrac{\partial\psi_2'}{\partial x}=-\mathrm{J}(\psi_2',q_2').\end{cases}\tag{11.414}$$

其中所有量都是无量纲量,形式同方程组(11.349),只是 λ_0^2 改为

$$\mu_0^2=\lambda_0^2L^2=f_0^2L^2/c_0^2,\tag{11.415}$$

而

$$q_1'=\nabla_h^2\psi_1'+\mu_0^2(\psi_2'-\psi_1'),\quad q_2'=\nabla_h^2\psi_2'-\mu_0^2(\psi_2'-\psi_1').\tag{11.416}$$

按§11.4 的分析,若

$$\bar{u}_s\equiv\bar{u}_2-\bar{u}_1=\bar{u}_c+\Delta\quad(0<\Delta\ll\bar{u}_s),\tag{11.417}$$

则

$$c_i\propto\Delta^{1/2}.\tag{11.418}$$

它说明波振幅演变的自然时间尺度为 $O(\Delta^{1/2})$,为此,令

$$\varepsilon\equiv\Delta^{1/2}=(\bar{u}_s-\bar{u}_c)^{1/2},\tag{11.419}$$

则相位演变的时间尺度为

$$\tau=t,\tag{11.420}$$

而振幅演变的时间尺度为

$$T=\varepsilon t.\tag{11.421}$$

这样,无量纲的准地转流函数可以表为

$$\psi_j'=\psi_j'(x,y,\tau,T)\quad(j=1,2).\tag{11.422}$$

应用复合函数求导的法则有

$$\frac{\partial\psi_j'}{\partial t}=\frac{\partial\psi_j'}{\partial\tau}+\varepsilon\frac{\partial\psi_j'}{\partial T}\quad(j=1,2).\tag{11.423}$$

注意

$$\bar{u}_2=\bar{u}_1+\bar{u}_s=\bar{u}_1+\bar{u}_c+\Delta=\bar{u}_1+\bar{u}_c+\varepsilon^2,\tag{11.424}$$

则方程组(11.414)化为

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial\tau}+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial T}+\bar{u}_1\dfrac{\partial}{\partial x}\right)q_1'+[\beta_1-\mu_0^2(\bar{u}_c+\varepsilon^2)]\dfrac{\partial\psi_1'}{\partial x}=-\mathrm{J}(\psi_1',q_1'),\\ \left[\dfrac{\partial}{\partial\tau}+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial T}+(\bar{u}_1+\bar{u}_c+\varepsilon^2)\dfrac{\partial}{\partial x}\right]q_2'+[\beta_1+\mu_0^2(\bar{u}_c+\varepsilon^2)]\dfrac{\partial\psi_2'}{\partial x}=-\mathrm{J}(\psi_2',q_2').\end{cases}\tag{11.425}$$

将 ψ_j', q_j' $(j=1,2)$展为 ε 的幂级数，即

$$\begin{cases}\psi_j' = \varepsilon\psi_j^{(1)} + \varepsilon^2\psi_j^{(2)} + \cdots,\\ q_j' = \varepsilon q_j^{(1)} + \varepsilon^2 q_j^{(2)} + \cdots,\end{cases} \tag{11.426}$$

将(11.426)式代入(11.425)式，仅保留 $O(\varepsilon)$的量，得到方程组(11.391)的一级近似为

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial\tau} + \bar{u}_1\dfrac{\partial}{\partial x}\right)q_1^{(1)} + (\beta_1 - \mu_0^2\bar{u}_c)\dfrac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial x} = 0,\\ \left[\dfrac{\partial}{\partial\tau} + (\bar{u}_1 + \bar{u}_c)\dfrac{\partial}{\partial x}\right]q_2^{(1)} + (\beta_1 + \mu_0^2\bar{u}_c)\dfrac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial x} = 0.\end{cases} \tag{11.427}$$

令方程组(11.427)的解为

$$\begin{cases}\psi_1^{(1)} = A_1^{(1)}\mathrm{e}^{ik(x-c\tau)}\sin ly,\\ \psi_2^{(1)} = A_2^{(1)}\mathrm{e}^{ik(x-c\tau)}\sin ly,\end{cases} \tag{11.428}$$

令其代入方程组(11.427)，得到

$$\begin{cases}I_1A_1^{(1)} + I_2A_2^{(1)} = 0,\\ J_1A_1^{(1)} + J_2A_2^{(1)} = 0,\end{cases} \tag{11.429}$$

其中

$$\begin{cases}I_1 = (K_h^2 + \mu_0^2)(\bar{u}_1 - c) - \beta_1 + \mu_0^2\bar{u}_c, \quad I_2 = -\mu_0^2(\bar{u}_1 - c),\\ J_1 = -\mu_0^2(\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c), \quad J_2 = (K_h^2 + \mu_0^2)(\bar{u}_1 + \bar{u}_2 - c) - \beta_1 - \mu_0^2\bar{u}_c.\end{cases} \tag{11.430}$$

$A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$ 有非零解，则必有系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} I_1 & I_2\\ J_1 & J_2\end{vmatrix} = I_1J_2 - I_2J_1 = 0. \tag{11.431}$$

将(11.430)式代入(11.431)式，得到

$$K_h^2(K_h^2 + 2\mu_0^2)\left\{(\bar{u}_1 - c)^2 + \left[\bar{u}_c - \frac{2(K_h^2 + \mu_0^2)\beta_1}{K_h^2(K_h^2 + 2\mu_0^2)}\right](\bar{u}_1 - c) + \frac{[K_h^2\mu_0^2\bar{u}_c^2 - (K_h^2 + \mu_0^2)\bar{u}_c\beta_1 + \beta_1^2]}{K_h^2(K_h^2 + 2\mu_0^2)}\right\} = 0. \tag{11.432}$$

由上式求得

$$c = \bar{u}_1 + \frac{\bar{u}}{2} - \frac{\beta_0(K_h^2 + \mu_0^2)}{K_h^2(K_h^2 + 2\mu_0^2)} \pm \sqrt{R}, \tag{11.433}$$

其中

$$R = \frac{K_h^2 - \mu_0^2}{4(K_h^2 + 2\mu_0^2)}\left[\bar{u}_c^2 - \frac{4\beta_1^2\mu_0^2}{K_h^4(4\mu_0^4 - K_h^4)}\right]. \tag{11.434}$$

因为 $\bar{u}_c$ 是风速垂直切变 $\bar{u}_2 - \bar{u}_1$ 的临界值，由在 § 11.4 中的分析可知，它是由

$R=0$ 求得的，即

$$\bar{u}_c = 2\beta_1\mu_0^2/K_h^2\sqrt{4\mu_0^4-K_h^4}. \tag{11.435}$$

这样，(11.433)式化为

$$c=\bar{u}_1+\frac{\bar{u}_c}{2}-\frac{\beta_1(K_h^2+\mu_0^2)}{K_h^2(K_h^2+2\mu_0^2)}, \tag{11.436}$$

这是实数. 所以，方程组(11.425)的第一级近似(线性解)说明上下两层扰动的相位相同，但它不能求出扰动的振幅，而可以获得两层的扰动振幅比为

$$\begin{cases}\gamma\equiv\dfrac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}=-\dfrac{I_2}{I_1}=\mu_0^2\Big/\left(K_h^2+\mu_0^2-\dfrac{\beta_1-\mu_0^2\bar{u}_c}{\bar{u}_1-c}\right),\\ \gamma\equiv\dfrac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}=-\dfrac{J_2}{J_1}=1+\dfrac{K_h^2}{\mu_0^2}-\dfrac{\beta_1+\mu_0^2\bar{u}_c}{\mu_0^2(K_h^2+2\mu_0^2)}.\end{cases} \tag{11.437}$$

因而

$$\psi_1^{(1)}=\gamma\psi_2^{(1)}, \tag{11.438}$$

而且，由(11.416)式不难求得

$$q_1^{(1)}=-\frac{\beta_1-\mu_0^2\bar{u}_c}{\bar{u}_1-c}\psi_1^{(1)},\quad q_2^{(1)}=-\frac{\beta_1+\mu_0^2\bar{u}_c}{\bar{u}_1+\bar{u}_c-c}\psi_2^{(1)}. \tag{11.439}$$

由上式有

$$\mathrm{J}(\psi_1^{(1)},q_1^{(1)})=0,\quad \mathrm{J}(\psi_2^{(1)},q_2^{(1)})=0. \tag{11.440}$$

方程组(11.425)的二级近似($O(\varepsilon^2)$)为

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial\tau}+\bar{u}_1\dfrac{\partial}{\partial x}\right)q_1^{(2)}+(\beta_1-\mu_0^2\bar{u}_c)\dfrac{\partial\psi_1^{(2)}}{\partial x}=-\dfrac{\partial q_1^{(1)}}{\partial T},\\ \left[\dfrac{\partial}{\partial\tau}+(\bar{u}_1+\bar{u}_c)\dfrac{\partial}{\partial x}\right]q_2^{(2)}+(\beta_1+\mu_0^2\bar{u}_c)\dfrac{\partial\psi_2^{(2)}}{\partial x}=-\dfrac{\partial q_2^{(1)}}{\partial T},\end{cases} \tag{11.441}$$

这是包含非齐次项的方程组. 为此设它的解为

$$\begin{cases}\psi_1^{(2)}=\Psi_1^{(2)}(y,T)+A_1^{(2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-c\tau)}\sin ly,\\ \psi_2^{(2)}=\Psi_2^{(2)}(y,T)+A_2^{(2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-c\tau)}\sin ly,\end{cases} \tag{11.442}$$

其中 $\Psi_1^{(2)}(y,T)$ 和 $\Psi_2^{(2)}(y,T)$ 为方程组(11.441)的齐次方程的解.

将(11.442)式代入方程组(11.441)，得到

$$\begin{cases}I_1A_1^{(2)}+I_2A_2^{(2)}=\dfrac{\mathrm{i}}{k}\left[(K_h^2+\mu_0^2)\dfrac{\mathrm{d}A_1^{(1)}}{\mathrm{d}T}-\mu_0^2\dfrac{\mathrm{d}A_2^{(1)}}{\mathrm{d}T}\right],\\ J_1A_1^{(2)}+J_2A_2^{(2)}=\dfrac{\mathrm{i}}{k}\left[(K_h^2+\mu_0^2)\dfrac{\mathrm{d}A_2^{(1)}}{\mathrm{d}T}-\mu_0^2\dfrac{\mathrm{d}A_1^{(1)}}{\mathrm{d}T}\right].\end{cases} \tag{11.443}$$

将(11.443)的第一式除以($-I_1$)，第二式除以($-J_1$)，并利用(11.438)式和(11.439)式，得到

$$\begin{cases}\gamma A_2^{(2)} - A_1^{(2)} = -\dfrac{\mathrm{i}(\beta_1 - \mu_0^2 \bar{u}_c)}{kI_1(\bar{u}_1 - c)} \dfrac{\mathrm{d}A_1^{(1)}}{\mathrm{d}T} = -\dfrac{\mathrm{i}\gamma^2(\beta_1 - \mu_0^2 \bar{u}_c)}{k\mu_0^2(\bar{u}_1 - c)^2} \dfrac{\mathrm{d}A_2^{(1)}}{\mathrm{d}T}, \\ \gamma A_2^{(2)} - A_1^{(2)} = -\dfrac{\mathrm{i}(\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c)}{kJ_1(\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c)} \dfrac{\mathrm{d}A_2^{(1)}}{\mathrm{d}T} = \dfrac{\mathrm{i}(\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c)}{k\mu_0^2(\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c)^2} \dfrac{\mathrm{d}A_2^{(1)}}{\mathrm{d}T}.\end{cases}$$

(11.444)

利用(11.435),(11.436)和(11.437)式,不难证明,(11.444)的两式右端完全相同,因而,由(11.444)式求得

$$A_1^{(2)} = \gamma A_2^{(2)} - \frac{\mathrm{i}(\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c)}{k\mu_0^2(\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c)^2} \frac{\mathrm{d}A_2^{(1)}}{\mathrm{d}T}. \tag{11.445}$$

上式表明:当 $\psi_2^{(1)} \neq 0$ 时,方程组(11.425)的第二级近似反映出上下层扰动振幅存在相位差,而且把(11.445)式与(11.437)式比较可知,第二级近似相对第一级近似多了一个修正项.为了方便,我们就把 $A_2^{(1)}$ 视为上层扰动的振幅,这样可令

$$A_2^{(2)} = 0, \quad A_2^{(1)} = A(T), \quad A_1^{(1)} = \gamma A(T). \tag{11.446}$$

因而,(11.445)式化为

$$A_1^{(2)} = -\frac{\mathrm{i}(\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c)}{k\mu_0^2(\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c)^2} \frac{\mathrm{d}A_2^{(1)}}{\mathrm{d}T} = -\frac{\mathrm{i}(\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c)}{k\mu_0^2(\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c)^2} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T}. \tag{11.447}$$

而(11.442)式化为

$$\begin{cases}\psi_1^{(2)} = \Psi_1^{(2)}(y,T) - \dfrac{\mathrm{i}(\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c)}{k\mu_0^2(\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c)^2} \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ct)} \sin ly, \\ \psi_2^{(2)} = \Psi_2^{(2)}(y,T).\end{cases} \tag{11.448}$$

而且由(11.426)式不难求得

$$\begin{cases}q_1^{(2)} = \dfrac{\mathrm{i}(K_h^2 + \mu_0^2)(\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c)}{k\mu_0^2(\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c)^2} \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ct)} \sin ly + \left[\dfrac{\partial^2 \Psi_1^{(2)}}{\partial y^2} + \mu_0^2(\Psi_2^{(2)} - \Psi_1^{(2)})\right], \\ q_2^{(2)} = -\dfrac{\mathrm{i}(\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c)}{k(\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c)^2} \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ct)} \sin ly + \left[\dfrac{\partial^2 \Psi_2^{(2)}}{\partial y^2} - \mu_0^2(\Psi_2^{(2)} - \Psi_1^{(2)})\right].\end{cases}$$

(11.449)

此时,(11.442)式化为

$$\begin{cases}\psi_1^{(2)} = \Psi_1^{(2)}(y,T) - \dfrac{\mathrm{i}(\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c)}{k\mu_0^2(\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c)^2} \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ct)} \sin ly, \\ \psi_2^{(2)} = \Psi_2^{(2)}(y,T).\end{cases} \tag{11.450}$$

而(11.428)式和(11.439)式分别化为

$$\begin{cases}\psi_1^{(1)} = \gamma A \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ct)} \sin ly, \\ \psi_2^{(1)} = A \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ct)} \sin ly;\end{cases} \tag{11.451}$$

$$\begin{cases} q_1^{(1)} = -\dfrac{\beta_1 - \mu_0^2 \bar{u}_c}{\bar{u}_1 - c} \gamma A \mathrm{e}^{ik(x-cr)} \sin ly, \\ q_2^{(1)} = -\dfrac{\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c}{\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c} A \mathrm{e}^{ik(x-cr)} \sin ly. \end{cases} \tag{11.452}$$

综合(11.451)式和(11.448)式有

$$\begin{cases} \psi_1' = \varepsilon \left\{ \gamma A - \dfrac{\mathrm{i}\varepsilon(\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c)}{k\mu_0^2 (\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c)^2} \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T} + O(\varepsilon^2) \right\} \mathrm{e}^{ik(x-cr)} \sin ly + \varepsilon^2 \Psi_1^{(2)}(y,T), \\ \psi_2' = \varepsilon \{ A + O(\varepsilon^2) \} \mathrm{e}^{ik(x-cr)} \sin ly + \varepsilon^2 \Psi_2^{(2)}(y,T); \end{cases} \tag{11.453}$$

综合(11.452)式和(11.449)式有

$$\begin{cases} q_1' = \varepsilon \left\{ -\dfrac{\beta_1 - \mu_0^2 \bar{u}_c}{\bar{u}_1 - c} \gamma A + \dfrac{\mathrm{i}\varepsilon (K_h^2 + \mu_0^2)(\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c)}{k\mu_0^2 (\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c)^2} \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T} + O(\varepsilon^2) \right\} \mathrm{e}^{ik(x-cr)} \sin ly \\ \qquad + \varepsilon^2 \left\{ \dfrac{\partial^2 \Psi_1^{(2)}}{\partial y^2} + \mu_0^2 (\Psi_2^{(2)} - \Psi_1^{(2)}) \right\}, \\ q_2' = \varepsilon \left\{ -\dfrac{\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c}{\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c} A - \dfrac{\mathrm{i}\varepsilon (\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c)}{k(\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c)^2} \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T} + O(\varepsilon^2) \right\} \mathrm{e}^{ik(x-cr)} \sin ly \\ \qquad + \varepsilon^2 \left\{ \dfrac{\partial^2 \Psi_2^{(2)}}{\partial y^2} - \mu_0^2 (\Psi_2^{(2)} - \Psi_1^{(2)}) \right\}. \end{cases} \tag{11.454}$$

为了确定 $A(T)$ 和 $\Psi_j^{(2)}(y,T),(j=1,2)$，必须考虑方程组(11.425)的三级近似. 方程组(11.425)的三级近似($O(\varepsilon^3)$)为

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_1 \dfrac{\partial}{\partial x}\right) q_1^{(3)} + (\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c) \dfrac{\partial \psi_1^{(3)}}{\partial x} = -\dfrac{\partial q_1^{(2)}}{\partial T} + \mu_0^2 \dfrac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial x} - \mathrm{J}(\psi_1^{(1)}, q_1^{(2)}) - \mathrm{J}(\psi_1^{(2)}, q_1^{(1)}), \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial t} + (\bar{u}_1 + \bar{u}_c) \dfrac{\partial}{\partial x}\right] q_2^{(3)} + (\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c) \dfrac{\partial \psi_2^{(3)}}{\partial x} = -\dfrac{\partial q_2^{(2)}}{\partial T} - \mu_0^2 \dfrac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial x} - \mathrm{J}(\psi_2^{(1)}, q_2^{(2)}) - \mathrm{J}(\psi_2^{(2)}, q_2^{(1)}). \end{cases} \tag{11.455}$$

方程组(11.455)的右端用(11.448)—(11.452)式代入，其中与 x,τ 无关的项分别为

$$\begin{cases} F_1(y,T) = -\dfrac{\partial}{\partial T}\left[\dfrac{\partial^2 \Psi_1^{(2)}}{\partial y^2} + \mu_0^2 (\Psi_2^{(2)} - \Psi_1^{(2)})\right] - \dfrac{\mathrm{d}|A|^2}{\mathrm{d}T} \cdot \dfrac{\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c}{4(\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c)^2} l \sin 2ly, \\ F_2(y,T) = -\dfrac{\partial}{\partial T}\left[\dfrac{\partial^2 \Psi_2^{(2)}}{\partial y^2} - \mu_0^2 (\Psi_2^{(2)} - \Psi_1^{(2)})\right] + \dfrac{\mathrm{d}|A|^2}{\mathrm{d}T} \cdot \dfrac{\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c}{4(\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c)^2} l \sin 2ly. \end{cases} \tag{11.456}$$

从方程组(11.455)知，必须

$$F_1(y,T) = 0, \quad F_2(y,T) = 0, \tag{11.457}$$

否则，$\psi_1^{(3)}$，$\psi_2^{(3)}$ 将随 x,τ 线性增大，从而破坏摄动法.

将(11.456)式代入(11.457)式，得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial T}\left[\dfrac{\partial^2\Psi_1^{(2)}}{\partial y^2}+\mu_0^2(\Psi_2^{(2)}-\Psi_1^{(2)})\right]=-\dfrac{\mathrm{d}\mid A\mid^2}{\mathrm{d}T}\cdot\dfrac{\beta_1+\mu_0^2\bar{u}_c}{4(\bar{u}_1+\bar{u}_c-c)^2}l\sin 2ly,\\ \dfrac{\partial}{\partial T}\left[\dfrac{\partial^2\Psi_2^{(2)}}{\partial y^2}-\mu_0^2(\Psi_2^{(2)}-\Psi_1^{(2)})\right]=\dfrac{\mathrm{d}\mid A\mid^2}{\mathrm{d}T}\cdot\dfrac{\beta_1+\mu_0^2\bar{u}_c}{4(\bar{u}_1+\bar{u}_c-c)^2}l\sin 2ly.\end{cases}\tag{11.458}$$

将(11.458)的两式相加，得到

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\Psi_1^{(2)}+\Psi_2^{(2)})\right]=0.\tag{11.459}$$

上式有一特解

$$\Psi_1^{(2)}=-\Psi_2^{(2)}.\tag{11.460}$$

将上式代入(11.458)的第二式，得

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{\partial^2\Psi_2^{(2)}}{\partial y^2}-2\mu_0^2\Psi_2^{(2)}\right]=\frac{\mathrm{d}\mid A\mid^2}{\mathrm{d}T}\cdot\frac{\beta_1+\mu_0^2\bar{u}_c}{4(\bar{u}_1+\bar{u}_c-c)^2}l\sin 2ly.\tag{11.461}$$

因而

$$\frac{\partial^2\Psi_2^{(2)}}{\partial y^2}-2\mu_0^2\Psi_2^{(2)}=\frac{(\beta_1+\mu_0^2\bar{u}_c)(\mid A\mid^2-\mid A(0)\mid^2)}{4(\bar{u}_1+\bar{u}_c-c)^2}l\sin 2ly,\tag{11.462}$$

其中 $A(0)$是 $A(T)$的初值. 若取下列边条件

$$\left.\frac{\partial^2\Psi_2^{(2)}}{\partial y\partial T}\right|_{y=0,1}=0,\tag{11.463}$$

它相当于纬向气流在边界定常.

方程(11.462)在边条件(11.463)下的解为

$$\begin{aligned}\Psi_2^{(2)}=-\Psi_1^{(2)}=&-\frac{(\beta_1+\mu_0^2\bar{u}_c)l[\mid A\mid^2-\mid A(0)\mid^2]}{8(\mu_0^2+2l^2)(\bar{u}_1+\bar{u}_c-c)^2}\\&\cdot\left\{\sin 2ly-\frac{\sqrt{2}l}{\mu_0}\frac{\sinh\sqrt{2}\mu_0(y-1/2)}{\cosh(\mu_0/\sqrt{2})}\right\}.\end{aligned}\tag{11.464}$$

有了上述分析，我们设方程组(11.455)的解为

$$\begin{cases}\psi_1^{(3)}=A_1^{(3)}\mathrm{e}^{ik(x-c\tau)}\sin ly,\\ \psi_2^{(3)}=A_2^{(3)}\mathrm{e}^{ik(x-c\tau)}\sin ly.\end{cases}\tag{11.465}$$

将其代入方程组(11.455)，得到

$$\begin{cases}I_1A_1^{(3)}+I_2A_2^{(3)}=-\dfrac{\mathrm{i}(K_h^2+\mu_0^2)(\beta_1+\mu_0^2\bar{u}_c)}{k\mu_0^2(\bar{u}_1+\bar{u}_c-c)^2}\dfrac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}T^2}+\mathrm{i}k\mu_0^2\gamma A+G_1,\\ J_1A_1^{(3)}+J_2A_2^{(3)}=\dfrac{\mathrm{i}(\beta_1+\mu_0^2\bar{u}_c)}{k(\bar{u}_1+\bar{u}_c-c)^2}\dfrac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}T^2}-\mathrm{i}k\mu_0^2A+G_2,\end{cases}\tag{11.466}$$

其中

$$\begin{cases} G_1 = \dfrac{1}{e^{ik(x-ct)}\sin ly}\left\{-\dfrac{\partial}{\partial T}\left[\dfrac{\partial^2 \Psi_1^{(2)}}{\partial y^2} + \mu_0^2(\Psi_2^{(2)} - \Psi_1^{(2)})\right] - J(\psi_1^{(1)}, q_1^{(2)}) - J(\psi_1^{(2)}, q_1^{(1)})\right\}, \\ G_2 = \dfrac{1}{e^{ik(x-ct)}\sin ly}\left\{-\dfrac{\partial}{\partial T}\left[\dfrac{\partial^2 \Psi_2^{(2)}}{\partial y^2} - \mu_0^2(\Psi_2^{(2)} - \Psi_1^{(2)})\right] - J(\psi_2^{(1)}, q_2^{(2)}) - J(\psi_2^{(2)}, q_2^{(1)})\right\}. \end{cases}$$

(11.467)

将(11.466)的第一式除以$(-I_1)$，第二式除以$(-J_1)$，得到

$$\begin{cases} \gamma A_2^{(3)} - A_1^{(3)} = \dfrac{1}{I_1}\left\{\dfrac{i(K_h^2 + \mu_0^2)(\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c)}{k\mu_0^2(\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c)^2}\dfrac{d^2 A}{dT^2} - ik\mu_0^2 \gamma A - G_1\right\}, \\ \gamma A_2^{(3)} - A_1^{(3)} = -\dfrac{1}{J_1}\left\{\dfrac{i(\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c)}{k(\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c)^2}\dfrac{d^2 A}{dT^2} - ik\mu_0^2 A + G_2\right\}. \end{cases}$$

(11.468)

因(11.468)的两式左端相等，所以其右端也应相等. 这样，经过一系列运算，得到一个关于扰动振幅 A 的下列方程：

$$\frac{d^2 A}{dT^2} - k^2 c_0^2 A = -N_0 A[|A|^2 - |A(0)|^2], \tag{11.469}$$

其中

$$\begin{cases} c_0^2 = \dfrac{2\beta_1^2 \mu_0^2}{K_h^4 (K_h^2 + 2\mu_0^2)^2 \bar{u}_c}, \\ N_0 = \dfrac{k^2 l^2 (\beta_1 + \mu_0^2 \bar{u}_c)}{8\mu_0^2 (K_h^2 + 2\mu_0^2)(2l^2 + \mu_0^2)(\bar{u}_1 + \bar{u}_c - c)^2} \\ \qquad \cdot \left\{2l^2(2K_h^2 - \mu_0^2) + (2\mu_0^2 - K_h^2)\left[K_h^2 + \dfrac{8l^2}{2l^2 + \mu_0^2}\dfrac{\sqrt{2}\tanh\sqrt{2}\mu_0}{\mu_0}\right]\right\}. \end{cases}$$

(11.470)

将方程(11.469)右端忽略，得到

$$\frac{d^2 A}{dT^2} - k^2 c_0^2 A = 0. \tag{11.471}$$

由此求得

$$A = A(0)e^{kc_0 T} = A(0)e^{kc_0 \varepsilon t}, \tag{11.472}$$

这是线性理论的结果. 所以，正是由于方程(11.469)右端项的影响，也就是非线性的作用，使得扰动不能无限制地增长.

在方程(11.469)中，令

$$A = R(T)e^{i\theta(T)}, \tag{11.473}$$

式中 $R(T)$ 表 A 的模，$\theta(T)$ 为 A 的幅角，则方程(11.469)的实部和虚部分别为

$$\frac{d^2 R}{dT^2} - R\left(\frac{d\theta}{dT}\right)^2 = k^2 c_0^2 R - N_0 R[R^2 - R^2(0)]; \tag{11.474}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(R^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}T}\right)=0, \tag{11.475}$$

方程(11.474)中 $R(0)$为 R 的初值. 由方程(11.475)得到

$$R^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}T}=L=\text{常数}. \tag{11.476}$$

将上式代入到方程(11.474),得到

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}T^2}=k^2c_0^2R-N_0R[R^2-R^2(0)]+\frac{L^2}{R^3}. \tag{11.477}$$

再将上式乘以$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}$,并对 T 积分一次得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}\right)^2=(k^2c_0^2+N_0R_0^2)R^2-\frac{N_0}{2}R^4-\frac{L^2}{R^2}+2E, \tag{11.478}$$

其中 E 为积分常数,它完全由初值决定,即

$$2E=\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}\right)_0^2-(k^2c_0^2+N_0R_0^2)R_0^2+\frac{N_0}{2}R_0^4+\frac{L^2}{R_0^2}. \tag{11.479}$$

方程(11.478)的右端,在适当选择参数的情况下,可以化为 R 的四次多项式,这样,方程(11.478)化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}\right)^2=\frac{N_0}{2}(R_M^2-R^2)(R^2-R_m^2), \tag{11.480}$$

其中 R_M,R_m 分别是 R 的最大值和最小值.

对非线性常微分方程(11.480),作变换

$$Y=\frac{R}{R_M},\quad X=\sqrt{\frac{N_0}{2}}R_MT, \tag{11.481}$$

则化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}\right)^2=(1-Y^2)(Y^2-m'^2), \tag{11.482}$$

其中

$$m'^2=\left(\frac{R_m}{R_M}\right)^2,\quad m^2=1-\left(\frac{R_m}{R_M}\right)^2, \tag{11.483}$$

m 和 m'分别称为模数和余模数.

方程(11.482)的解(参见(8.299)的第三式)为

$$Y=\mathrm{dn}(X-X_0), \tag{11.484}$$

其中 dn( )是第三类 Jacobi 椭圆函数,X_0 是常数.

将(11.481)式代入(11.484)式,得到

$$R(T)=R_M\mathrm{dn}\left[\sqrt{\frac{N_0}{2}}R_M(T-T_0)\right], \tag{11.485}$$

其中 T_0 是常数. 由上式知,当 $T=T_0$ 时,$R=R_{max}$;当 $T=0$ 时,

$$R_0 = R(0) = R_M \mathrm{dn}\left(\sqrt{\frac{N_0}{2}} R_M T_0\right).$$

$R(T)$求得后，代入方程(11.476)以求得 $\theta(T)$，从而最后确定了 $A(T)$.(11.485)式的图像见图 11.17.它表明扰动振幅随时间作周期变化，其周期是 $2\mathrm{K}(m)$，其中

$$\mathrm{K}(m) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}} \mathrm{d}x \tag{11.486}$$

为第一类 Legendre 完全椭圆积分.扰动振幅之所以不能无限增长就是因为非线性作用所致.

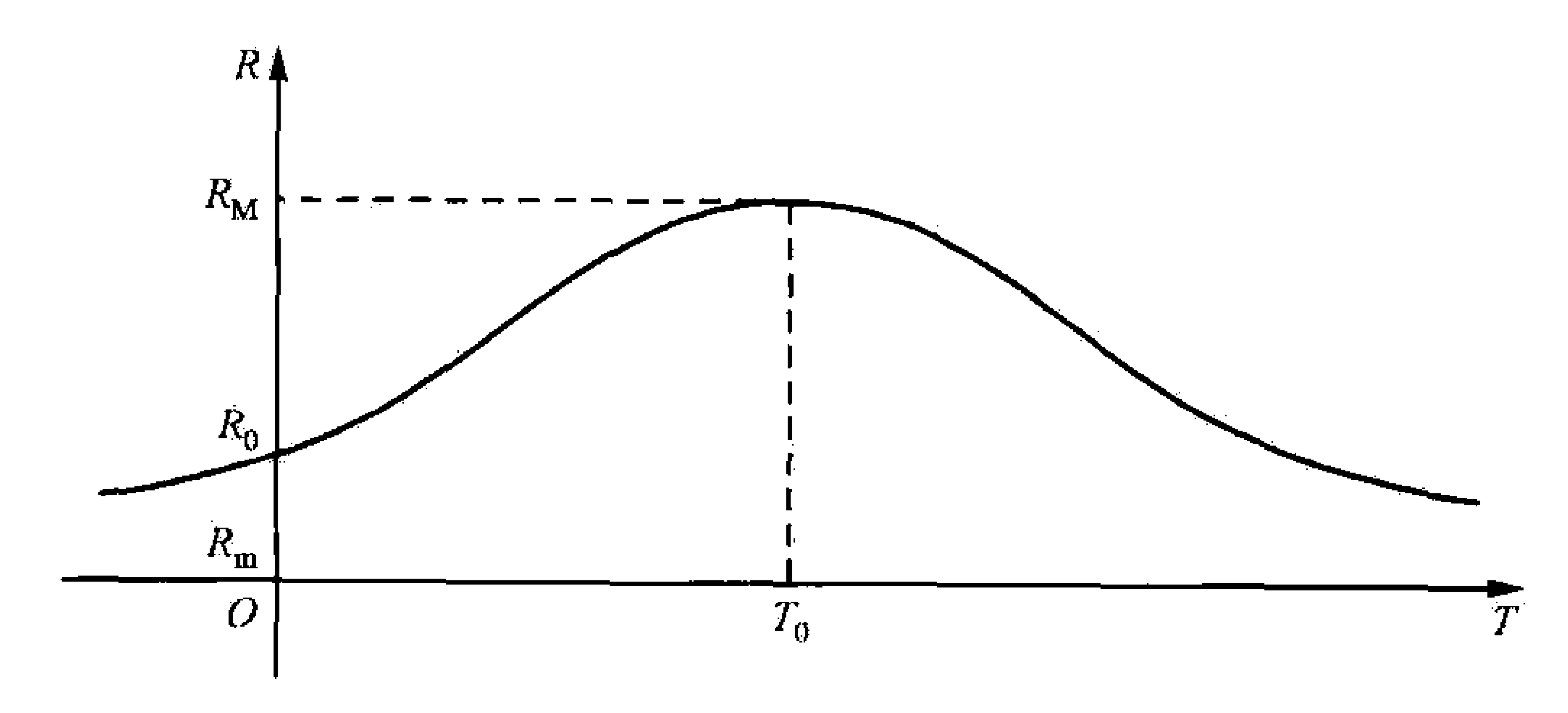


图 11.17 非线性 Rossby 波振幅的周期性变化

§11.7 常微分方程的稳定性理论

在§11.1 中我们知道，稳定性是研究扰动对原有状态的影响，原有的那种运动状态称为基本流动或叫平衡态.如果扰动随时间衰减，则平衡态是稳定的，否则，如果扰动随时间增长，平衡态是不稳定的.

为了证明它，我们以二阶常微分方程

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \tag{11.487}$$

为例，其中

$$\dot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad \ddot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}. \tag{11.488}$$

若 x 表质点的位移，$\dot{x}$，$\ddot{x}$ 就分别是质点的速度和加速度，$f(x, \dot{x})$就是作用在单位质量质点上的力.显然，x 和 $\dot{x}$ 刻画了系统(11.487)在任一时刻的状态，称之为相.若令

$$y = \dot{x}, \tag{11.489}$$

则(11.487)化为下列常微分方程

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = f(x,y). \end{cases} \tag{11.490}$$

这样，在(x,y)平面上的任一点(x,y)就表征了某时刻质点的位置和速度. 因此，(x,y)平面称为相平面.

方程组(11.490)的解$x(t)$，$y(t)$在相平面上画了一条曲线，它定性地描述了系统状态在全部运动时间内的变化，因而曲线为质点的轨迹，称为轨线. 在轨线上常用箭头表示时间增加的方向. 所以，轨线的形态就表征了系统状态的演化.

方程组(11.490)更一般的形式为

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,y), \\ \dot{y} = G(x,y). \end{cases} \tag{11.491}$$

这里F和G不明显地含时间t，则称方程组(11.491)为自治系统(autonomous system)或 Poincaré 系统；否则，若F和G明显地与时间t有关，则方程组称为非自治系统(non-autonomous system)或 Lyapunov 系统.

在物理上，若质点的速度$\dot{x}$和加速度$\ddot{x}=\dot{y}$都为零，则表示质点处于静止状态. 因此，使得方程组(11.491)右端为零的点，即满足

$$\begin{cases} F(x_0,y_0) = 0, \\ G(x_0,y_0) = 0 \end{cases} \tag{11.492}$$

的点(x_0,y_0)称为平衡点或奇点. 方程组(11.456)的平衡点满足

$$y_0 = 0, \quad f(x_0,0) = 0. \tag{11.493}$$

如果我们把方程组(11.491)中的x和y看成是二维速度场$\mathbf{V}_h$的两个分量u和v，那么，自治系统(11.491)就表征运动方程组，平衡点方程(11.492)就表征定常的基本流场，相当于前述的$\bar{u}$.

在平衡点处，方程组(11.491)的解为

$$x = x_0, \quad y = y_0. \tag{11.494}$$

这是常数解，因而不能定出一条随时间变化的轨线，即平衡点是没有轨线经过的. 因为物理上运动的单值性，所以，除平衡点外，通过相平面上的第一点只能有一条轨线，即轨线不能相交.

既然，物理系统中的基本流动或平衡态相当于系统(11.491)的奇点或平衡点，因此可看成是未被扰动的状态. 如果给系统以扰动使其离开平衡状态，则点开始在相平面上运动. 因此，研究平衡态的稳定性就代表系统的稳定性.

设系统(11.491)的初条件为

$$x\,|_{t=0} = x(0), \quad y\,|_{t=0} = y(0); \tag{11.495}$$

又假定对于平衡态(x_0,y_0)的扰动就是在$t=0$时发生的. 若对任意给定的$\varepsilon>0$，可以找到一个正数δ，使得当

$$|x(0)-x_0|<\delta,\quad |y(0)-y_0|<\delta \tag{11.496}$$

时，对所有 $t>0$ 都有

$$|x(t)-x_0|<\varepsilon,\quad |y(t)-y_0|<\varepsilon, \tag{11.497}$$

则称平衡态是稳定的. 否则就是不稳定的. 特别地，若平衡态是稳定的，而且

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)-x_0|\to 0,\quad \lim_{t\to\infty}|y(t)-y_0|\to 0, \tag{11.498}$$

则称平衡态是渐近稳定的(asymptotically stable). 按上述方式定义的稳定性称为 Lyapunov 意义下的稳定性. 从上述定义看出，判断稳定性与否，实质上就是求解 $x(t)$和 $y(t)$. 下面，我们先讨论线性系统，然后讨论非线性系统.

一、线性系统

我们假定平衡点就在原点(0,0). 若平衡点在(x_0,y_0)，则可作变换

$$x^*=x-x_0,\quad y^*=y-y_0. \tag{11.499}$$

这样，关于 x^* 和 y^* 的方程组的平衡点就在$(x^*,y^*)=(0,0)$了. 二维线性自治系统的微分方程组为

$$\begin{cases}\dot{x}=ax+by,\\ \dot{y}=cx+dy,\end{cases} \tag{11.500}$$

其中 a,b,c,d 为实的常数. 显然，(11.466)的平衡点为

$$(x,y)=(0,0). \tag{11.501}$$

现在我们来讨论它的稳定性问题.

设方程组(11.500)的非零特解为

$$x=re^{\lambda t},\quad y=se^{\lambda t}, \tag{11.502}$$

r,s 是两个相关的常数，λ 称为特征值. 若 λ 的实部为正，即 $\mathrm{Re}\lambda>0$，则平衡点就是不稳定的.

为了确定 λ，我们把(11.502)式代入方程组(11.500)，得到

$$\begin{cases}(a-\lambda)r+bs=0,\\ cr+(d-\lambda)s=0,\end{cases} \tag{11.503}$$

r,s 有非零解必须而且只有

$$\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{11.504}$$

或

$$\lambda^2+p\lambda+q=0. \tag{11.505}$$

它称为方程组(11.500)的特征方程，其中

$$p=-(a+d),\quad q=ad-bc. \tag{11.506}$$

事实上，方程组(11.500)也可以通过消元化为下列二阶微分方程

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0. \tag{11.507}$$

所以,方程(11.505)也是方程(11.507)的特征方程.

由方程(11.505)求得其两个根是

$$\lambda_1 = (-p+\sqrt{\Delta})/2, \quad \lambda_2 = (-p-\sqrt{\Delta})/2, \tag{11.508}$$

其中

$$\Delta \equiv p^2 - 4q. \tag{11.509}$$

下面,我们分几种情况来讨论.

1. $p=0,\Delta<0$

此时必然有 $q>0$. 由(11.507)式知,此时

$$\lambda_1 = \mathrm{i}\beta, \quad \lambda_2 = -\mathrm{i}\beta \quad (\beta = \sqrt{q}), \tag{11.510}$$

即 λ_1,λ_2 为共轭纯虚根. 而此时方程(11.507)化为

$$\ddot{x} + qx = 0. \tag{11.511}$$

因 $q>0$,则方程(11.511)的通解可以写为

$$x = A\cos(\beta t + \gamma), \tag{11.512}$$

其中 A 和 γ 是任意常数. 解(11.512)表征周期运动. 因在方程(11.511)中,qx 项表征与位置 x 有关的恢复项,所以,$q>0$ 代表正恢复;$q<0$ 代表负恢复. 事实上,若令 $\dot{x}=y$,则方程(11.511)化为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -qx. \end{cases} \tag{11.513}$$

将方程组(11.513)的两式相除,得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{qx}{y}, \tag{11.514}$$

它称为轨线方程. 积分方程(11.514),得

$$qx^2 + y^2 = C, \tag{11.515}$$

其中 C 为积分常数. 因 $q>0$,则方程(11.515)在相平面(x,y)上就表示一族椭圆,它就是轨线. 椭圆的中心在原点,此时平衡点(0,0)称为是中心点(centre). 由于轨线是闭曲线,故相平面上任一点,经过一段时间"绕了一周"又回到相平面上的同一点,即重新具有原来的位置和速度,这就是物理上的周期运动. 图 11.18 是平衡点为中心点的相图.

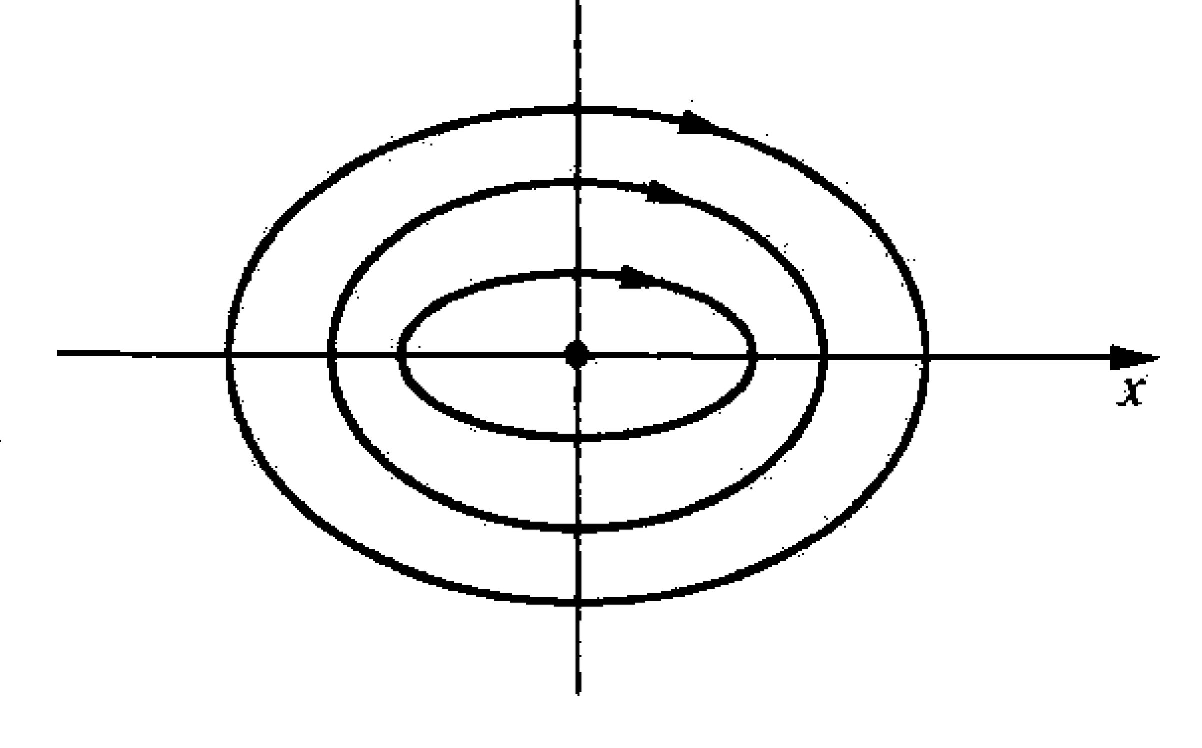


图 11.18 中心点

显然,设有初始位置偏离中心一个 δ 的小闭曲线(椭圆),使此椭圆处于任意小的 ε 区域以内,那么,位于 δ 内的点无论如何都

不会越出 ε 区域，所以，平衡点(0,0)是稳定的.

2. $p\neq 0,\Delta<0$

由(11.508)式知，此时

$$\lambda_1=\alpha+\mathrm{i}\beta,\quad \lambda_2=\alpha-\mathrm{i}\beta\quad (\alpha=-p/2,\beta=\sqrt{-\Delta/2}),\tag{11.516}$$

即 λ_1,λ_2 为共轭复根. 此时，方程(11.507)的通解可以写为

$$x=A\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t+\gamma),\tag{11.517}$$

其中 A,γ 为任意常数. 解(11.517)表征衰减的($\alpha<0,p>0$)或增长的($\alpha>0,p<0$)周期振荡. 在方程(11.507)中，$p\dot{x}$ 项表征与速度 $\dot{x}$ 有关的阻尼项，因此 $p>0$ 代表正阻尼；$p<0$ 代表负阻尼.

令 $\dot{x}=y$，则方程(11.507)化为

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-qx-py.\end{cases}\tag{11.518}$$

因而，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{qx+py}{y}.\tag{11.519}$$

作变换，令

$$y=zx,\tag{11.520}$$

注意$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z$，则轨线方程(11.519)化为

$$x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\left(\frac{q+pz}{z}+z\right)=-\frac{z^2+pz+q}{z},\tag{11.521}$$

显然，此时

$$z^2+pz+q=(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)=(z-\alpha)^2+\beta^2.\tag{11.522}$$

因而，方程(11.521)化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{[(z-\alpha)^2+\beta^2]}{z}\frac{1}{x}.\tag{11.523}$$

积分上式得到

$$\frac{1}{2}\ln[(z-\alpha)^2+\beta^2]+\frac{\alpha}{\beta}\arctan\left(\frac{z-\alpha}{\beta}\right)=-\ln|x|+C_1,\tag{11.524}$$

其中 C_1 为积分常数. 将(11.520)式代入上式，将 z 换回 y 得到

$$\frac{1}{2}\ln[(y-\alpha x)^2+\beta^2x^2]=-\frac{\alpha}{\beta}\arctan\left(\frac{y-\alpha x}{\beta x}\right)+C_1.\tag{11.525}$$

若再令

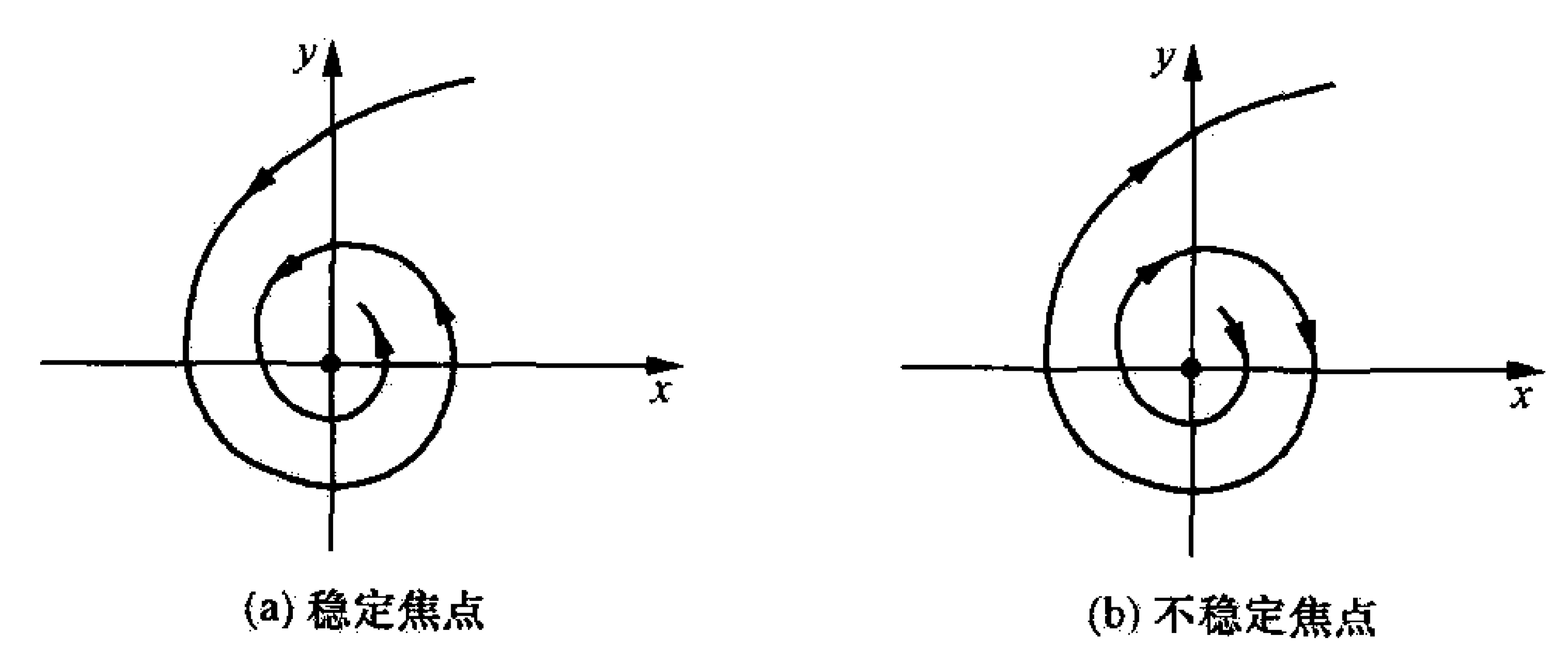
$$\xi=\beta x,\quad \eta=y-\alpha x,\quad r=\sqrt{\xi^2+\eta^2},\quad \theta=\arctan(\eta/\xi),\tag{11.526}$$

则(11.525)式化为

$$r = Ce^{k\theta}, \quad k = -\alpha/\beta, \tag{11.527}$$

其中 C 为任意常数($C=e^{C_1}$).

方程(11.527)表征一族对数螺线,而且,正阻尼时螺旋线向内旋,逐渐趋向平衡点;负阻尼时螺旋线向外旋,逐渐远离平衡点. 因而,前者($\alpha<0, p>0$)是渐近稳定的,平衡点称为稳定焦点(stable focus);后者($\alpha>0, p<0$)是不稳定的,平衡点称为不稳定焦点(unstable focus). 它们的相图分别见图 11.19(a)和(b).



(a) 稳定焦点 (b) 不稳定焦点

图 11.19

3. $q>0, \Delta>0$

由(11.474)式知,λ_1, λ_2 为两不等实根,即

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad (\sqrt{\Delta} < |p|). \tag{11.528}$$

而且,当 $p>0$ 时两根皆负;当 $p<0$ 时两根皆正. 此时,方程组(11.500)的通解可以写为

$$\begin{cases} x = A_1 r_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 r_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y = A_1 s_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 s_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases} \tag{11.529}$$

其中 A_1, A_2 是任意常数. 而(r_1, s_1),(r_2, s_2)分别是方程组(11.503)对应于 λ_1, λ_2 的特征向量.

由(11.529)式知,相平面(x,y)上的轨线方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\lambda_1 A_1 s_1 + \lambda_2 A_2 s_2 e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t}}{\lambda_1 A_1 r_1 + \lambda_2 A_2 r_2 e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t}}. \tag{11.530}$$

因 $p>0$ 时,$\lambda_1<0, \lambda_2<0$,且 $\lambda_2<\lambda_1$,因而,由(11.495)式和(11.496)式得到

$$\begin{cases} t \to -\infty,\ x \to \infty,\ y \to \infty, \quad \dfrac{dy}{dx} \to \dfrac{s_2}{r_2}, \quad y \to \dfrac{s_2}{r_2}x; \\ t \to \infty,\ x \to 0,\ y \to 0, \quad \dfrac{dy}{dx} \to \dfrac{s_1}{r_1}, \quad y \to \dfrac{s_1}{r_1}x. \end{cases} \tag{11.531}$$

它说明轨线先沿着近于平行于直线 $y=s_2x/r_2$ 的曲线,再沿着近于平行于直线 $y=s_1x/r_1$ 的曲线趋于原点. 显然,此平衡点是稳定的,称为稳定的结点(stable node),见图 11.20(a),其中直线 $y=s_1x/r_1$,$y=s_2x/r_2$ 称为分型线(separatrix). 而

在 $p<0$ 时，$\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$，且 $\lambda_2<\lambda_1$，则

$$\begin{cases} t\to-\infty,\ x\to 0,\ y\to 0, & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\to\dfrac{s_2}{r_2}, \quad y\to\dfrac{s_2}{r_2}x; \\ t\to+\infty,\ x\to+\infty,\ y\to+\infty, & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\to\dfrac{s_1}{r_1}, \quad y\to\dfrac{s_1}{r_1}x. \end{cases} \tag{11.532}$$

它与 $p>0$ 的情况相反，此时平衡点是不稳定的，称为不稳定的结点（unstable node），见图 11.20(b)，其箭头方向恰与图 11.20(a)的相反.

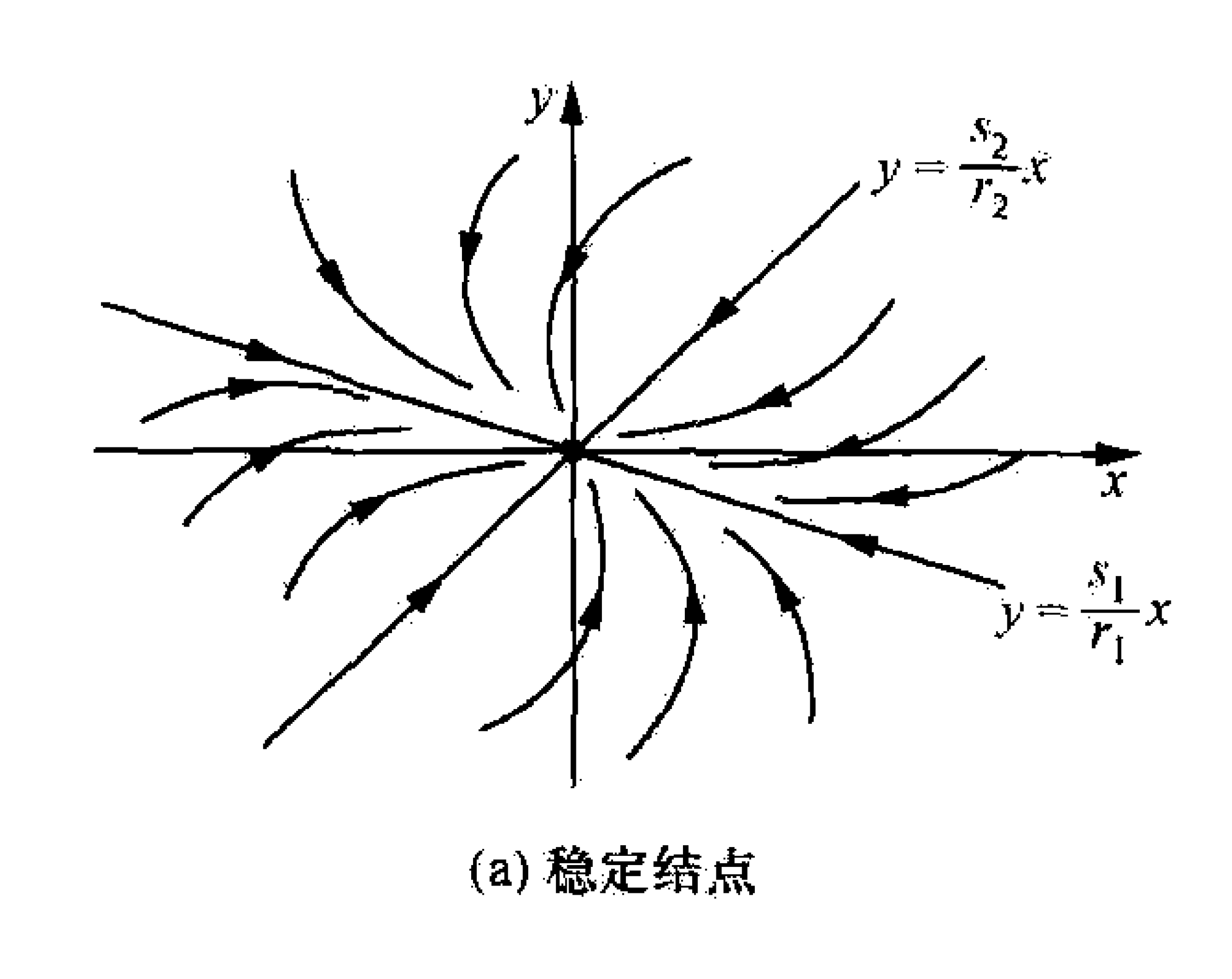


图 11.20

4. $q<0$，$\Delta>0$

由(11.508)式知，λ_1，λ_2 为两不等实根，即

$$\lambda_1=-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2=-\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad (\sqrt{\Delta}>|p|). \tag{11.533}$$

因而，$\lambda_1>0$，$\lambda_2<0$，两根符号相反，则由(11.495)式和(11.496)式有

$$\begin{cases} t\to-\infty,\ x\to\infty,\ y\to\infty(\text{但反号}), & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\to\dfrac{s_2}{r_2}, \quad y\to\dfrac{s_2}{r_2}x; \\ t\to+\infty,\ x\to\infty,\ y\to\infty(\text{但同号}), & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\to\dfrac{s_1}{r_1}, \quad y\to\dfrac{s_1}{r_1}x. \end{cases} \tag{11.534}$$

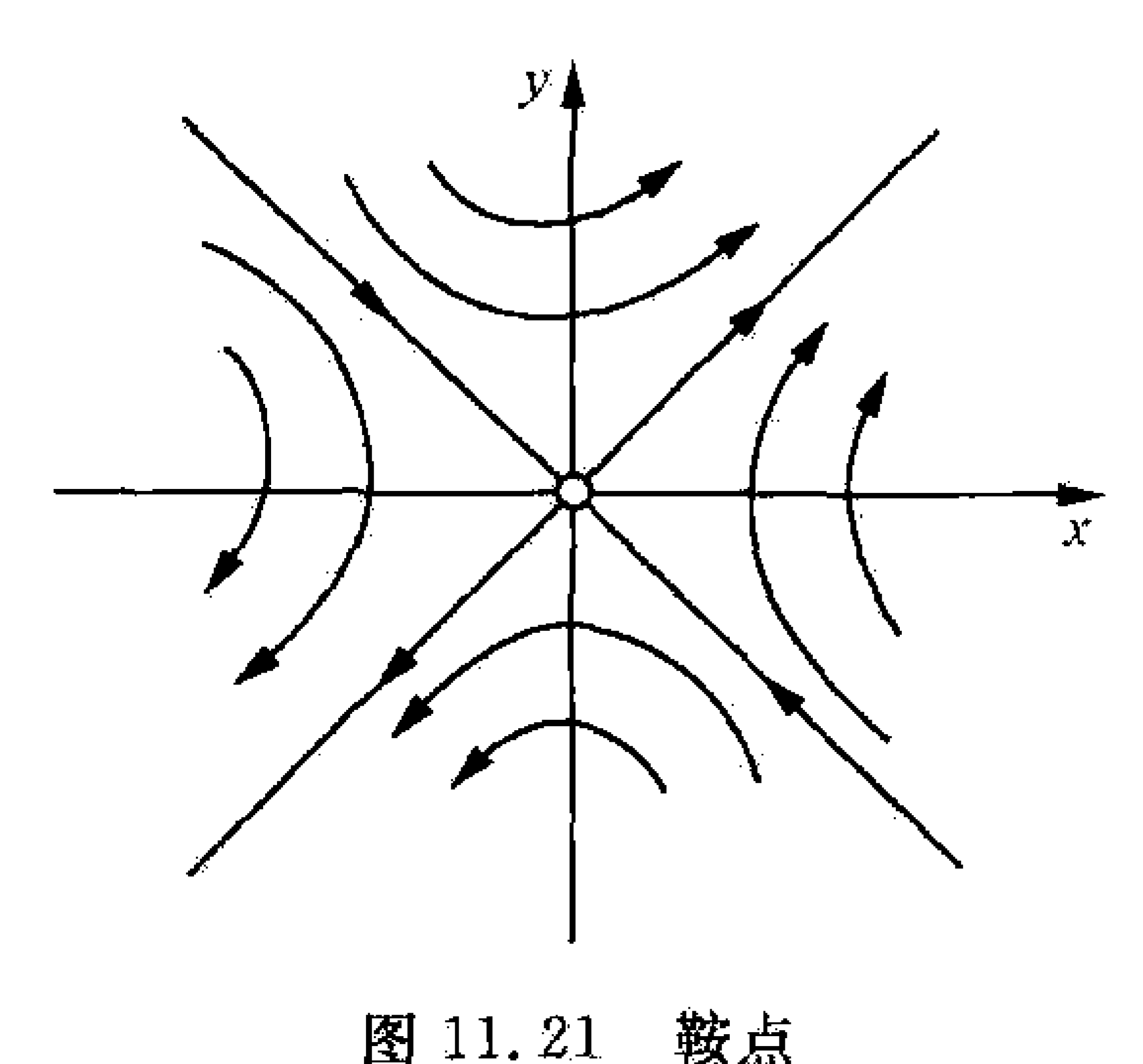


图 11.21 鞍点

此时，平衡点是不稳定的，称为鞍点（saddle），见图 11.21.

应当指出：方程(11.507)从物理上看，qx 为恢复项，$p\dot{x}$ 为阻尼项. 因而，结点($q>0$)是正恢复项的振荡系(11.511)加上正阻尼或负阻尼的结果. 而鞍点($q<0$)是属于负恢复项的情况，此时尽管阻尼可正可负，但它不能改变鞍点的不稳定形态（注：$-qx$ 称为恢复力，$-p\dot{x}$ 称为阻尼力）.

综上所述，在参数平面(p，q)上，平衡点的稳定性态（它们以 x，y 为坐标画出来）绘于图11.22. 图

中虚线为 $\Delta=0$,即 $p^2=4q$ 的抛物线. 依(11.508)式,这是 $\lambda_1=\lambda_2$ 的重根情况. 它在形式上将系统分成振动的($p^2<4q$)和非振动的($p^2>4q$)两类. 在真实的物理系统中,$p^2=4q$ 是很难精确地实现的,所以,它没有物理意义.

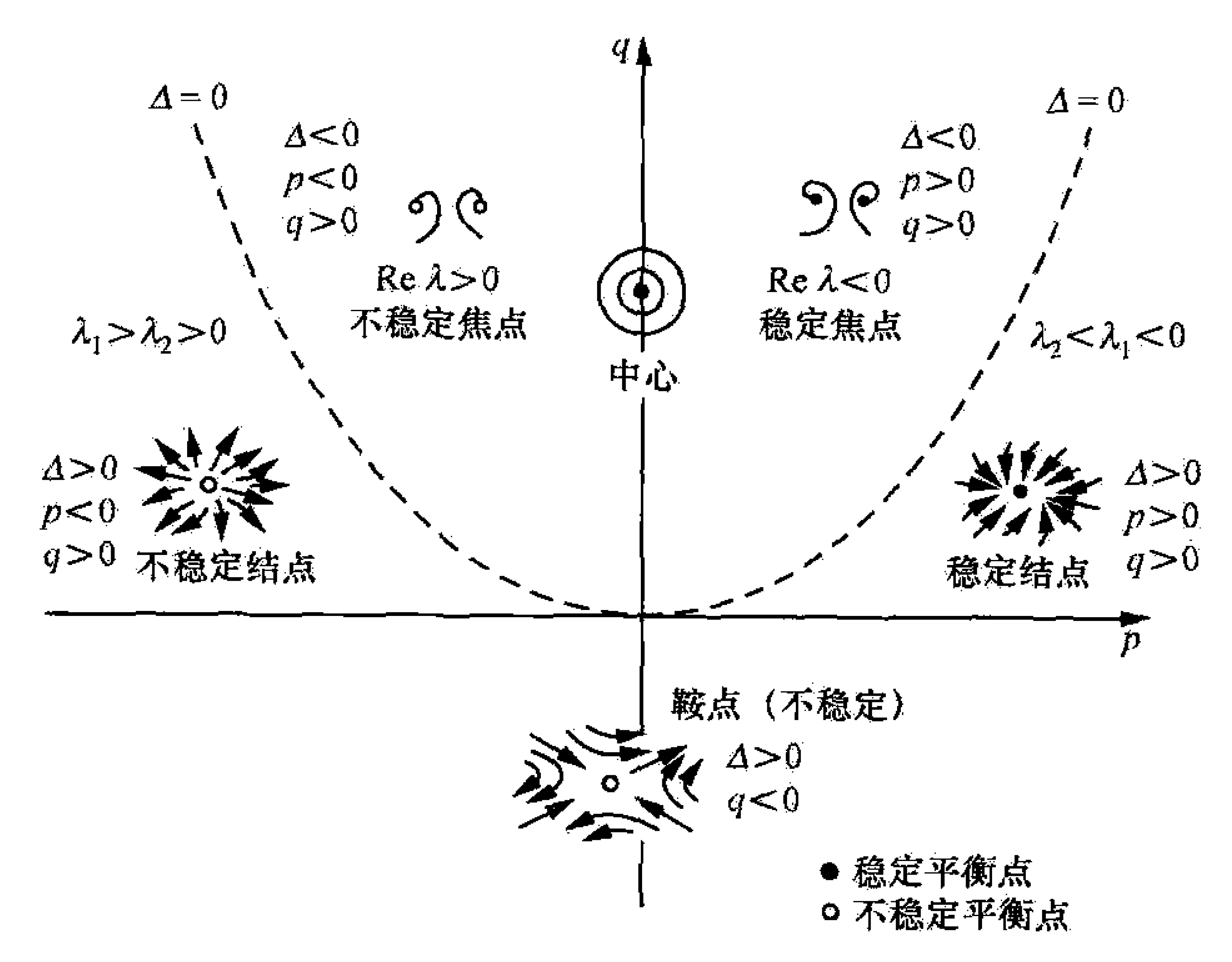


图 11.22 线性系统的稳定性

在图 11.22 中,稳定的平衡点都位于第一象限,除了点$(p,q)=(0,0)$外,其他区域中的平衡点都是不稳定的,从图上我们还看出,除了无阻尼($p=0$)的简谐振动(它属于线性保守系统)外,在相平面上都没有封闭的轨线,因此,在线性非保守系统($p\neq 0$),纯周期过程是不能存在的.

二、非线性系统

前面从线性系统(11.500)的相图分析看出,通过分析平衡点的性质就可以决定其轨线,但对非线性系统,它可以有多个平衡点,因而其轨线不能完全用其平衡点的性质来决定. 所以,非线性系统通常要进行整体(global)分析. 不过,整体分析常常是一个相当困难的事情. 首先,我们在一定的条件作局部(local)分析,即在平衡点附近进行分析.

设二维自治系统的非线性方程组为

$$\begin{cases}\dot{x}=ax+by+X(x,y)\equiv F(x,y),\\ \dot{y}=cx+dy+Y(x,y)\equiv G(x,y),\end{cases}\tag{11.535}$$

其中 a,b,c,d 为实的常数,而 $X(x,y),Y(x,y)$在$(x,y)=(0,0)$的小邻域是连续可微的,且

$$\begin{cases}X(0,0)=0,\quad Y(0,0)=0,\\ \lim\limits_{r\to 0}\dfrac{X(x,y)}{r}\to 0,\quad \lim\limits_{r\to 0}\dfrac{Y(x,y)}{r}\to 0\quad (r=\sqrt{x^2+y^2}).\end{cases}\tag{11.536}$$

方程组(11.535)右端的非线性项 X 和 Y 在(11.536)式的假定下是 r 的高阶项，所以，我们可以认为它在平衡点附近的定性行为主要由其线性部分所决定. 这样，对非线性系统(11.534)，需先求出平衡点(x_0, y_0)(它可以不止一个)，然后，计算下列 Jacobi 矩阵或导算子

$$\boldsymbol{J} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)} \tag{11.537}$$

的特征值 λ(当 $X=Y=0$ 时，λ 满足方程(11.505)).

对某平衡点而言，若特征值的实部全是非零的，即 $\mathrm{Re}\lambda \neq 0$，此时，系统(11.535)称为是双曲的(hyperbolic). 可以证明，此时，非线性系统(11.535)在平衡点附近的轨线与其线性化系统在平衡点附近的轨线是拓扑定性等价的. 此时的平衡点也称为是双曲的，且线性化系统的分型线也是非线性系统的分型线. 从稳定度角度分析，有下列结论：

(1) 若所有特征值 $\mathrm{Re}\lambda<0$，则该平衡点是稳定的；

(2) 若至少有一个特征值 $\mathrm{Re}\lambda>0$，则该平衡点是不稳定的；

以上两种情况，方程组(11.535)的右端 F 和 G 的微小改变都不会改变轨线的拓扑结构，这称为是结构稳定的.

(3) 若至少有一个 λ，使得 $\mathrm{Re}\lambda=0$，例如图 11.22 中的 $p=0$(此时 $\mathrm{Re}\lambda=0$)或 $q=0$(此时有一个 $\lambda=0$)，此时，系统的双曲性受到破坏，轨线的拓扑结构发生变化(尽管 F 和 G 只有微小变化). 对线性系统，$\mathrm{Re}\lambda=0$ 对应于中心；对非线性系统对应的是中心，也可能是焦点，称为结构不稳定. 此时，随着参数的变化，常在 $\mathrm{Re}\lambda=0$ 处发生 Hopf 分岔($p=0, q>0$)和鞍-结点分岔($q=0$，对应于鞍结点).

上述分析说明：非线性系统的轨线与其线性系统的轨线，在平衡点是非中心点(焦点、鞍点、结点)时具有相同的特性，但在平衡点是中心点时要作具体分析，下面举两例说明.

[例 1] 非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x \equiv F, \\ \dot{y} = -\sin y = G. \end{cases} \tag{11.538}$$

显然，其平衡点为$(x,y)=(0,0)$. 将 $\sin x$ 和 $\sin y$ 在平衡点附近 Taylor 展开，则求得方程组(11.538)的线性系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \tag{11.539}$$

而且，它的平衡点也是$(x,y)=(0,0)$. 对线性系统(11.539)，$a=1, b=0, c=0, d=-1$，因而 $p=0, q=-1, \Delta=4$，平衡点是鞍点(不稳定).

非线性系统(11.538)在平衡点的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{J} \equiv \begin{bmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & -\cos y \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{11.540}$$

其特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \equiv -(\lambda-1)(\lambda+1) = 0, \tag{11.541}$$

因而特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. 其中有一个特征值为正,因而,其轨线拓扑结构在平衡点附近与线性系统一样.

[**例 2**] 非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2+y^2), \\ \dot{y} = x + y(x^2+y^2), \end{cases} \tag{11.542}$$

和

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2+y^2), \\ \dot{y} = x - y(x^2+y^2). \end{cases} \tag{11.543}$$

显然,它们的平衡点都为

$$(x,y) = (0,0).$$

而且,它们的非线性部分 $\pm x(x^2+y^2)$, $\pm y(x^2+y^2)$ 是关于 r 的高阶项.

方程组(11.542)和(11.543)在平衡点处的线性方程组都是

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x. \end{cases} \tag{11.544}$$

显然,$a=0, b=-1, c=1, d=0$,因而,$p=0, q=1, \Delta=-4$,所以,线性系统(11.544)的平衡点是中心点.

对非线性系统(11.542)和(11.543),各系统的第一式乘以 x,第二式乘以 y 后相加;第一式乘以 y,第二式乘以 x 后相减,这样,非线性系统(11.542)和(11.543)分别化为

$$\begin{cases} x\dot{x} + y\dot{y} = (x^2+y^2)^4, \\ x\dot{y} - y\dot{x} = x^2+y^2, \end{cases} \tag{11.545}$$

和

$$\begin{cases} x\dot{x} + y\dot{y} = -(x^2+y^2)^4, \\ x\dot{y} - y\dot{x} = -(x^2+y^2). \end{cases} \tag{11.546}$$

若引入平面极坐标

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \tag{11.547}$$

注意

$$\dot{r} = (x\dot{x} + y\dot{y})/r, \quad \dot{\theta} = (x\dot{y} - y\dot{x})/r^2,$$

则方程组(11.545)和(11.546)分别化为

$$\begin{cases} \dot{r} = r^3, \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \tag{11.548}$$

和

$$\begin{cases} \dot{r} = -r^3, \\ \dot{\theta} = -1. \end{cases} \tag{11.549}$$

它们的轨线方程都是

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r^3. \tag{11.550}$$

将上式积分,并取积分常数为零,则得

$$2r^2\theta = -1, \tag{11.551}$$

这是一连锁螺线.但对非线性系统(11.548),$r>0$ 时,$\dot{r}>0$,因而轨线是螺旋向外的,故 $r=0$ 是不稳定焦点;但对非线性系统(11.549),$r>0$ 时,$\dot{r}<0$,因而轨线是螺旋向内的,故 $r=0$ 是稳定焦点.

本例说明非线性系统与其线性化系统的轨线不是拓扑等价的.这是因为非线性系统(11.542)和(11.543)在平衡点 Jacobi 矩阵分别为

$$\begin{bmatrix} 3x^2 + y^2 & -1 + 2xy \\ 1 + 2xy & x^2 + 3y^2 \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{11.552}$$

和

$$\begin{bmatrix} -3x^2 - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 - 2xy & -x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{11.553}$$

它们的特征方程组全是

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - 1 = 0. \tag{11.554}$$

因而特征值 $\lambda_1 = \mathrm{i}, \lambda_2 = -\mathrm{i}$,所以 $\mathrm{Re}\lambda = 0$,即它的特征值具有零的实部,必然双曲性受到破坏.

以上是局部分析,下面举两例说明整体分析,它可以画出整个区域的相图.

[例 1] 非线性保守系统

$$\ddot{x} = f(x). \tag{11.555}$$

若令 $\dot{x} = y$,则方程(11.555)化为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = f(x) \equiv -V'(x), \end{cases} \tag{11.556}$$

其中

$$V(x)=-\int f(x)\delta x \tag{11.557}$$

为克服外力 $f(x)$ 所作的功，即为系统的势能. 方程组(11.556)的轨线方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{V'(x)}{y}. \tag{11.558}$$

积分上式求得系统的轨线为

$$\frac{1}{2}y^2+V(x)=C, \tag{11.559}$$

其中 C 为积分常数. 上式表明：对非线性保守系统(11.521)，其动能 $\frac{1}{2}\dot{x}^2=\frac{1}{2}y^2$ 与势能 $V(x)$ 之和为常数，这就是能量守恒定律，C 为总能量.

由方程组(11.556)知，平衡点 (x_0,y_0) 满足

$$y_0=0 \quad 和 \quad V'(x_0)=0. \tag{11.560}$$

因而，平衡点总是位于 x 轴上，而且它是势能 $V(x)$ 的极值点. 由方程组(11.556)知，在平衡点 $(x_0,0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{J}\equiv\begin{bmatrix}0 & 1\\ -V''(x) & 0\end{bmatrix}_{(x_0,0)}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -V''(x_0) & 0\end{bmatrix}, \tag{11.561}$$

其特征方程为

$$\begin{vmatrix}0-\lambda & 1\\ -V''(x_0) & 0-\lambda\end{vmatrix}\equiv\lambda^2+V''(x_0)=0. \tag{11.562}$$

因此，平衡点的稳定性由 $V''(x_0)$ 的符号决定. 若 $V''(x_0)>0$，即 x_0 是势能 $V(x)$ 的极小点，则 λ 为共轭纯虚根，平衡点 $(x_0,0)$ 是中心点，是稳定的；若 $V''(x_0)<0$，即 x_0 是势能 $V(x)$ 的极大点，则 λ 为一正一负，平衡点 $(x_0,0)$ 是不稳定的鞍点；若 $V''(x_0)=0$，即 x_0 是势能的拐点，则 λ 皆为零，此时，平衡点 $(x_0,0)$ 为一不稳定的高阶奇点，称为尖点(cusp).

由方程(11.559)有

$$y=\pm\sqrt{2C-2V(x)}. \tag{11.563}$$

因为每一轨线都有一个总能量 C，所以，由上式给出总能量 C，我们就能画出轨线. 图 11.23(a)，(b)，(c)给出三种不同势能 $V(x)$ 的曲线，分别有极小点、极大点和拐点，它们在相平面 (x,y) 上分别对应于中心点、鞍点和尖点.

［**例 2**］ 梯度系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-\dfrac{\partial V}{\partial x},\\ \dot{y}=-\dfrac{\partial V}{\partial y}.\end{cases} \tag{11.564}$$

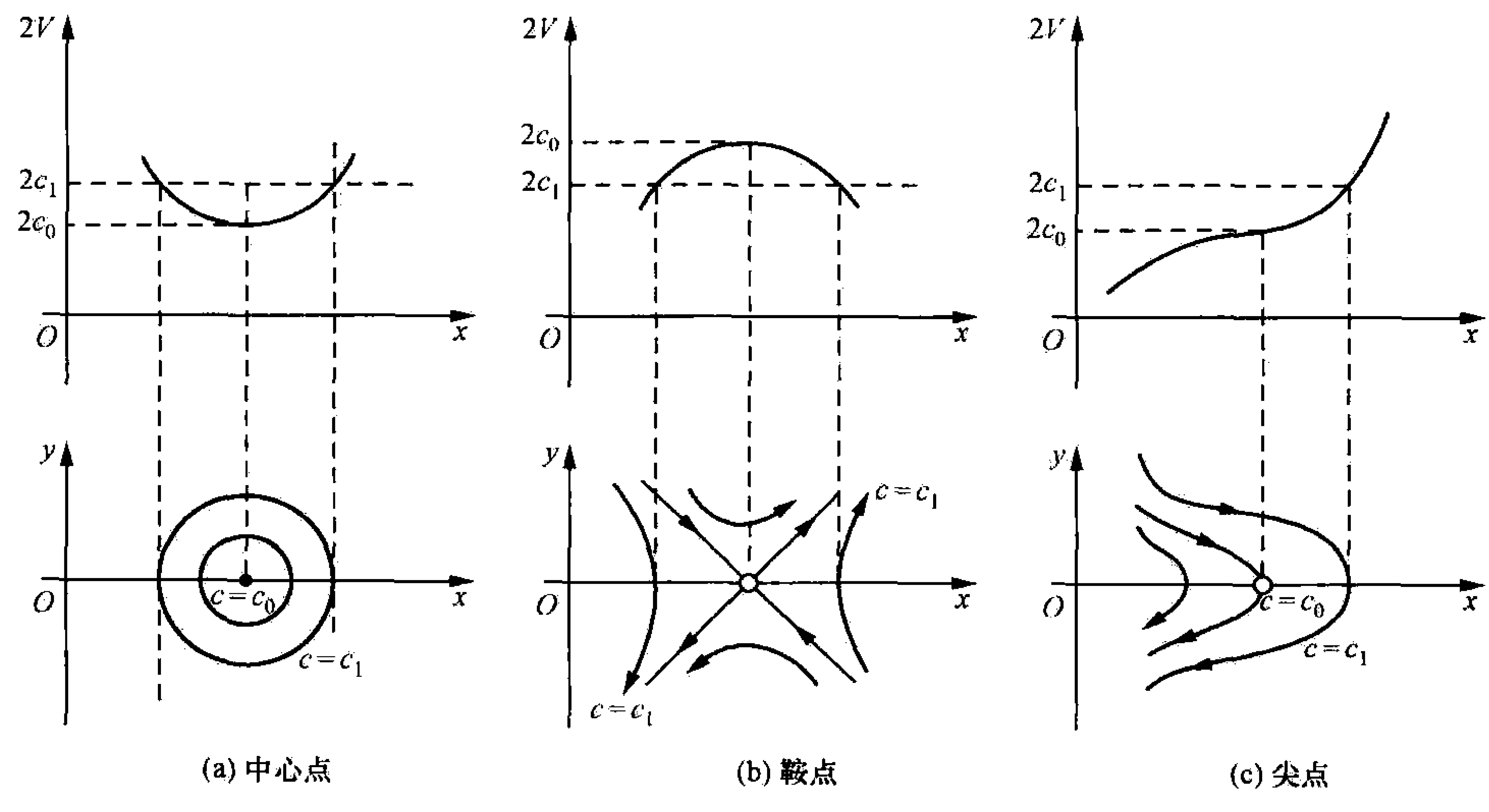


图 11.23 非线性保守系统

若视 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 为平面流场 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{h}}$ 的两个分量 u 和 v，那么，梯度系统(11.564)就表征无旋场；若视 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 为加速度的两个分量，则梯度系统(11.564)的右端就是位势力，即

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V, \tag{11.565}$$

$V(x,y)$就是位势，$\boldsymbol{F}$ 的方向垂直于 V 的等值线，且从 V 的高值指向低值.

梯度系统(11.564)的平衡点(x_0, y_0)满足

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = 0, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0, \tag{11.566}$$

因此，平衡点就是位势 V 的驻点. 若令

$$A = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}, \quad B = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)}, \quad C = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}, \tag{11.567}$$

则由方程组(11.564)知，在平衡点处的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{J} \equiv \begin{bmatrix} -A & -B \\ -B & -C \end{bmatrix}, \tag{11.568}$$

其特征方程为

$$\begin{vmatrix} -A-\lambda & -B \\ -B & -C-\lambda \end{vmatrix} \equiv (\lambda + A)(\lambda + C) - B^2 = 0, \tag{11.569}$$

或

$$\lambda^2 + (A+C)\lambda + (AC - B^2) = 0, \tag{11.570}$$

因而，特征根为

$$\lambda = \frac{1}{2}\{-(A+C) \pm \sqrt{(A+C)^2 - 4(AC - B^2)}\}$$

$$= \frac{1}{2}\{-(A+C) \pm \sqrt{(A-C)^2+4B^2}\}. \tag{11.571}$$

若平衡点(x_0,y_0)是位势 V 的极大值点,$A<0,C<0,AC-B^2>0$,因而 λ 的两根皆为正,对应是不稳定结点;该点是力的源,力从该点指向外. 若平衡点(x_0,y_0)是位势 V 的极小值点,$A>0,C>0,AC-B^2>0$,因而 λ 的两根皆为负,对应是稳定结点;该点是力的汇,力指向该点. 对于 $AC-B^2<0$ 的点,位势 V 在该点不是极值,也可称为拐点,因而 λ 一正一负,对应于鞍点. 根据上述分析可知,梯度系统(11.564)全是实的特征值,而且,只要 $AC-B^2\neq 0$,则它就没有零特征值,这样,梯度系统的平衡点是双曲的.

前面非线性相图分析,对于 $\mathrm{Re}\lambda\neq 0$ 的情况可以用线性化系统来研究平衡点的稳定性问题. 对于至少有一个 $\mathrm{Re}\lambda=0$ 的情况,双曲性被破坏,此时用线性方程来研究稳定性问题一般是不可能的. 另外,更广泛的非线性问题,特别是强非线性问题,线性化方法也是不适用的,此时,常用 Lyapunov 直接方法(或 Lyapunov 第二方法)来判别平衡点的稳定性. 该方法的实质是找一个关于 x,y 的 Lyapunov 正定(positive definite)函数 $E(x,y)$,它满足

$$E(0,0)=0, \quad E(x,y)>0 \quad ((x,y)\neq(0,0)), \tag{11.572}$$

$E(x,y)$相当于系统的总能量. 然后,研究能量 $E(x,y)$沿轨线的变化,即考察

$$\dot{E} \equiv \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y}\dot{y}. \tag{11.573}$$

可以证明:如果 $\dot{E}$ 是半负定的(semi-negative definite),即

$$\dot{E}(x,y) \leqslant 0, \tag{11.574}$$

则平衡点$(x,y)=(0,0)$是稳定的,它表示能量随时间不增加;如果 $\dot{E}$ 是负定的(negative definite),即

$$\dot{E}(0,0)=0, \quad \dot{E}(x,y)<0 \quad ((x,y)\neq(0,0)), \tag{11.575}$$

则平衡点$(x,y)=(0,0)$是渐近稳定的,它表示能量随时间减小;若 $\dot{E}$ 是正定的,即

$$\dot{E}(0,0)=0, \quad \dot{E}(x,y)>0 \quad ((x,y)\neq(0,0)), \tag{11.576}$$

则平衡点$(x,y)=(0,0)$是不稳定的,它表示能量随时间增加.

至于如何寻找 Lyapunov 正定函数 $E(x,y)$,目前为止尚无一般的方法,它常常取为 $E(x,y)=x^2+y^2$ 等等形式. 不过,在物理问题中,它就是系统的总能量. 下面举例说明这种方法.

[例 1] 非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3, \\ \dot{y} = -y^3. \end{cases} \tag{11.577}$$

它的平衡点是$(x,y)=(0,0)$，但在该点，Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{J}\equiv\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}. \tag{11.578}$$

显然，其特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$. 因而用前面所述拓扑等价的方法无法判断平衡点的稳定性. 但应用 Lyapunov 直接方法，设

$$E(x,y)=x^2+y^2, \tag{11.579}$$

则由(11.573)式求得

$$\dot{E}=-2(x^4+y^4), \tag{11.580}$$

故在平衡点 $\dot{E}=0$，其他点 $\dot{E}<0$，即 $\dot{E}$ 是负定的，因而平衡点是渐近稳定的.

［例 2］ 耗散系统

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}+(x+x^3)=0 \quad (\alpha>0). \tag{11.581}$$

令 $\dot{x}=y$，则系统(11.581)化为

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-(x+x^3)-\alpha y\end{cases} \quad (\alpha>0). \tag{11.582}$$

显然，其平衡点为$(x,y)=(0,0)$.

当 $\alpha=0$ 时，方程(11.581)转化为保守系统(11.555)，平衡点也是$(x,y)=(0,0)$，而且势能是 $V(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4}$，它在 $x=0$ 有极小值，因而当 $\alpha=0$ 时，系统(11.581)的平衡点是中心点.

在 $\alpha>0$ 时，系统(11.581)的总能量为

$$E=\frac{1}{2}\dot{x}^2+V(x)=\frac{1}{2}y^2+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right). \tag{11.583}$$

如果我们就取 E 为 Lyapunov 函数，则

$$\dot{E}=(x+x^3)y+y[-(x+x^3)-\alpha y]=-\alpha y^2\leqslant 0, \tag{11.584}$$

即 $\dot{E}$ 是半负定的，则平衡点是稳定的. 但由上式，除 $\dot{E}(0,0)=0$ 外，还有 $\dot{E}(x,0)=0(x\neq 0)$，因而还不能说平衡点是渐近稳定的. 但若取 Lyapunov 函数为

$$E(x,y)=\frac{y^2}{2}+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)+\beta\left(xy+\frac{\alpha}{2}x^2\right) \quad (\beta>0), \tag{11.585}$$

只要 β 充分小，可保证 $E(x,y)\geqslant 0$. 因

$$\dot{E}(x,y)=-\beta(x^2+x^4)-(\alpha-\beta)y^2, \tag{11.586}$$

则当 β 充分小时，$\dot{E}$ 就负定，而且只有 $\dot{E}(0,0)=0$. 这样，可以判断平衡点是渐近稳定的.

利用 Lyapunov 直接方法对某些非线性系统非整体分析，还会出现一种重要的

周期性的轨线，它就是极限环(limit cycle). 它是一种独立于初始扰动的非线性周期振荡现象，在相图上，它通常包含一个孤立的不稳定平衡点和一个围绕此平衡点的闭合轨线. 下面举例说明.

［例 1］ 一般的非线性耗散系统(Lienard 方程)

$$\ddot{x}+g(x,\dot{x})\dot{x}-f(x)=0. \tag{11.587}$$

若 $g(x,\dot{x})=0$，则方程(11.587)就转化为保守系统(11.555). 系统(11.587)的势能为 $V(x)=-\int f(x)\delta x$，而总能量为

$$E=\frac{1}{2}\dot{x}^2+V(x)=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\int f(x)\delta x, \tag{11.588}$$

由此求得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\dot{x}\ddot{x}+V'(x)\dot{x}=\dot{x}[\ddot{x}+V'(x)]=\dot{x}[\ddot{x}-f(x)]=-g(x,\dot{x})\dot{x}^2. \tag{11.589}$$

因此，对于相平面某一区域中的一条轨线，当 $g(x,\dot{x})>0$ 时(表示正阻尼)，$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}<0$(总能量减小)，使系统趋于稳定；当 $g(x,\dot{x})<0$ 时(表示负阻尼)，$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}>0$(总能量增加)，使系统趋于不稳定.

若要求耗散系统(11.587)表征周期运动，则它应在一个周期 T 内，总能量变化为零，即

$$\int_t^{t+T}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\delta t=0. \tag{11.590}$$

将(11.589)式代入上式有

$$\int_t^{t+T}-g(x,\dot{x})\dot{x}^2\delta t=0. \tag{11.591}$$

因为 $\dot{x}^2>0$，则上式表明，若阻尼系数 $g(x,\dot{x})$ 在运动过程中改变符号，才可能有周期运动. 在物理上通常认为，在速度 $\dot{x}$ 较小时是负阻尼($g(x,\dot{x})<0$)，在速度大时是正阻尼($g(x,\dot{x})>0$).

在耗散系统(11.587)中，如取 $f(x)=-x$，$g(x,\dot{x})=x^2-1$，则化为下列所谓 van der Pol 方程

$$\ddot{x}+(x^2-1)\dot{x}+x=0. \tag{11.592}$$

令 $\dot{x}=y$，则方程(11.592)化为

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-x+y-x^2y.\end{cases} \tag{11.593}$$

显然，平衡点为$(x,y)=(0,0)$. 在平衡点处，Jacobi 矩阵为

$$J\equiv\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}, \tag{11.594}$$

它的特征方程为

$$\begin{vmatrix}0-\lambda & 1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\equiv\lambda(\lambda-1)+1\equiv\lambda^2-\lambda+1=0. \tag{11.595}$$

因而特征根为 $\lambda_1=(1+\sqrt{3}\mathrm{i})/2$，$\lambda_2=(1-\sqrt{3}\mathrm{i})/2$，这是共轭复根，且 $\mathrm{Re}\lambda=1/2$，所以，平衡点是不稳定的焦点.

若作整体分析，此时(11.588)式和(11.589)式分别化为

$$E=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2), \tag{11.596}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=-(x^2-1)\dot{x}^2=-(x^2-1)y^2. \tag{11.597}$$

由此可见，若取 E 是 Lyapunov 函数，则当$|x|<1$ 时(负阻尼)，$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}>0$，即 $\dot{E}$ 是正定的，系统趋于不稳定；当$|x|>1$ 时(正阻尼)，$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}<0$，即 $\dot{E}$ 是负定的，系统趋于稳定；而当$|x|=1$ 时，$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=0$，能量 E 达到极值(极大或极小). 这样，随着 x 的变化，在相平面(x,y)上平衡点周围就形成周期运动的极限环，而且极限环邻近的轨线从极限环两边趋向于极限环. 见图 11.24.

在耗散系统(11.587)中，如取 $f(x)=-x$，$g(x,\dot{x})=x^2+\dot{x}^2-1$，则化为

$$\ddot{x}+(x^2+\dot{x}^2-1)\dot{x}+x=0. \tag{11.598}$$

令 $\dot{x}=y$，则方程(11.598)化为

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-x+y-(x^2+y^2)y.\end{cases} \tag{11.599}$$

平衡点还是$(x,y)=(0,0)$，而且也是不稳定的焦点. 此时，能量 E 仍为(11.596)式，但

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=-(x^2+\dot{x}^2-1)\dot{x}^2=-(x^2+y^2-1)y^2. \tag{11.600}$$

由此可见，当 $x^2+y^2<1$ 时，$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}>0$(负阻尼)；当 $x^2+y^2>1$ 时，$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}<0$(正阻尼)；只有 $x^2+y^2=1$ 时，$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=0$. 这样，在相平面$(x,y)$上的圆 $x^2+y^2=1$ 就是极限环，而且，其邻近的轨线也从极限环两边趋向极限环，见图 11.25.

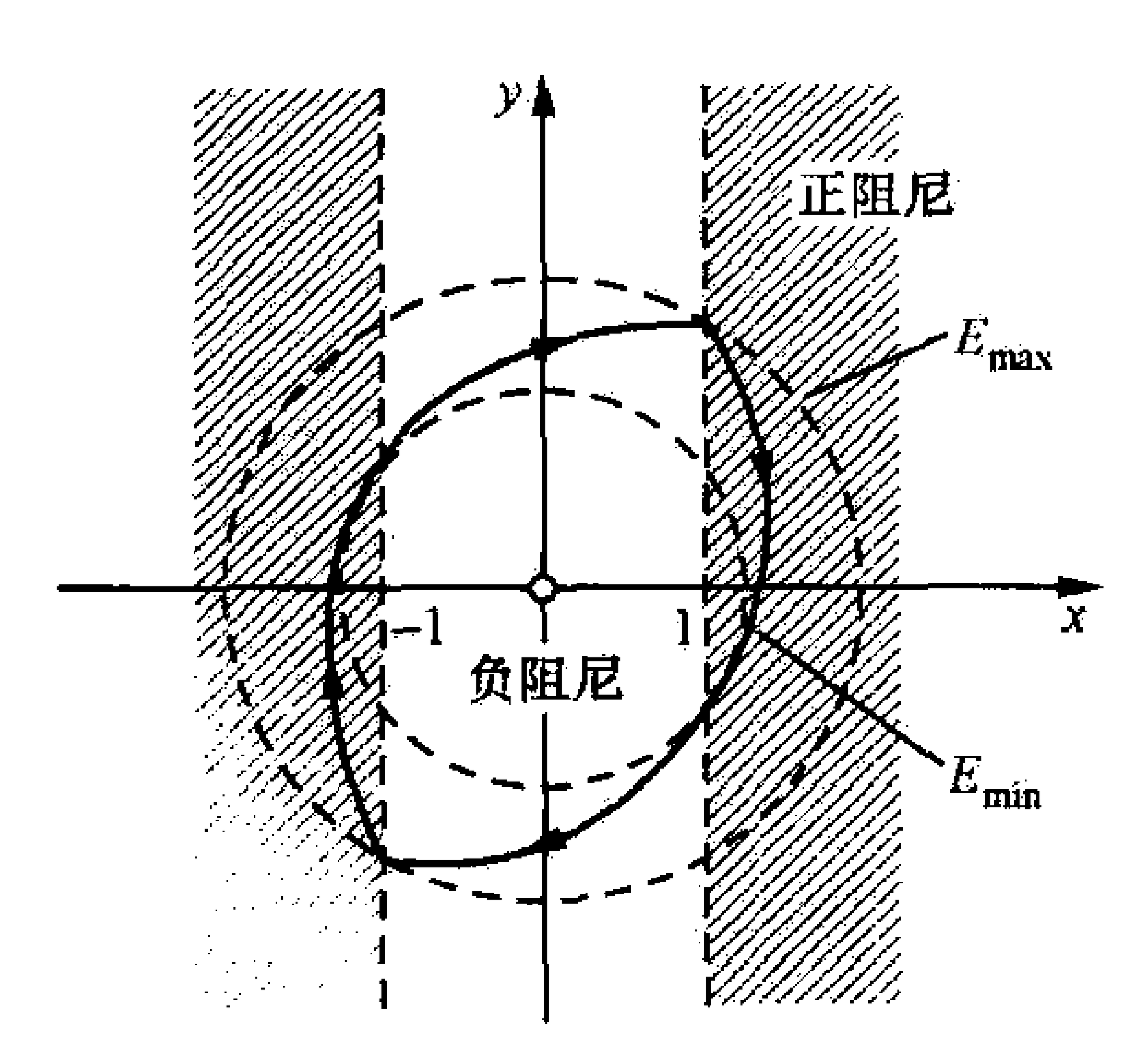




图 11.24　van der Pol 方程的极限环

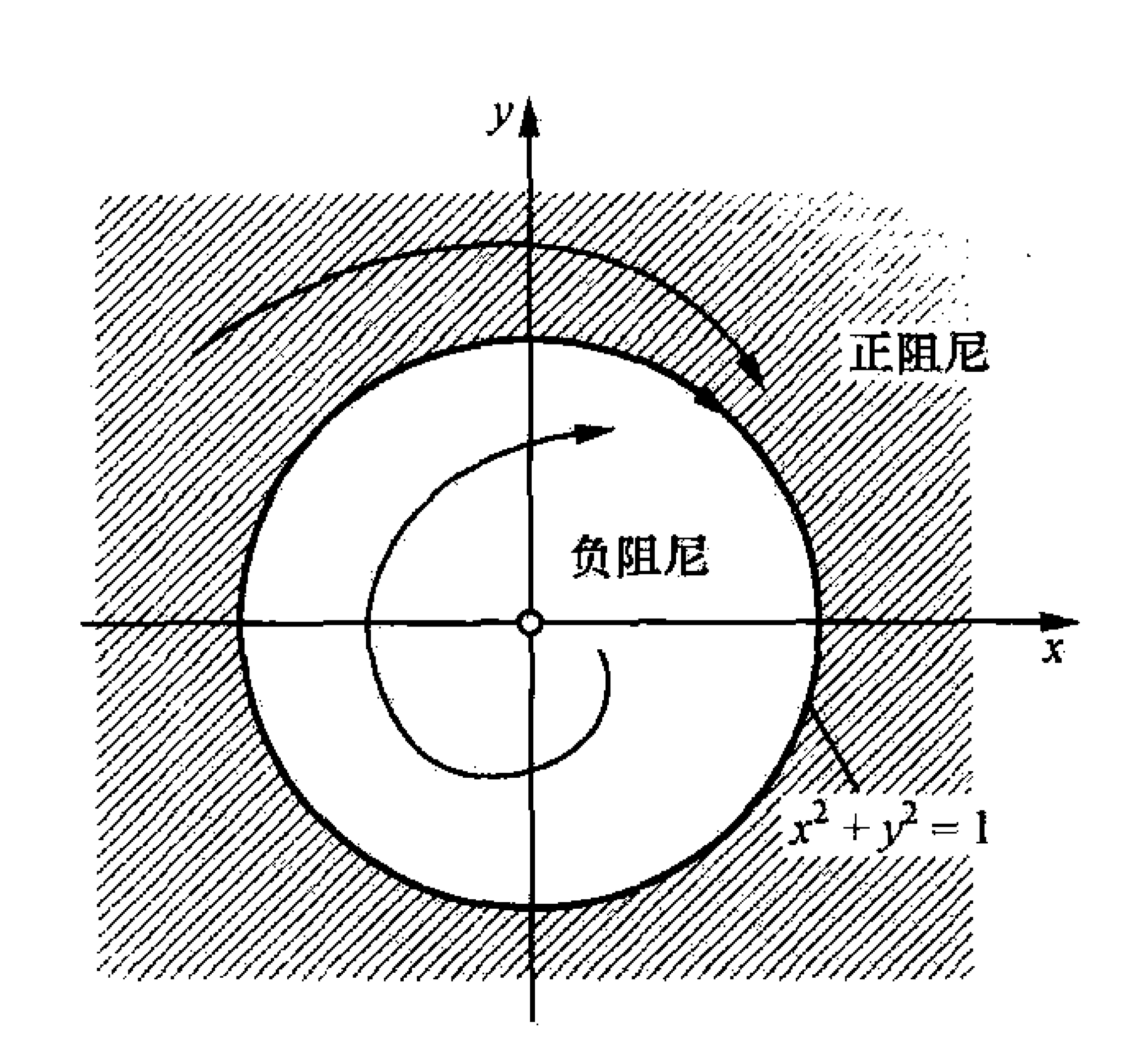


图 11.25　系统(11.598)的极限环

上面分析的非线性耗散系统的两个例子说明了极限环的存在，而且其邻近轨线从极限环两边趋向极限环，此极限环称为稳定的极限环. 下面给出三个例子，只是稍有不同，但极限环的性质却大不相同.

［**例 2**］　非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+x[1-(x^2+y^2)^{1/2}],\\ \dot{y}=x+y[1-(x^2+y^2)^{1/2}].\end{cases}\tag{11.601}$$

引入平面极坐标(见(11.547)式)，则方程组(11.567)化为

$$\begin{cases}\dot{r}=r(1-r),\\ \dot{\theta}=1.\end{cases}\tag{11.602}$$

对 r 而言，它有两个平衡态：$r=0$ 和 $r=1$. 对于 $r=0$，其线性方程 $\dot{r}=r>0$，表明它是不稳定的平衡态. 又对于 $0<r<1$，有 $\dot{r}>0$，因而轨线螺旋向外到 $r=1$；对于 $r>1$，有 $\dot{r}<0$，因而轨线螺旋向内到 $r=1$，所以 $r=1$(它使得 $\dot{r}=0$)代表极限环，而且是稳定的极限环，见图 11.26.

图 11.26　稳定的极限环

［**例 3**］　非线性系统

$$\begin{cases}\dot{r}=r(r-1)(r-2),\\ \dot{\theta}=1.\end{cases}\tag{11.603}$$

显然，它有不稳定平衡点 $r=0$ 和两条闭曲线 $r=1$ 与 $r=2$，且当 $0<r<1$ 时，$\dot{r}>0$；当 $1<r<2$ 时，$\dot{r}<0$；当 $r>0$ 时，$\dot{r}>0$. 所以，$r=1$ 是稳定的极限环，$r=2$ 的两边轨线都离开 $r=2$，因而 $r=2$ 是不稳定极限环，见图 11.27.

［例 4］ 非线性系统

$$\begin{cases}\dot{r} = r(r-1)^2, \\ \dot{\theta} = 1.\end{cases} \tag{11.604}$$

显然，$r=1$ 是极限环，且对 $0<r<1$ 和 $r>1$ 时都有 $\dot{r}>0$，因而，对 $r=1$ 的极限环而言，轨线从 $r<1$ 一边趋向这个极限环，但从 $r>1$ 的一边远离这个极限环，它称为是半稳定的极限环，见图 11.28.

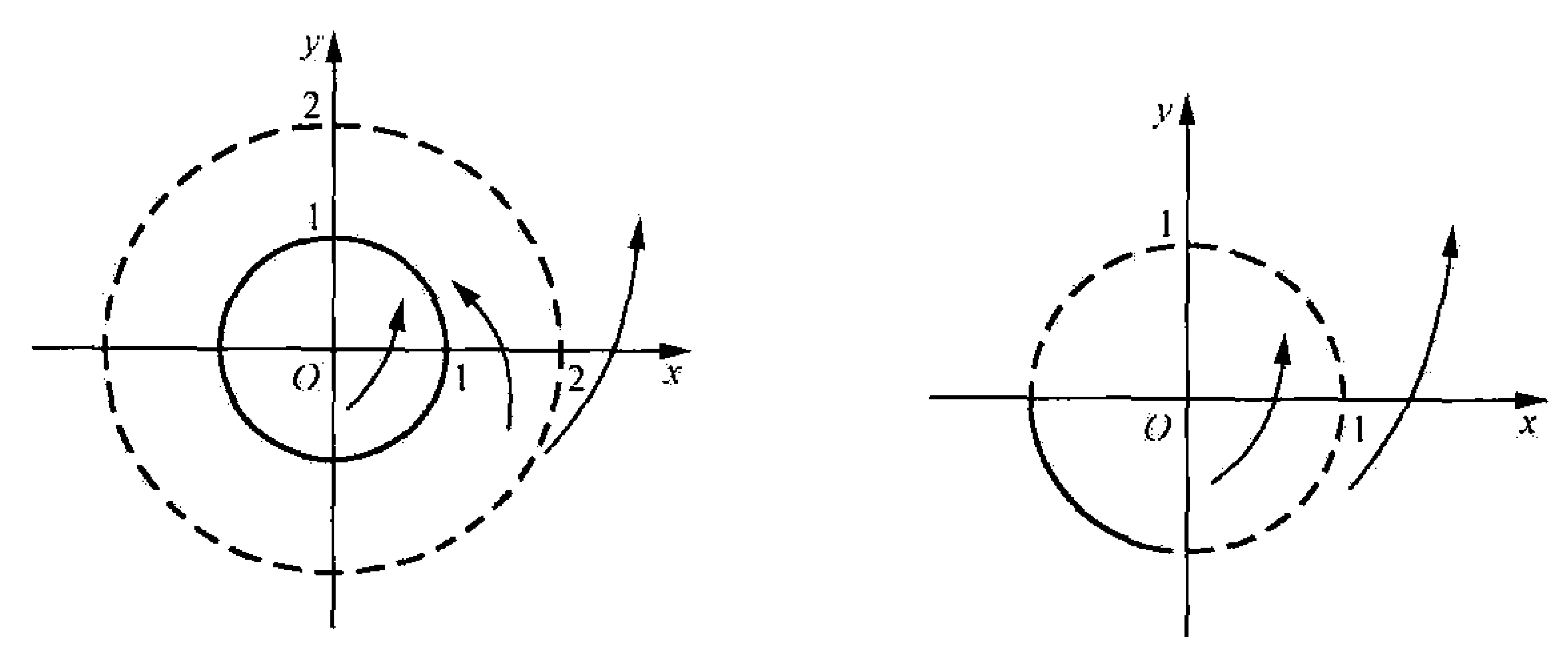


图 11.27 稳定的极限环和不稳定的极限环 图 11.28 半稳定的极限环

§ 11.8 气候系统的平衡态(equilibrium states)

气候系统的主要特征是由其能量收支所决定的. 设进入大气的太阳短波辐射为 R_1，大气向外的长波辐射为 R_2，则地气系统的基本方程可以写为

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = R_1 - R_2, \tag{11.605}$$

其中 T 为大气的平均温度，c 为地-气系统的平均热容量. 方程(11.605)称为零维能量平衡模式或 BS(Budyko-Sellers)模式.

入射的太阳短波辐射可以表为

$$R_1 = Q_0[1-\alpha(T)], \tag{11.606}$$

其中 Q_0 为到达地球表面的平均太阳短波辐射，它是太阳常数 S_0 的 1/4(若取 $S_0=1370\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$，则 $Q_0=342.5\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$)，$\alpha(T)$为行星反照率.

按照 Stefan-Boltzman 定律，大气向外的长波辐射可以写为

$$R_2 = \varepsilon(T)\sigma T^4, \tag{11.607}$$

其中 $\varepsilon(T)$为有效放射率，而

$$\sigma = 5.6687\times 10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$$

为 Stefan-Boltzman 常数.

(11.606)式和(11.607)式代入方程(11.605)，得到

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = F(T), \tag{11.608}$$

其中

$$F(T) \equiv R_1 - R_2 = Q_0[1-\alpha(T)] - \varepsilon(T)\sigma T^4. \tag{11.609}$$

方程(11.608)是 T 关于 t 的一阶非线性方程. 使方程右端 $F(T)=0$ 的 T 称为此方程的平衡态,记为 T^*,称为辐射平衡温度,显然 T^* 满足

$$F(T^*) \equiv Q_0[1-\alpha(T^*)] - \varepsilon(T^*)\sigma T^{*4} = 0. \tag{11.610}$$

方程(11.608)右端在平衡态 $T=T^*$ 附近作 Taylor 展开,只取一次项有

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{T=T^*} \cdot (T-T^*), \tag{11.611}$$

显然,$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{T=T^*}$ 的符号决定了平衡态的稳定性. 若 $\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{T=T^*} < 0$,则 $T-T^*$ 随时间指数减小,T 趋近于 T^*,因而平衡态是稳定的;若 $\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{T=T^*} > 0$,则 $T-T^*$ 随时间指数增长,T 远离于 T^*,因而平衡态是不稳定的.

下面分三种情况来说明.

1. $\varepsilon(T)=1, \alpha(T)=\alpha_0=$ 常数

则由方程(11.610)求得辐射平衡温度为

$$T^* = \left[\frac{Q_0}{\sigma}(1-\alpha_0)\right]^{1/4}. \tag{11.612}$$

若取 $\alpha_0=0.3$,则求得 $T^*=254.6\,\mathrm{K}$,这个温度要比观测到的地表附近的大气平均温度低 $32.8\,\mathrm{K}$,这可能是我们未考虑地球大气的温室效应的缘故. 因

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{T=T^*} = -4\sigma T^{*3} = -4\sigma\left[\frac{Q_0}{\sigma}(1-\alpha_0)\right]^{3/4} < 0, \tag{11.613}$$

因而此平衡态是稳定的.

2. $\varepsilon(T)=\varepsilon_0=$ 常数,$\alpha(T)=\alpha_0-\alpha_1 T$ ($\alpha_0=2.8, \alpha_1=0.009\,\mathrm{K}^{-1}$)

则由方程(11.610)求得辐射平衡温度满足

$$T^{*4} - pT^* + q = 0, \tag{11.614}$$

其中

$$p = \frac{\alpha_1 Q_0}{\varepsilon_0 \sigma}, \quad q = -\frac{Q_0(1-\alpha_0)}{\varepsilon_0 \sigma}. \tag{11.615}$$

根据四次代数方程求解的理论,如果 $\left(\frac{q}{3}\right)^3 - \left(\frac{p}{4}\right)^4 < 0$,则方程(11.614)有一对实根和一对复根,其中一对实根为

$$T_1^* = A + \sqrt{\frac{p}{4A} - A^2}, \quad T_2^* = A - \sqrt{\frac{p}{4A} - A^2}, \tag{11.616}$$

其中

$$A=\sqrt{\frac{q}{3}}\cosh\left[\frac{1}{3}\ln(B+\sqrt{B^2-1})\right]\quad\left(B^2=\left(\frac{p}{4}\right)^4\Big/\left(\frac{q}{3}\right)^3\right).\tag{11.617}$$

若取 $\varepsilon_0=0.69$，求得 $p=78.2\times10^6\,\mathrm{K}^3$，$q=156.4\times10^8\,\mathrm{K}^4$，从而求得 $T_1^*=288.6\,\mathrm{K}$，这与实际较为一致. 因 $\left[\frac{\partial F}{\partial T}\right]_{T=T^*}=-4\varepsilon_0\sigma\left[T^{*3}-\frac{p}{4}\right]$，不难证明 $T_1^{*3}-\frac{p}{4}>0$，$T_2^{*3}-\frac{p}{4}<0$，因而平衡态 T_1^* 是稳定的，但平衡态 T_2^* 是不稳定的，这是 Fraedrich 的研究结果.

3. 一般情况

由于冰覆盖对反照率的影响(称为冰反照反馈)，取

$$\alpha(T)=\begin{cases}\alpha_0, & T<T_a,\\ \beta_0-\gamma_0T, & T_a<T<T_b,\\ 0, & T>T_b.\end{cases}\tag{11.618}$$

由于温室效应，放出的长波辐射部分地被云和痕量气体吸收，取

$$\varepsilon(T)=1-m\tanh\left(\frac{T}{T_0}\right)^6,\tag{11.619}$$

其中 m 为长波辐射的减弱系数，在天空的 50% 被云覆盖的情况下，$m=1/2$，$T_0^{-6}=1.9\times10^{-15}\,\mathrm{K}^{-6}$，此时由(11.610)式求辐射平衡温度需要做数值计算.

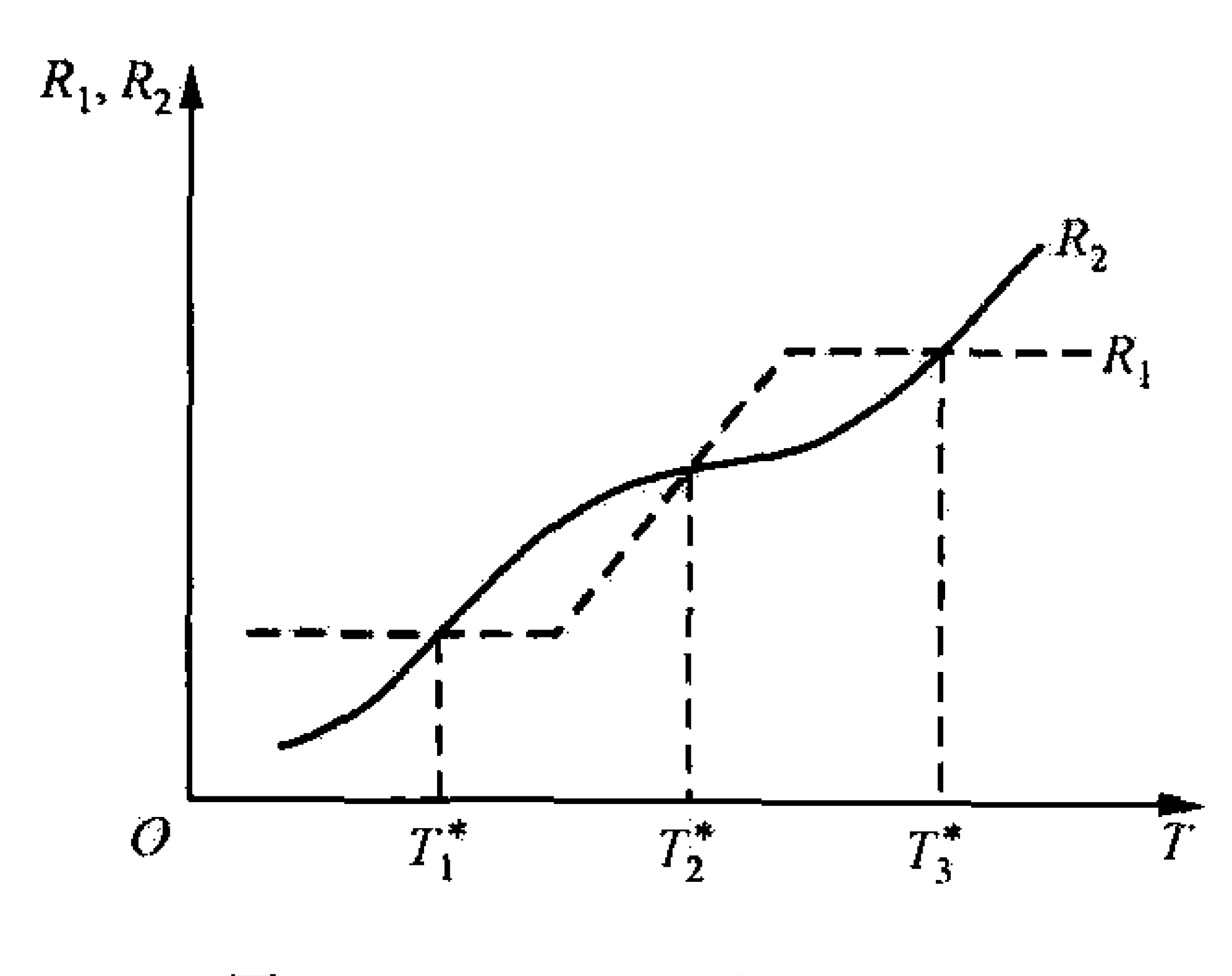


图 11.29　R_1，R_2 随 T 的变化

图 11.29 给出了 R_1 和 R_2 随 T 的变化图. 图中的 R_1 曲线和 R_2 曲线的交点就是方程(11.605)的平衡态. 从图看出，有 3 个平衡温度 T_1^*，T_2^* 和 T_3^*，其中 T_1^* 表示冰期的气候，T_2^* 表示冷期的气候，T_3^* 表示较暖的现代气候.

平衡态的稳定性决定于

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{T=T^*}=\left(\frac{\partial R_1}{\partial T}-\frac{\partial R_2}{\partial T}\right)_{T=T^*}\tag{11.620}$$

的符号. 从图 11.29 看出 $\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{T=T_1^*,T_3^*}<0$，$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{T=T_2^*}>0$，因而平衡态 $T=T_1^*$ 和 $T=T_3^*$ 是稳定的，而 $T=T_2^*$ 是不稳定的.

§ 11.9 大气流场的拓扑(topology)结构

由于大气运动的非线性和复杂性，在大气中存在着丰富多彩的流场斑图(pattern)，如气旋、反气旋、台风、龙卷风等等. 本节对大气流场构成的自治系统作定性分析，说明大气中的流场斑图有着清晰的物理基础和拓扑结构.

一、二维流场的拓扑结构

在(x,y)平面上，二维流场可表为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u(x,y),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v(x,y).\end{cases}\tag{11.621}$$

一般情况下，u 和 v 均是 x 和 y 的非线性函数，因而(11.621)式就是 x 和 y 的非线性常微分方程组. 因为(11.621)式右端不明显含时间 t，所以，它是一个二维的自治动力系统.

设自治系统(11.621)右端为零(即无风的状态)的位置是

$$(x^*,y^*)=(0,0),\tag{11.622}$$

它就是动力系统的平衡点. 在该点附近作 Taylor 展开到一次项，方程组(11.621)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{(0,0)}\cdot x+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_{(0,0)}\cdot y,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_{(0,0)}\cdot x+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_{(0,0)}\cdot y.\end{cases}\tag{11.623}$$

方程组(11.623)右端的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{J}\equiv\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}_{(0,0)}.\tag{11.624}$$

若令

$$\zeta\equiv\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y},\quad D\equiv\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y},\quad F\equiv\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y},\quad G\equiv\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},\tag{11.625}$$

ζ 为垂直涡度分量，D 为水平速度散度，F 和 G 均为变形度(见(2.203)式和(2.208)式). 这样，(11.624)式可以改写为

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_1+\boldsymbol{J}_2,\tag{11.626}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_1 \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\zeta \\ \frac{1}{2}\zeta & 0 \end{bmatrix}_{(0,0)}, \quad \boldsymbol{J}_2 \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}G \\ \frac{1}{2}G & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}_{(0,0)}. \tag{11.627}$$

$\boldsymbol{J}_1$ 是反对称矩阵，它由垂直涡度分量 ζ 决定，称为旋转矩阵或涡度矩阵；$\boldsymbol{J}_2$ 是对称矩阵，它由水平速度散度场和变形场决定，称为变形矩阵. 事实上，$\boldsymbol{J}_2$ 还可以写为

$$\boldsymbol{J}_2 = \boldsymbol{J}_2^{(1)} + \boldsymbol{J}_2^{(2)}, \tag{11.628}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_2^{(1)} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{2}D & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}D \end{bmatrix}_{(0,0)}, \quad \boldsymbol{J}_2^{(2)} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{2}F & \frac{1}{2}G \\ \frac{1}{2}G & -\frac{1}{2}F \end{bmatrix}_{(0,0)}. \tag{11.629}$$

这样就能很清楚地看出 $\boldsymbol{J}_2$ 由水平散度场和变形场决定.

由(11.624)式或由(11.626)式、(11.627)式、(11.628)式和(11.629)式可知 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的特征值 λ 满足

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(0,0)} - \lambda & \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(0,0)} \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(0,0)} & \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{(0,0)} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(D_0 + F_0) - \lambda & -\frac{1}{2}(\zeta_0 - G_0) \\ \frac{1}{2}(\zeta_0 + G_0) & \frac{1}{2}(D_0 - F_0) - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{11.630}$$

其中 D_0 和 ζ_0 分别表示在平衡点处的水平速度散度和垂直涡度，而 F_0 和 G_0 为平衡点处的变形度. 由(11.630)式求得特征方程为

$$\lambda^2 - D_0\lambda + \frac{1}{4}(D_0^2 - F_0^2 + \zeta_0^2 - G_0^2) = 0. \tag{11.631}$$

而特征值为

$$\lambda = \frac{D_0 \pm \sqrt{D_0^2 - (D_0^2 - F_0^2 + \zeta_0^2 - G_0^2)}}{2} = \frac{D_0 \pm \sqrt{(F_0^2 + G_0^2) - \zeta_0^2}}{2}. \tag{11.632}$$

(11.631)式与(11.505)式比较知

$$p = -D_0, \quad q = \frac{1}{4}(D_0^2 - F_0^2 + \zeta_0^2 - G_0^2) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(0,0)}, \tag{11.633}$$

而(11.632)式与(11.509)式比较知

$$\Delta \equiv p^2 - 4q = (F_0^2 + G_0^2) - \zeta_0^2. \tag{11.634}$$

这样，可以以 $(-D_0)$ 为横轴，$\frac{1}{4}(D_0^2 - F_0^2 + \zeta_0^2 - G_0^2)$ 为纵轴画出与图 11.22 完全一

样的图像(此处省略),图中 $\Delta=0$ 的抛物线应满足

$$F_0^2 + G_0^2 = \zeta_0^2. \tag{11.635}$$

参考图 11.22,在图的第一象限,由于 $(-D_0)>0$,即 $D_0<0$,在物理上它表示是流场水平向内辐合到平衡点,而且由(11.632)式知,当 $F_0^2+G_0^2>\zeta_0^2$(意味着变形场大于涡度场)时,λ 为两个负实根,平衡点为稳定结点,此时流线是纯粹的水平辐合场,在天气图上较少见;但当 $F_0^2+G_0^2<\zeta_0^2$(意味着变形场小于涡度场)时,λ 为二共轭复根,且实部为负,平衡点为稳定焦点,此时流线是螺旋水平辐合到平衡点,实际地面天气图上的气旋就属于这一类斑图.

在图的第一、第二象限交界的纵轴上 $D_0=0$,且 $F_0^2+G_0^2<\zeta_0^2$(意味着变形场小于涡度场),λ 为二共轭纯虚根,平衡点为中心点,实际高空天气图上的低压系统和高压系统就属于这一类斑图.

在图的第二象限,由于 $(-D_0)<0$,即 $D_0>0$,在物理上它表示是流场从平衡点水平向外辐散,其结点和焦点都是不稳定的,特别是在焦点附近,流线从平衡点螺旋向外水平辐散,实际地面天气图上的反气旋就属于这一类斑图.

在图的第三、第四象限 $q\equiv\frac{1}{4}(D_0^2-F_0^2+\zeta_0^2-G_0^2)<0$,则 $F_0^2+G_0^2>\zeta_0^2+D_0^2>\zeta_0^2$,$F_0^2+G_0^2-\zeta_0^2>D_0^2$,因而 λ 为一正实根和一负实根,平衡点为鞍点,它永远是不稳定的.实际高空天气图上高压与低压系统之间的流形就属于这一类斑图.

二维流场拓扑结构的简单例子可参见 § 2.5 和本章末习题 13.

二、三维流场的拓扑结构

在空间 (x,y,z),三维流场可表示为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(x,y,z), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v(x,y,z), \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = w(x,y,z). \end{cases} \tag{11.636}$$

在一般情况下,(u,v,w) 受下列连续性方程控制

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{11.637}$$

非线性方程组(11.636)右端不明显含时间 t,所以,它是一个三维的自治动力系统.与二维自治动力系统类似,我们设方程组(11.636)右端为零的平衡点是

$$(x^*, y^*, z^*) = (0,0,0), \tag{11.638}$$

它就是流体的静止状态.类似,在平衡点附近作 Taylor 展开到一次项,方程组(11.636)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{(0,0,0)}\cdot x+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_{(0,0,0)}\cdot y+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)_{(0,0,0)}\cdot z,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_{(0,0,0)}\cdot x+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_{(0,0,0)}\cdot y+\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)_{(0,0,0)}\cdot z,\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_{(0,0,0)}\cdot x+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_{(0,0,0)}\cdot y+\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_{(0,0,0)}\cdot z.\end{cases} \tag{11.639}$$

方程组(11.639)右端的Jacobi矩阵为

$$\boldsymbol{J}\equiv\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z}\\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}_{(0,0,0)}. \tag{11.640}$$

类似，上述Jacobi矩阵可以写为

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_1+\boldsymbol{J}_2,\quad \boldsymbol{J}_2=\boldsymbol{J}_2^{(1)}+\boldsymbol{J}_2^{(2)}, \tag{11.641}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_1\equiv\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{2}\zeta & \dfrac{1}{2}\eta\\ \dfrac{1}{2}\zeta & 0 & -\dfrac{1}{2}\xi\\ -\dfrac{1}{2}\eta & \dfrac{1}{2}\xi & 0\end{bmatrix}_{(0,0,0)},\quad \boldsymbol{J}_2\equiv\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}G_3 & \dfrac{1}{2}G_2\\ \dfrac{1}{2}G_3 & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}G_1\\ \dfrac{1}{2}G_2 & \dfrac{1}{2}G_1 & \dfrac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}_{(0,0,0)}. \tag{11.642}$$

而

$$\boldsymbol{J}_2^{(1)}\equiv\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}D & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{2}D & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2}D\end{bmatrix}_{(0,0,0)},\quad \boldsymbol{J}_2^{(2)}\equiv\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}F_3 & \dfrac{1}{2}G_3 & \dfrac{1}{2}G_2\\ \dfrac{1}{2}G_3 & -\dfrac{1}{2}F_3 & \dfrac{1}{2}G_1\\ \dfrac{1}{2}G_2 & \dfrac{1}{2}G_1 & \dfrac{1}{2}(F_2-F_1)\end{bmatrix}_{(0,0,0)}, \tag{11.643}$$

这里

$$D\equiv\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y},\quad (\xi,\eta,\zeta)\equiv\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{11.644}$$

分别表示水平速度散度和三维涡度，而

$$(F_1,F_2,F_3)\equiv\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z},\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{11.645}$$

和

$$(G_1, G_2, G_3) \equiv \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{11.646}$$

表示变形场. 注意(11.643)式用到了(11.637)式，且有

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0. \tag{11.647}$$

显然，J_1 是反对称矩阵，它由涡度场决定，称为旋转矩阵或涡度矩阵；J_2，$J_2^{(1)}$ 和 $J_2^{(2)}$ 均是对称矩阵，它由水平速度散度场和变形场决定，均称为变形矩阵.

为了简化起见，我们不考虑$\frac{\partial w}{\partial x}$和$\frac{\partial w}{\partial y}$，而将矩阵(11.640)改写为

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ 0 & 0 & -D \end{bmatrix}_{(0,0,0)}, \tag{11.648}$$

它的特征值 λ 满足

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} - \lambda & \frac{\partial v}{\partial z} \\ 0 & 0 & -D - \lambda \end{vmatrix}_{(0,0,0)} = 0. \tag{11.649}$$

由此求得特征方程为

$$(\lambda + D_0)\left[\lambda^2 - D_0\lambda + \frac{1}{4}(D_0^2 - F_0^2 + \zeta_0^2 - G_0^2)\right] = 0. \tag{11.650}$$

其中用到了(11.633)的第二式.

由此便知，三维流场有三个特征根. 在简化的情况下，有两个根完全同(11.632)式，即

$$\lambda_{1,2} = \frac{D_0 \pm \sqrt{(F_0^2 + G_0^2) - \zeta_0^2}}{2}, \tag{11.651}$$

而第三个根为

$$\lambda_3 = -D_0. \tag{11.652}$$

λ_3 完全由水平速度散度 D_0 决定. 当 $D_0 > 0$ 时(表示平衡点水平辐散)，$\lambda_3 < 0$；当 $D_0 < 0$ 时(表示平衡点水平辐合)，$\lambda_3 > 0$. 在物理上，因为流体要遵守连续性方程，因此，水平速度的辐散辐合，必然要产生 z 方向上的垂直运动，因而形成三维流场的斑图，特别是三维流场的螺旋斑图. 下面举两例说明.

[例 1] 三维流场

$$\begin{cases} u = ax - by, \\ v = bx + ay, \\ w = -2a(z - z_c), \end{cases} \tag{11.653}$$

其中 a,b 和 z_c 是非零常数.

由(11.653)式求得

$$D=2a,\quad \zeta=2b,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=-2a=-D,\quad F=0,\quad G=0. \tag{11.654}$$

因而,三维流场(11.653)满足连续性方程(11.637),且无变形场.若令

$$(u,v,w)=(u_1+u_2,v_1+v_2,w_1+w_2), \tag{11.655}$$

其中

$$\begin{cases}u_1=ax,\\ v_1=ay,\\ w_1=-2a(z-z_c);\end{cases}\qquad \begin{cases}u_2=-by,\\ v_2=bx,\\ w_2=0.\end{cases} \tag{11.656}$$

显然,三维流场(u_1,v_1,w_1)的 $D_1=2a,\xi_1=0$,即它是无旋有散场;而三维流场(u_2,v_2,w_2)的 $D_2=0,\zeta_2=2b$,即它是有旋无散场.

尽管方程组(11.653)的平衡点是$(x^*,y^*,z^*)=(0,0,z_c)$,但若将 z 轴作平移,平衡点仍可写为$(x^*,y^*,z^*)=(0,0,0)$.由(11.651)式和(11.652)式求得

$$\lambda_{1,2}=a\pm \mathrm{i}b\quad (b>0),\quad \lambda_3=-2a. \tag{11.657}$$

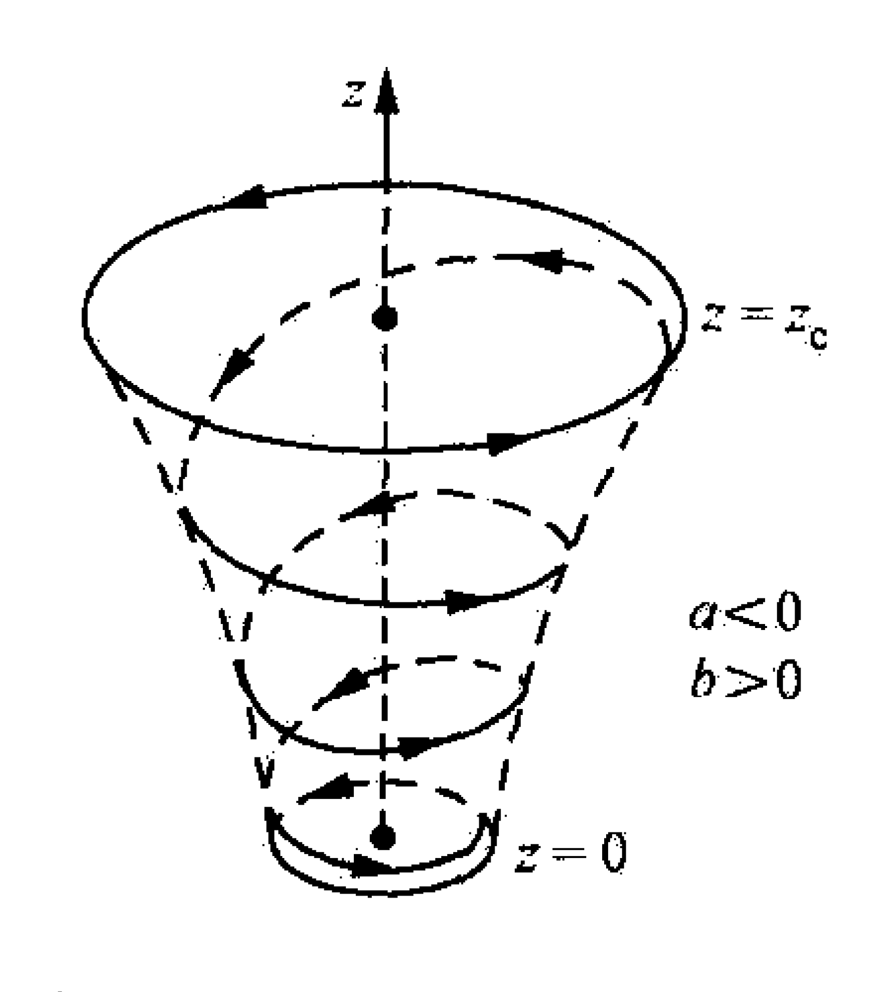


图 11.30 龙卷风的螺旋斑图

上式表明:当 $a<0$ 时(表征水平速度辐合,$D<0$),$\lambda_{1,2}$ 的实部为负,$\lambda_3>0$,它表示在(x,y)平面上的螺旋向内辐合,必然导致平衡点附近 z 方向上的垂直运动($z<z_c$,$w<0$;在 $z>z_c,w>0$);而当 $a>0$ 时(表征水平速度辐散,$D<0$),$\lambda_{1,2}$ 的实部为正,$\lambda_3<0$,它表示平衡点附近 z 方向上的垂直运动($z<z_c,w>0$;在 $z>z_c,w<0$)引起(x,y)平面上从平衡点螺旋向外辐散.大气中的龙卷风(tornado)就属于这一类斑图,见图 11.30.图中 $a<0,z=z_c$ 可视为是对流云云底的高度.

至于龙卷风的漏斗型结构,可以由方程组(11.653)化成柱坐标(r,θ,z)的形式给以说明.因为由(1.195)式

$$\begin{cases}v_r\equiv\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{r}(x\dot{x}+y\dot{y}),\\ v_\theta\equiv r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{r}(x\dot{y}-y\dot{x}),\\ v_z\equiv w\end{cases} \tag{11.658}$$

$$\left(\dot{x}\equiv\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\equiv u,\dot{y}\equiv\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\equiv v\right),$$

则方程组(11.653)化为

$$\begin{cases} v_r = ar, \\ v_\theta = br, \\ w = -2a(z-z_c). \end{cases} \tag{11.659}$$

而且因为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{11.660}$$

则可引入流函数 ψ 使得

$$rv_r = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad rw = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \tag{11.661}$$

因而

$$\psi = \int \frac{\partial \psi}{\partial r}\delta r + \frac{\partial \psi}{\partial z}\delta z = \int rw\delta r - rv_r\delta z = -ar^2(z-z_c) + 常数. \tag{11.662}$$

在(r,z)平面上，流线 ψ=常数就是如图 11.30 所示的漏斗型.

[例 2] 三维流场

$$\begin{cases} u = (ax-by)\cos nz, \\ v = (bx+ay)\cos nz, \\ w = -\dfrac{2a}{n}\sin nz \end{cases} \quad (n = \pi/H), \tag{11.663}$$

其中 a 和 b 是非零常数.

由(11.663)式求得

$$D = 2a\cos nz, \quad \zeta = 2b\cos nz, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -2a\cos nz = -D, \quad F = 0, \quad G = 0, \tag{11.664}$$

因而，三维流场(11.663)满足连续性方程(11.637)，且无变形场. 在 $z=0$ 处，$D_0=2a$ ($a<0$, $D_0<0$，水平辐合；$a>0$, $D_0>0$，水平辐散)，$\zeta_0=2b$ ($b>0$, $\zeta_0>0$，正涡度或气旋式涡度；$b<0$, $\zeta_0<0$，负涡度或反气旋式涡度). 在 $z=\dfrac{H}{2}$ 处，$D_{\frac{H}{2}}=0$, $\zeta_{\frac{H}{2}}=0$. 在 $z=H$ 处 $D_H=-2a=-D_0$, $\zeta_H=-2b=-\zeta_0$. 而且在 $z=0$ 处 $w_0=0$，在 $z=H$ 处 $w_H=0$，即三维流场(11.663)也满足下界和上界的边条件.

显然，方程组(11.663)的平衡点为$(x^*,y^*,z^*)=(0,0,0)$. 由(11.651)式和(11.652)式求得

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib \quad (b>0), \quad \lambda_3 = -2a. \tag{11.665}$$

与(11.657)式完全相同. 图 11.31 描绘的便是台风(Typhoon)的螺旋斑图. 图中台风下层是正涡度(或气旋式

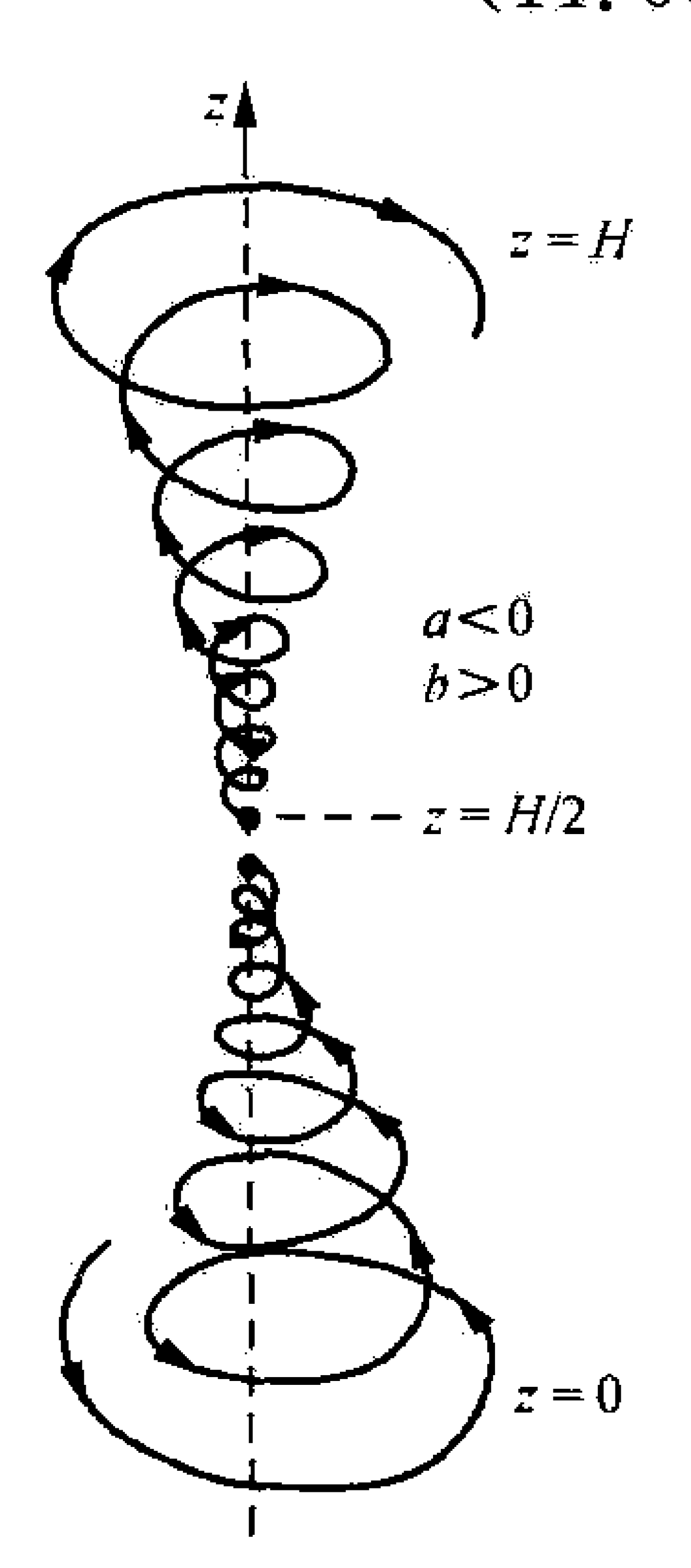


图 11.31 台风的螺旋斑图

涡度)和水平辐合,而台风上层是负涡度(反气旋式涡度)和水平辐散.下层空气螺旋向内,引起台风中心附近空气的上升运动,到中层垂直涡度和水平散度都变为零,但垂直运动达到极大值.而台风上层空气螺旋向外,引起台风外围空气的下沉运动.

复习思考题

1. 稳定度的研究有何意义?一般研究稳定度有哪些方法?
2. 层结稳定度、惯性稳定度、波的稳定度三者有何异同?
3. 用线性化的方程组讨论稳定度有何局限性?
4. 非线性稳定度会出现哪些现象?
5. 说明风速切变$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y},\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)$,重力 g,层结参数 N^2,Rossby 参数对波的稳定与不稳定各起什么作用?
6. 什么是正压不稳定?什么是斜压不稳定?两者在能源供给上有何不同?
7. 在正压和斜压大气中,流场具有什么样的结构容易产生 Rossby 波的不稳定?斜压大气中,温度场与流场的配置具有什么样的特点时,容易产生 Rossby 波的不稳定?
8. 什么是空间稳定度?它与时间稳定度有何不同?
9. 什么叫平衡点?什么叫 Lyapunov 意义下的稳定与不稳定?
10. 叙述鞍点、结点、中心、焦点等对稳定度的作用.

习 题

1. 证明:当 $\bar{u}_1=\bar{u}_2=0$ 时,分层流体中重力内波的圆频率 ω 满足

$$\omega^2=\frac{gk(\rho_1-\rho_2)T_1T_2}{\rho_1T_2+\rho_2T_1},$$

其中

$$T_1=\tanh kH_1,\quad T_2=\tanh kH_2,$$

并证明:

(1) 浅水极限,即

$$\lim_{k\to0}\omega^2=k^2c_0^2-2\gamma c_0k^4,\quad \lim_{k\to0}\omega=kc_0-\gamma k^3,$$

其中

$$c_0^2=\frac{g(\rho_1-\rho_2)H_1H_2}{\rho_1H_2+\rho_2H_1},\quad \gamma=\frac{1}{6}c_0H_1H_2\frac{\rho_1H_1+\rho_2H_2}{\rho_1H_2+\rho_2H_1},$$

$$2\gamma c_0=\frac{1}{3}c_0^2H_1H_2\frac{\rho_1H_1+\rho_2H_2}{\rho_1H_2+\rho_2H_1};$$

(2) 深水极限，即

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ H_2\text{固定}}}\{\lim_{\substack{H_1\to\infty\\ k,H_2\text{固定}}}\omega^2\} = k^2c_0^2 - 2\beta c_0 k^3\,\mathrm{sgn}k,$$

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ H_2\text{固定}}}\{\lim_{\substack{H_1\to\infty\\ k,H_2\text{固定}}}\omega\} = kc_0 - \beta k\mid k\mid,$$

其中 $c_0^2=g^*H_2,\beta=\frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_2}c_0H_2,g^*=\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_2}g$.

2. 证明：当 $\rho_1=\rho_2$ 时，分层流中重力内波波速满足：

(1) $kH_1\ll 1,kH_2\ll 1$ 时，

$$c = \bar{u} + \frac{H_1-H_2}{H_1+H_2}\hat{u} \pm \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{4H_1H_2}}{H_1+H_2}\hat{u};$$

(2) $kH_1\gg 1,kH_2\gg 1$ 时，

$$c = \bar{u} + \mathrm{i}\hat{u},$$

其中 $\bar{u}=(\bar{u}_1+\bar{u}_2)/2,\hat{u}=(\bar{u}_2-\bar{u}_1)/2$.

3. 证明：在一般情况下，Kelvin-Helmholtz 不稳定波波速满足下列 Howard 半圆定理

$$(c_r-\bar{u})^2 + c_i^2 \leqslant \hat{u}^2,$$

其中 $\bar{u}=(\bar{u}_1+\bar{u}_2)/2,\hat{u}=(\bar{u}_2-\bar{u}_1)/2$. 上式表明：在相速度 c 的复平面内，不稳定的 K-H 波的 c 必须位于以 $(\bar{u},0)$ 为圆心，半径为 $\hat{u}$ 的上半圆内.

4. Eady 稳定度问题：设大气介于地面 $(z=0)$ 与对流层顶 $(z=H)$ 之间，设地面基本气流 $\bar{u}_0=0$，对流层顶基本气流为 $\bar{u}_H=$常数，假定 $s\equiv\partial\bar{u}/\partial z=\bar{u}_H/H$. 又假定大气大尺度运动的准地转模式成立，但忽略 β 的作用，又设 $N^2=$常数，上下边界条件都取为 $w=0$，试讨论此时的斜压稳定度.

提示：(1) 线性化的准地转位涡度方程为 $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\nabla_h^2\psi+\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=0$；(2) 应用线性化的绝热方程 $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{N^2}{f_0}w=0$，转换 $w=0$ 的边条件；(3) 应用正交模方法，设 $\psi=\Psi(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly-\omega t)}$ 求解，通解写为 $\Psi(z)=A\cosh\mu z+B\sinh\mu z,\mu^2=N^2K_h^2/f_0^2$；(4) 令 $\omega=kc$，利用边条件定出 c 满足

$$\mu^2c^2-\mu^2sHc+(\mu Hs^2\coth\mu H-s^2)=0,$$

利用恒等式 $\coth x=\frac{1}{2}\left(\tanh\frac{x}{2}+\coth\frac{x}{2}\right)$ 求出

$$c=\frac{\bar{u}_H}{2}\pm\frac{\bar{u}_H}{\mu H}\sqrt{\left(\frac{\mu H}{2}-\coth\frac{\mu H}{2}\right)\left(\frac{\mu H}{2}-\tanh\frac{\mu H}{2}\right)};$$

(5) 注意 $x\geqslant\tanh x$，$\frac{x}{2}=\coth\frac{x}{2}$ 的解为 $x_c=2.3994$，不稳定必须有 $\frac{\mu H}{2}<\coth\frac{\mu H}{2}$，

则 $\mu H<x_c$，还可以求出增长率为

$$\omega_i \equiv kc_i = \frac{k\bar{u}_H}{\mu H}\sqrt{\left(\coth\frac{\mu H}{2}-\frac{\mu H}{2}\right)\left(\frac{\mu H}{2}-\tanh\frac{\mu H}{2}\right)}.$$

5. 证明：当 $\beta_0=0$ 时，郭晓岚定理和 Fjörtoft 定理化为下列 Rayleigh 定理：即平行切变流不稳定的必要条件为

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}\text{ 在}(y_1,y_2)\text{ 改变正负号；}\quad \bar{u}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}\text{ 在}(y_1,y_2)\text{ 负相关.}$$

上式前者说明：不稳定的平行切变流 $\bar{u}(y)$ 必须有拐点 $y=y_c$，使得 $\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}=0$，设在拐点处 $\bar{u}=\bar{u}_c$，则上式后者可改写为

$$(\bar{u}-\bar{u}_c)\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}\text{ 在}(y_1,y_2)\text{ 负相关.}$$

6. 证明 $\hat{u}_c=\dfrac{\beta_0\lambda_0^2}{K_h^2\cdot\sqrt{4\lambda_0^4-K_h^4}}$ 随 K_h^2 变化的极小值点是 $(\sqrt{2}\lambda_0^2,\beta_0/2\lambda_0^2)$，即证明：当 $K_h^2=\sqrt{2}\lambda_0^2$ 时，$\hat{u}_c$ 达极小，且

$$\hat{u}_{c_{\min}} = \beta_0/2\lambda_0^2.$$

7. 证明：当 $K_h^2<2\lambda_0^2$ 和 $\hat{u}<\hat{u}_c$ 时的稳定斜压 Rossby 波波速 c 满足

$$c_1<c<c_2,$$

其中 $c_1=\bar{u}-\dfrac{\beta_0}{K_h^2}$，$c_2=\bar{u}-\dfrac{\beta_0}{K_h^2+2\lambda_0^2}$.

8. 讨论 $l=0$ 时的斜压两层模式 Rossby 波的稳定度.

(1) 写出波速 c 的公式和稳定度判据；

(2) 证明：最不稳定的斜压 Rossby 波 $\left(\dfrac{\partial kc_i}{\partial h}=0\right)$ 满足

$$\hat{u}^2=\frac{\beta_0^2\lambda_0^4(3k^2+2\lambda_0^2)}{k^4(k^2+2\lambda_0^2)(k^4+4\lambda_0^2k^2-4\lambda_0^4)};$$

(3) 证明：在 $\beta_0=0$，当 $k^2=2\lambda_0^2(\sqrt{2}-1)$，斜压不稳定的增长率最大. 若取 $\lambda_0=\sqrt{2}\times10^{-6}\,\mathrm{m}^{-1}$，$\hat{u}=20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求波增大 e 倍所需要的时间；

(4) 不稳定波的高低层振幅满足

$$\hat{\psi}_2/\hat{\psi}_1 = re^{ik\delta},$$

其中

$$r=\sqrt{\left(2\hat{u}+\frac{\beta_0}{k^2}\right)\Big/\left(2\hat{u}-\frac{\beta_0}{k^2}\right)},\quad \tan k\delta=\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon}\frac{c_i}{\hat{u}}\quad\left(0<\varepsilon\equiv\frac{k^2}{\lambda_0^2}<2\right),$$

并证明：当 $k^2=\sqrt{2}\lambda_0^2$，$\hat{u}=\hat{u}_{c\min}=\dfrac{\beta_0}{2\lambda_0^2}$ 时，$r=\sqrt{2}+1$，$\tan k\delta=0$.

9. 应用 p 坐标系中的线性的准地转模式方程组(见第七章习题 12),建立描写斜压两层模式 Rossby 波的方程组,说明其形式完全同方程组(11.351),只是方程组(11.351)中的 ψ_1' 和 ψ_2' 现在分别改为 ψ_3' 和 ψ_1',分别表示 $p_3=750$ hPa 和 $p_1=250$ hPa 的流场,且 λ_0^2 改为 $\lambda_1^2\equiv(f_0/c_a)^2$.

提示:(1) 自大气上界到地面等间隔分层,分点为 0,1,2,3,4,间隔 $\Delta p=250$ hPa,参见图 7.14;

(2) 将涡度方程写在第 1 和第 3 层上,绝热方程写在第 2 层上;

(3) 对 p 的微商用差商代替: $\left(\dfrac{\partial\psi'}{\partial p}\right)_2\approx-\dfrac{\psi_1'-\psi_3'}{2\Delta p}$, $\left(\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial p}\right)_2\approx-\dfrac{\bar{u}_1-\bar{u}_3}{2\Delta p}$,并利用边条件 $\omega_0'=\omega_4'=0$,有 $\left(\dfrac{\partial\omega'}{\partial p}\right)_1\approx\dfrac{\omega_2'}{2\Delta p}$, $\left(\dfrac{\partial\omega'}{\partial p}\right)_3\approx-\dfrac{\omega_2'}{2\Delta p}$,且取 $\psi_2'=\dfrac{1}{2}(\psi_1'+\psi_3')$, $\bar{u}_2=\dfrac{1}{2}(\bar{u}_1+\bar{u}_3)$.

10. 利用上题结果,证明当 $l=0$ 时:

(1) 不稳定波的高低层流动振幅满足

$$\hat{\psi}_1/\hat{\psi}_3=r\mathrm{e}^{ik\delta},$$

其中

$$r=\sqrt{\left(2\hat{u}+\frac{\beta_0}{k^2}\right)\Big/\left(2\hat{u}-\frac{\beta_0}{k^2}\right)},\quad \tan k\delta=\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon}\frac{c_i}{\hat{u}}\quad\left(0<\varepsilon\equiv\frac{k^2}{\lambda_1^2}<2\right);$$

(2) 平均层流场

$$\psi_2'=\hat{\psi}_2\mathrm{e}^{ik(x-ct+\delta_\psi)},$$

其中

$$\hat{\psi}_2=\frac{1}{2}\hat{\psi}_3\sqrt{2(\varepsilon+2)\hat{u}\Big/\left(2\hat{u}-\frac{\beta_0}{k^2}\right)},\quad \tan k\delta_\psi=\frac{\varepsilon\hat{u}}{\varepsilon\hat{u}+\left(2\hat{u}-\dfrac{\beta_0}{k^2}\right)}\tan k\delta;$$

(3) 平均层温度场

$$T_2'=\frac{f}{R}(\psi_1'-\psi_3')=\hat{T}_2\mathrm{e}^{ik(x-ct+\delta_T)},$$

其中

$$\hat{T}_2=\frac{f}{R}\hat{\psi}_3\sqrt{2\hat{u}(2-\varepsilon)\Big/\left(2\hat{u}-\frac{\beta_0}{k^2}\right)},\quad \tan k\delta_T=\frac{\varepsilon\hat{u}}{\varepsilon\hat{u}-\left(2\hat{u}-\dfrac{\beta_0}{k^2}\right)}\tan k\delta,$$

或

$$\tan k\delta_T=\frac{\varepsilon\hat{u}+\left(2\hat{u}-\dfrac{\beta_0}{k^2}\right)}{\varepsilon\hat{u}-\left(2\hat{u}-\dfrac{\beta_0}{k^2}\right)}\tan k\delta_\psi;$$

(4) 平均垂直 p 速度场

$$\omega_2' = \hat{\omega}_2 e^{ik(x-ct+\delta_\omega)},$$

其中

$$\hat{\omega}_2 = \frac{2\Delta p}{f} k^2 \hat{\psi}_3 \sqrt{\frac{2\hat{u}(2\hat{u}+\beta_0/k^2)}{\varepsilon+2}}, \quad \tan k\delta_\omega = \frac{\varepsilon\hat{u} + \left(2\hat{u} - \frac{\beta_0}{k^2}\right)}{\varepsilon\hat{u} - \left(2\hat{u} - \frac{\beta_0}{k^2}\right)} \tan\left(k\delta_\phi + \frac{\pi}{2}\right);$$

(5) 平均层扰动动能和扰动有效势能分别为

$$K_2' \equiv K_1' + K_3' = \frac{1}{2}\left[\overline{\left(\frac{\partial \psi_1'}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial \psi_3'}{\partial x}\right)^2}\right],$$

$$A_2' \equiv \frac{f_0^2}{2\sigma}\overline{\left(\frac{\partial \psi'}{\partial p}\right)^2} = \frac{\lambda_1^2}{2}\overline{(\psi_1' - \psi_3')^2},$$

而它们的变化可表为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial K_2'}{\partial t} = -\dfrac{R}{\Delta p}\overline{\omega_2' T_2'}, \\ \dfrac{\partial A_2'}{\partial t} = \dfrac{2\lambda_1^2 R}{f_0}\hat{u}\,\overline{v_2' T_2'} + \dfrac{R}{\Delta p}\overline{\omega_2' T_2'}. \end{cases}$$

11. 纯斜压情况下 Rossby 波的稳定度问题. 对于方程(11.251),设

$$\Psi(y,z) = \hat{\Psi}(z)\sin ly,$$

证明它可以化为

$$(\bar{u}-c)\left(\frac{d^2\hat{\Psi}}{dz^2} - a^2\hat{\Psi}\right) + b\hat{\Psi} = 0,$$

其中

$$a^2 = \frac{N^2}{f_0^2}(k^2+l^2) + \frac{\sigma_0^2}{4}, \quad b = \frac{N^2}{f_0^2}\beta_0 - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + \sigma_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z};$$

并利用(11.261)式证明纯斜压 Rossby 波不稳定的必要条件为

$$\int_0^H \frac{b\,|\hat{\Psi}|^2}{|\bar{u}-c|^2}\delta z + \left[\frac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}|\hat{\Psi}|^2}{|\bar{u}-c|^2}\right]_0^H = 0,$$

因而有下列三种情况:

(1) $b>0$,要求 $\left(\dfrac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}|\hat{\Psi}|^2}{|\bar{u}-c|^2}\right)_{z=0} > \left(\dfrac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}|\hat{\Psi}|^2}{|\bar{u}-c|^2}\right)_{z=H}$;

(2) $b<0$,要求 $\left(\dfrac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}|\hat{\Psi}|^2}{|\bar{u}-c|^2}\right)_{z=0} < \left(\dfrac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}|\hat{\Psi}|^2}{|\bar{u}-c|^2}\right)_{z=H}$;

(3) $b=0$,要求 $\left(\dfrac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}|\hat{\Psi}|^2}{|\bar{u}-c|^2}\right)_{z=0} = \left(\dfrac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}|\hat{\Psi}|^2}{|\bar{u}-c|^2}\right)_{z=H}$.

12. Charney 临界层问题. 依上题,若设

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + sz, \quad s \equiv \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \text{常数},$$

则方程化为

$$(\bar{u}_0 + sz - c)\left(\frac{d^2\hat{\Psi}}{dz^2} - a^2\hat{\Psi}\right) + b\hat{\Psi} = 0, \quad b = \frac{N^2}{f_0^2}\beta_0 + s\sigma_0.$$

(1) 令 $\xi = a\left(z + \frac{\bar{u}_0 - c}{s}\right)$,证明方程化为

$$\xi \frac{d^2\hat{\Psi}}{d\xi^2} + \left(\frac{b}{as} - \xi\right)\hat{\Psi} = 0;$$

(2) 再令 $\eta = 2\xi, \hat{\Psi} = \eta e^{-\frac{\eta}{2}}\Phi(\eta)$,证明方程化为 Kummer 方程(合流超几何方程)

$$\eta \frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + (2 - \eta)\frac{d\Phi}{d\eta} - \alpha\Phi = 0,$$

其中

$$\alpha = 1 - \frac{b}{2as},$$

并求解.

13. 用二维流场的拓扑结构分析 §2.5 中的所有例子.

14. 考虑 Rayleigh 摩擦,$(F_x, F_y) = -k(u, v)$,并设 $u_g = -\frac{1}{f_0\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, v_g = \frac{1}{f_0\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$,则水平气压梯度力、Coriolis 力、摩擦力三者平衡的水平运动方程可以写为

$$-f_0 v = -f_0 v_g - ku, \quad f_0 u = f_0 u_g - kv,$$

因而有

$$u = \frac{f_0}{k^2 + f_0^2}(f_0 u_g - k v_g),$$

$$v = \frac{f_0}{k^2 + f_0^2}(k u_g + f_0 v_g),$$

若设 $u_g = -by, v_g = bx$(b 为常数),试分析该二维流场的拓扑结构.

15. 证明:三维流场

$$u = -by, \quad v = bx, \quad w = c \quad (b, c \text{ 为非零常数})$$

在柱坐标系中可以化为

$$v_r = 0, \quad v_\theta = br, \quad w = c,$$

并由上述方程组的解证明

$$x = a\cos bt, \quad y = a\sin bt, \quad z = ct \quad (a \text{ 为非零常数}).$$

因 $x^2+y^2=a^2$，$y/x=\tan bt=\tan\dfrac{b}{c}z$，上述曲线称为圆柱螺旋线(circular helix)或普通螺旋线(right helix).上述 x,y,z 构成的方程组称为圆柱螺旋线的参数形式.

16. 求方程组(11.659)的解，并证明

$$x=Ae^{at}\cos bt,\quad y=Ae^{at}\sin bt,\quad z-z_c=Be^{-2at}\quad (A,B\text{ 为非零常数})$$

和

$$r=Ce^{\frac{a}{b}\theta}\quad (C\text{ 为非零常数}),$$

上式表征的曲线称为对数螺线(logarithmic spiral)或等角螺线(equiangular spiral).因 $x^2+y^2=\dfrac{A^2B}{z-z_c}$，$y/x=\tan bt=\tan\left(\dfrac{b}{2a}\ln\dfrac{B}{z-z_c}\right)$，则三维曲线称为圆锥螺旋线(conical helix)，上述 x,y,z 构成的方程组称为圆锥螺旋线的参数形式.

17. 证明：在 t 很小时，上题圆锥螺旋线可改写为

$$x_1=Aat\cos bt,\quad y_1=Aat\sin bt,\quad z_1=-2Bat,$$

其中 $x_1=x-A$，$y_1=y-A$，$z=z-z_c-B$. 它满足 $x_1^2+y_1^2=\left(\dfrac{A}{2B}\right)^2z_1^2$，$y_1/x_1=\tan bt=\tan\left(-\dfrac{b}{2Ba}z_1\right)$.

18. 将方程组(11.663)写为柱坐标的形式

(1) 证明：$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0$，而流函数为

$$\psi=-\frac{ar^2}{n}\sin nz+\text{常数};$$

(2) 证明：$r=Ce^{\frac{a}{b}\theta}$.

第十二章　地转适应理论

本章的主要内容有：

论述大气大尺度运动为什么经常处于准地转平衡状态；

说明适应过程和演变过程的基本概念，并分析大尺度天气演变的物理本质；

说明地转适应过程和准地转演变过程的可分性，并引入“时间和边界层”的概念；

建立地转适应的尺度理论，即说明初始扰动尺度与地转适应方向的关系；

阐述大尺度天气形势变化的分解，说明演变过程和适应过程的联结.

§12.1　适应过程和演变过程的基本概念

一、问题的提出

从理论和实践我们都知道，在中高纬的自由大气中，大气大尺度运动处于准地转平衡状态，这是大气大尺度运动的一个重要规律. 然而大气中却又有局部的和明显的地转偏差不断出现和迅速消失. 因此，大气大尺度运动一方面维持着准地转平衡运动，但另一方面它又不能完全是地转的平衡运动，因为那样就没有天气的变化和发展了. 所以，地转平衡是重要的，地转平衡的破坏也是重要的，而且在运动中平衡是相对的、暂时的，不平衡则是永久起作用的. 显然，在大气大尺度运动中地转平衡的建立、破坏和再建立的过程是天气变化的一个极为重要的动力过程. 这就是恩格斯所说的“平衡中的运动和运动中的平衡”.

大气运动受太阳辐射以及气压梯度力、重力和 Coriolis 力的作用. 若仅有气压梯度力的作用，则空气像水一样沿压力梯度力方向运动. 正是由于重力作用在垂直方向上与气压梯度力维持静力平衡，使大气运动具有准水平性，又正是由于太阳辐射形成的经向温度梯度和 Coriolis 力的作用，在水平方向上维持地转平衡. 所以，地转平衡的建立过程是旋转地球大气的一个重要特征.

所以，人们把大气大尺度运动的过程分为两个阶段：一是当准地转平衡遭到破坏后，通过流场与气压场的相互调整使运动恢复到准地转平衡的过程，这就是“地转适应过程”，由于我们经常观测到的大气大尺度运动是准地转运动，因此，地转适应过程是迅速的；另外是在准地转条件下大尺度运动发展和演变的过程，这就是准地转演变过程，显然，准地转演变过程是缓慢的. 在大气大尺度运动中实际上

不断地同时进行着地转适应过程和准地转演变过程，大气运动就是在这种矛盾对立统一的过程中变化和发展的.

地转适应过程的研究对于理解大气运动的本质是非常重要的，它不仅可以揭示地转适应过程本身的机制，而且也可以帮助我们认识准地转演变过程的一些规律，如在地转适应过程中流场和气压场都要变化，这种变化的相对大小可以帮助我们了解大气气压系统的形成.

地转适应过程的概念最早是由 Rossby 提出来的，其后 Cahn, Obukhov, Kibel, Monin 等人也做了不少工作. 我国学者叶笃正、曾庆存、陈秋士等人也做了大量的研究.

二、定义

大气运动存在着动力平衡和动力不平衡两种最基本的形态. 就大气大尺度运动而言，这种形态就是地转平衡和非地转运动. 我们说大气大尺度运动经常处于准地转状态是指，当地转平衡在局部受到破坏，那么必存在一种物理机制使受到破坏的准地转状态迅速得到恢复，这种过程称为地转适应过程. 而在准地转条件下，大尺度运动缓慢发展和演变的过程称为准地转演变过程. 地转适应过程和准地转演变过程分别简称为适应过程和演变过程.

在地转适应过程中，流场和气压场不断地变化以调整到相互适应. 若在适应过程中，与初始状态相比，气压场相对于流场有较大的变化(即流场变化小，气压场变化大)，则称气压场适应流场；否则，流场相对于气压场有较大的变化(即气压场变化小，流场变化大)，则称流场适应气压场. 气压场适应流场或流场适应气压场统称为适应方向.

§ 12.2 适应过程和演变过程的可分性

适应过程和演变过程是两种不同的过程，两者是否可区分呢？回答是肯定的. 它们在时间尺度上和物理性质上都可以区分开.

一、时间尺度上的可分性，时间边界层

大尺度运动(静力平衡满足)的水平运动方程可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=fv-\dfrac{\partial \phi}{\partial x}=fv', \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=-fu-\dfrac{\partial \phi}{\partial y}=-fu',\end{cases} \tag{12.1}$$

其中(u',v')为地转偏差. 将水平运动方程(12.1)无量纲化，令

$$\begin{cases} t = \tau t_1, \quad (x,y) = L(x_1,y_1), \quad (u,v) = U(u_1,v_1), \\ f = f_0 f_1, \quad (u',v') = U'(u_1',v_1'), \end{cases} \tag{12.2}$$

则方程(12.1)化为

$$\begin{cases} \dfrac{U}{\tau}\dfrac{\partial u_1}{\partial t_1} + \dfrac{U^2}{L}\left(u_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1\dfrac{\partial u_1}{\partial y_1}\right) = f_0 U'(f_1 v_1'), \\ \dfrac{U}{\tau}\dfrac{\partial v_1}{\partial t_1} + \dfrac{U^2}{L}\left(u_1\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1\dfrac{\partial v_1}{\partial y_1}\right) = f_0 U'(-f_1 u_1'). \end{cases} \tag{12.3}$$

将等式两边同除以 $f_0 U$，得到

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial u_1}{\partial t_1} + Ro\left(u_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1\dfrac{\partial u_1}{\partial y_1}\right) = C(f_1 v_1'), \\ \varepsilon\dfrac{\partial v_1}{\partial t_1} + Ro\left(u_1\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1\dfrac{\partial v_1}{\partial y_1}\right) = C(-f_1 u_1'), \end{cases} \tag{12.4}$$

其中 $\varepsilon \equiv (f_0\tau)^{-1}$ 为 Kibel 数，$Ro \equiv U/f_0 L$ 为 Rossby 数，$C \equiv U'/U = D_0/\zeta_0$ 为陈秋士数，这些我们都在第五章中叙述过. 对大气大尺度运动，$Ro = 10^{-1}$，但对不同过程，C 与 ε 的值有很大的差别.

1. 演变过程

演变过程是准地转运动，地转偏差较小，可以认为

$$C \equiv U'/U = 10^{-1}. \tag{12.5}$$

这样，在方程(12.4)中包含 Ro 和 C 的两项是已知的最大项，因而 ε 的量级不能大于 Ro 的量级，即

$$\varepsilon \leqslant Ro. \tag{12.6}$$

由此求得

$$\tau \geqslant 10 f_0^{-1} = 10^5\,\mathrm{s}. \tag{12.7}$$

所以，大尺度运动的准地转演变过程是比较缓慢的，其变化时间要以“天”为单位来度量，这正是大型天气演变的一个特征. 在第五章作尺度分析时，大尺度运动取的就是 $\tau = 10^5\,\mathrm{s}$.

2. 适应过程

适应过程意味着在运动的大部分时间内处于较强的地转偏差，可以认为

$$C \equiv U'/U \geqslant 10^0. \tag{12.8}$$

这样，在方程(12.4)中包含 C 的项是已知的最大项，因而 ε 的量级与 C 的量级相同，即

$$\varepsilon = C \geqslant 10^0. \tag{12.9}$$

由此求得

$$\tau \leqslant f_0^{-1} = 10^4\,\mathrm{s}. \tag{12.10}$$

所以，在非地转条件下的大尺度运动的适应过程是非常迅速的，其变化时间以“小

时"为单位来度量,这正是大气中不容易发生大范围的非地转运动,或者发生了非地转运动人们也不易观测到的原因. 它说明一旦出现非地转运动,很快就消失了.

由以上分析便知,当局部地区一旦出现较强的非地转运动以后,随即有气压场与流场的变化;这种变化非常迅速,很快流场与气压场就恢复到准地转平衡状态,这就是地转适应过程. 此后运动则按准地转的慢过程发展,而进入所谓的演变过程.

正是因为这样,曾庆存引入"时间边界层"的概念,"时间边界层"的"厚度"为 $f_0^{-1}=10^4\,\mathrm{s}$. 在"时间边界层"内主要进行地转适应过程,这是不平衡的暂态变化过程,气压场与流场在此期间进行迅速的调整;在"时间边界层"外则是准平衡态的缓慢演变过程. 这就是两者在时间上的可分性. 正是由于适应过程的迅速才使得大气大尺度运动经常处于准地转平衡状态,因而,准地转模式能够较好地描写大气大尺度运动.

二、物理性质上的可分性

适应过程和演变过程在时间上是可分的. 同样,在物理性质上也有很大的不同.

(1) 适应过程是准线性的,演变过程是非线性的. 对适应过程,由(12.9)式知 $\varepsilon\geqslant 1$,而 $Ro=10^{-1}$,则

$$\varepsilon > Ro. \tag{12.11}$$

故由方程(12.4)知,在适应过程中,水平运动方程中的非线性项相对时间变化项要小,类似,其他方程也如此. 所以,适应过程具有准线性性质. 对演变过程,根据(12.6)式知,非线性项不小于时间变化项,所以演变过程是非线性的.

(2) 适应过程中水平散度的数值大于或等于垂直涡度的数值;演变过程中水平散度的数值比垂直涡度小一个量级,因此是准涡旋运动. 因 $C\equiv U'/U=D_0/\zeta_0$,则由(12.8)式知,对适应过程有

$$D_0 \geqslant \zeta_0, \tag{12.12}$$

即适应过程中水平散度的数值大于或等于垂直涡度的量级. 而对演变过程,由(12.5)式知

$$D_0 = 10^{-1}\zeta_0, \tag{12.13}$$

即演变过程中水平散度的数值比垂直涡度的数值小一个量级,因此是准涡旋运动.

(3) 适应过程中的水平散度和垂直运动的数值至少分别比演变过程的水平散度和垂直运动大一个量级. 比较(12.12)式和(12.13)式,如果认为大尺度运动 $\zeta_0=10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$,则适应过程中的水平散度至少比演变过程中的水平散度大一个量级.

水平散度的上述结果必然导致垂直运动也有同样的结果. 这是因为根据 p 坐

标中的连续性方程

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0, \tag{12.14}$$

但不考虑 f 变化的情况下，地转风的水平散度为零，因而

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}. \tag{12.15}$$

上式表明：大尺度运动的水平散度的尺度 D_0 可表为

$$D_0=U'/L. \tag{12.16}$$

这样，由(12.14)式，垂直 p 速度 ω 的尺度 Ω_0 可表为

$$\Omega_0=D_0P=U'P/L, \tag{12.17}$$

而 p 坐标系中自变量 p 的尺度 P 可利用(5.7)式表为 $P=\rho_0 gH$，这样，(12.17)式又可改写为

$$\Omega_0=U'\rho_0 gH/L. \tag{12.18}$$

但大尺度运动，$\omega\approx-\rho g w$，因而垂直运动 w 的尺度为

$$W=\Omega_0/\rho_0 g=HU'/L=10^{-2}U'. \tag{12.19}$$

对适应过程，由(12.8)式，$U'\geqslant U$，因而

$$W\geqslant 10^{-2}U. \tag{12.20}$$

但对演变过程，由(12.5)式，$U'=10^{-1}U$，因而

$$W=10^{-3}U. \tag{12.21}$$

比较(12.20)式和(12.21)式，在适应过程中垂直运动的量级至少比演变过程中的垂直运动大一个量级.

(4) 适应过程中可不考虑 Rossby 参数 β 的作用，演变过程必须考虑 β 的作用. 为了突出说明 β 的作用，我们先不考虑非线性项，此时，大尺度运动的涡度方程可以写为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\beta_0 v+fD=0, \tag{12.22}$$

将上式无量纲化后得到

$$\frac{\zeta_0}{\tau}\frac{\partial \zeta_1}{\partial t_1}+\beta_0 U(\beta_1 v_1)+f_0 D_0(f_1 D_1)=0. \tag{12.23}$$

将上式两边同除以 $f_0 D_0=f_0 U'/L$ 后得到

$$\frac{\varepsilon}{C}\frac{\partial \zeta_1}{\partial t_1}+\frac{\beta_0 L/f_0}{C}(\beta_1 v_1)+f_1 D_1=0. \tag{12.24}$$

对适应过程，由(12.9)式，$\varepsilon\geqslant 1$，而 $\beta_0 L/f_0\approx 10^{-1}$，因此，在涡度方程中 β 的作用可忽略. 同样分析，在散度方程中 β 的作用也可忽略.

对演变过程，由(12.6)式，$\varepsilon\leqslant 10^{-1}$，而 $\beta_0 L/f_0=10^{-1}$，因此，在涡度方程中必须考虑 β 的作用. 不过，在演变过程中，运动是准地转的，由地转风引起的水平散度

为零.

综上所述，在物理性质上，适应过程和演变过程也是可分的.

§12.3　适应过程的物理分析

我们以最简单的空间一维的有自由面的线性正压模式为例说明地转适应过程的物理机制. 此时，方程组可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-f_0 v=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial x},\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+f_0 u=0,\\ \dfrac{\partial \phi'}{\partial t}+c_0^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\end{cases}\tag{12.25}$$

其中 $\phi'=gh'$，$c_0^2=gH$.

下面，我们分析如下几个问题.

一、波动

根据地转适应过程的性质，β 的作用可忽略，因而方程组(12.25)包含惯性-重力外波. 将方程组(12.25)的第一式对 t 微商，并利用第二、第三式可得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-f_0^2 u,\tag{12.26}$$

这是一维 Klein-Gordon 方程，它是惯性-重力外波所满足的方程，f 取为常数 f_0. 应用正交模方法，设

$$u=\hat{u}e^{i(kx-\omega t)},\tag{12.27}$$

将其代入方程(12.26)，求得惯性-重力外波的频率 ω 为

$$\omega=\pm\sqrt{k^2c_0^2+f_0^2}.\tag{12.28}$$

相应的波速为

$$c\equiv\omega/k=\pm\sqrt{c_0^2+(f_0/k)^2}.\tag{12.29}$$

由(12.28)式和(12.29)式知，它是频散波，其群速度为

$$c_g\equiv\frac{d\omega}{dk}=\frac{c_0^2}{c}=\pm\frac{c_0^2}{\sqrt{c_0^2+(f_0/k)^2}}.\tag{12.30}$$

可见，波长越短(k 越大)，c 越小，c_g 越大，c_g 的最大值为

$$(c_g)_{max}=c_0.\tag{12.31}$$

二、适应过程的物理机制

若初始的非地转状态局限于

$$|x| \leqslant L$$

的有限区域，L 称为初始扰动的水平尺度或扰源尺度. 为了讨论方便，我们用地转风关系

$$v_g = \frac{1}{f_0}\frac{\partial \phi'}{\partial x} \tag{12.32}$$

来表示相应于气压场的速度，以区别流场.

下面，我们分析若初始在 $|x| \leqslant L$ 内的非地转状态是：只有流场(如南风)，没有气压场的情况下的地转适应. 即初始状态为

$$u|_{t=0} = 0, \quad v|_{t=0} > 0, \quad v_g|_{t=0} = 0. \tag{12.33}$$

在上述初始状态下，我们将分析：如何建立气压场并与流场达到地转平衡，并将分析地转适应与扰源尺度的关系.

1. Coriolis 力的作用

因为南风，故在 Coriolis 力的作用下产生西风$\left(\text{由(12.25)的第一式}, v>0, \text{则} \frac{\partial u}{\partial t}>0, \text{但} u|_{t=0}=0, \text{因而} u>0\right)$，这样，在区域的右边形成水平辐合和质量堆积，自由面升高$\left(\text{(12.25)的第三式}, \frac{\partial u}{\partial x}<0, \text{则} \frac{\partial \phi'}{\partial t}>0\right)$. 而区域的左边形成水平辐散和质量减小，自由面下降$\left(\text{由(12.25)的第三式}, \frac{\partial u}{\partial x}>0, \text{则} \frac{\partial \phi'}{\partial t}<0\right)$，见图 12.1. 所以，在 Coriolis 力的作用下建立了水平气压梯度$\left(\frac{\partial \phi'}{\partial x}>0\right)$，这是问题的一个方面.

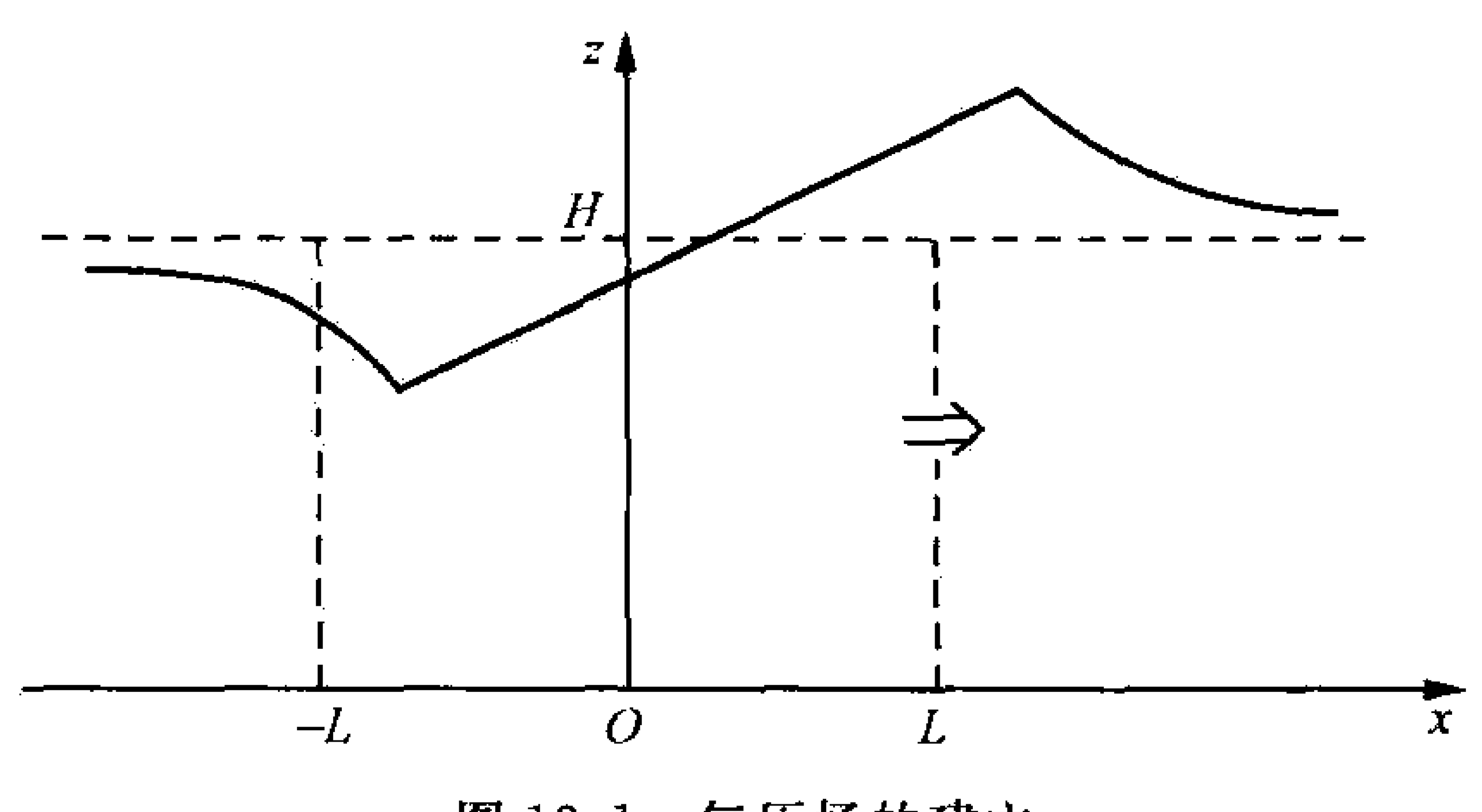


图 12.1 气压场的建立

问题的另一方面是形成西风的同时，又在 Coriolis 力的作用下使初始的南风削弱(由(12.25)的第二式，$u>0$，则 $\partial v/\partial t<0$)，所以，在大气内部，由于 Coriolis 力的作用，南风的作用就促使其自身削弱.

综上两方面的分析，若初始只有流场而无气压场，则流场将随时间逐渐减小，是从大到小的过程；气压场则是从无到有，从小到大的过程. 经过一定的时间达到

地转平衡，$v=v_g=\dfrac{1}{f_0}\dfrac{\partial\phi'}{\partial x}$，此时，西风达到极大值，$\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$((12.25)的第一式)；随后，由于惯性，$v$ 继续减小，v_g 继续增大，相对 $v_g>v$，则 u 将减小((12.25)的第一式)；……如此往复不断，通过水平辐散辐合的调节，形成 u，v 和 ϕ' 的惯性-重力外波的传播.

2. 波的频散

也由于 f 的存在，惯性-重力外波是频散波，使得初始集中于局部有限区域的能量迅速散布于无限区域，从而使得有限区域的非地转扰动逐渐消失，地转平衡得以恢复，这就是地转适应过程的物理本质.

3. 适应方向与扰源尺度的关系

将(12.32)式对 t 微商，并利用(12.25)的第三式有

$$\frac{\partial v_g}{\partial t}=-\frac{c_0^2}{f_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=O\left(\frac{c_0^2}{f_0}\frac{U}{L^2}\right). \tag{12.34}$$

而由(12.25)的第二式

$$\frac{\partial v}{\partial t}=O(f_0U), \tag{12.35}$$

将(12.35)式与(12.34)式相比有

$$\frac{\partial v}{\partial t}\bigg/\frac{\partial v_g}{\partial t}=O\left(\frac{L^2}{L_0^2}\right)=O(\mu_0^2), \tag{12.36}$$

其中

$$L_0\equiv c_0/f_0 \tag{12.37}$$

为正压大气的 Rossby 变形半径，而

$$\mu_0^2=L^2/L_0^2=f_0^2L^2/gH \tag{12.38}$$

为正压大气的行星 Froude 数.

(12.36)式可用来判断在适应过程中流场与气压场的相对变化大小. 由(12.36)式看到，当 $L<L_0$ 时，$\mu_0^2\ll 1$，$\left|\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|\ll\left|\dfrac{\partial v_g}{\partial t}\right|$，它表示在适应过程中，流场的变化远小于气压场的变化，则是气压场向流场适应；当 $L>L_0$ 时，$\mu_0^2\gg 1$，$\left|\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|\gg\left|\dfrac{\partial v_g}{\partial t}\right|$，它表示在适应过程中，气压场的变化远小于流场的变化，则是流场向气压场适应.

地转适应方向对扰源尺度的依赖关系之所以如此，是因为在初始只有流场而无气压场，在 L 较小时，平衡南风所需要的气压场可以很快建立$\Big($由(12.25)式，若 L 小，则$\dfrac{\partial u}{\partial x}$大，$\dfrac{\partial\phi'}{\partial t}$大，因而时间短$\Big)$，这样，南风还未来得及被大量削弱时，平衡流

场的气压场已经建立好了，因而，L 较小时，流场变化小，气压场变化大，是气压场向流场适应. 在 L 较大时，平衡南风所需要的气压场需要很长时间才能建立，这样，南风已被大大削弱，即是说，气压场刚建立，流场已所剩无几了. 因而，L 较大时，流场变化大，气压场变化小，是流场向气压场适应. 对于初始只有气压场而无流场的非地转状态，也可作类似的物理分析.

由此可以推断：在大气中，较大尺度的系统通常在气压场（或位势高度场）上反映清楚，而较小尺度的系统往往在流场上反映明显.

§ 12.4 正压地转适应过程

为了简单起见，我们先讨论有自由面的正压大气的地转适应过程.

一、基本方程组

正压地转适应过程的基本方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - f_0 v = -\dfrac{\partial \phi'}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + f_0 u = -\dfrac{\partial \phi'}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial \phi'}{\partial t} + c_0^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = 0. \end{cases} \tag{12.39}$$

根据适应过程的性质，这里用的是线性方程，且取 $f = f_0 =$ 常数.

令 D, ζ 分别为水平散度和垂直涡度，即

$$D \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \zeta \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{12.40}$$

则方程组(12.39)的前两式作涡度运算和散度运算，使方程组(12.39)化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} + f_0 D = 0, \\ \dfrac{\partial D}{\partial t} - f_0 \zeta + \nabla_h^2 \phi' = 0, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} + c_0^2 D = 0. \end{cases} \tag{12.41}$$

在 f 为常数的条件下，方程组(12.39)或(12.41)应包含惯性-重力外波. 事实上，将(12.41)的第二式对 t 微商，并利用第一、第三两式可得

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla_h^2 D - f_0^2 D, \tag{12.42}$$

这是二维 Klein-Gordon 方程. 应用正交模方法于方程(12.42)，不难求得惯性-重力外波的圆频率为

$$\omega=\pm\sqrt{K_h^2c_0^2+f_0^2},\tag{12.43}$$

其中

$$K_h^2=k^2+l^2,\tag{12.44}$$

而 k,l 分别为 x,y 方向上的波数. 由(12.43)式求得惯性-重力外波的相速度和群速度分别是

$$\boldsymbol{c}=\frac{\omega}{\boldsymbol{K}_h}=\frac{\omega}{K_h^2}\boldsymbol{K}_h=\pm\frac{\sqrt{K_h^2c_0^2+f_0^2}}{K_h^2}\boldsymbol{K}_h=\pm\sqrt{c_0^2+\left(\frac{f_0}{K_h}\right)^2}\frac{\boldsymbol{K}_h}{K_h},\tag{12.45}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}_g&=\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{K}_h}=\frac{\partial\omega}{\partial K_h}\cdot\frac{\boldsymbol{K}_h}{K_h}=\pm\frac{K_hc_0^2}{\sqrt{K_h^2c_0^2+f_0^2}}\cdot\frac{\boldsymbol{K}_h}{K_h}\\&=\pm\frac{c_0}{\sqrt{1+\dfrac{1}{K_h^2L_0^2}}}\cdot\frac{\boldsymbol{K}_h}{K_h}=\pm\frac{c_0}{\sqrt{1+\mu_0^2}}\cdot\frac{\boldsymbol{K}_h}{K_h},\end{aligned}\tag{12.46}$$

这里 $\mu_0=L/L_0$(见(12.38)式),且

$$\boldsymbol{K}_h=k\boldsymbol{i}+l\boldsymbol{j}\tag{12.47}$$

和

$$L=1/K_h,\tag{12.48}$$

上式中的 L 相当于波长. 对圆形涡旋而言, L 就是圆形涡旋半径 R(依上式,圆周长为 $2\pi R=2\pi L=2\pi/K_h$,是真正的波长).

方程组(12.41)的第三式代入第一式,消去 D 有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta-f_0\frac{\phi'}{c_0^2}\right)=0.\tag{12.49}$$

上式表明,在适应过程中,存在一个不随时间变化的量

$$\zeta-f_0\frac{\phi'}{c_0^2}=\zeta_0-f_0\frac{\phi_0'}{c_0^2}\equiv q(x,y),\tag{12.50}$$

这就是所谓位涡度,它仅决定于初值,式中 ζ_0,ϕ_0' 分别为 ζ 和 ϕ' 的初值.

由静力学关系,设自由面 $p_h=$常数,不难求得因自由面高度变化($h'=h-H$, $\phi'=\phi-c_0^2$)造成的地面气压变化为

$$p_0'\equiv p_s(x,y,t)-p_0=\rho g(h-H)=\rho\phi'\quad(\rho\text{ 为常密度}).\tag{12.51}$$

二、适应方程的求解

为了讨论方便,我们引入流函数 ψ 和速度势 φ,使得

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y},\tag{12.52}$$

因而有

$$\zeta = \nabla_h^2 \psi, \quad D = \nabla_h^2 \varphi. \tag{12.53}$$

而且方程组(12.41)可以改写为

$$\begin{cases} \nabla_h^2 \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial t} + f_0 \varphi \right) = 0, \\ \nabla_h^2 \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - f_0 \psi + \phi' \right) = 0, \\ \dfrac{\partial \phi'}{\partial t} + c_0^2 \nabla_h^2 \varphi = 0. \end{cases} \tag{12.54}$$

相应,(12.50)式改写为

$$\nabla_h^2 \psi - \frac{f_0}{c_0^2} \phi' = \nabla_h^2 \psi_0 - \frac{f_0}{c_0^2} \phi_0' \equiv q(x,y), \tag{12.55}$$

其中 ψ_0 为 ψ 的初值.方程(12.54)的前两式为二维 Laplace 方程.因初始非地转扰动出现在有限区域,且扰动是有界的,则物理上可以认为 ψ,φ 和 ϕ' 在无穷远处为零.根据椭圆型方程的极值原理,方程(12.54)的头两式可分别化为

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + f_0 \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - f_0 \psi + \phi' = 0, \tag{12.56}$$

也就是把(12.54)前两式的 ∇_h^2 去掉.这样,方程组(12.54)又可改写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t} + f_0 \varphi = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - f_0 \psi + \phi' = 0, \\ \dfrac{\partial \phi'}{\partial t} + c_0^2 \nabla_h^2 \varphi = 0, \end{cases} \tag{12.57}$$

上式就是正压大气的地转适应方程组.将其中第二式对 t 微商,并利用第一、第三两式有

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla_h^2 \varphi - f_0^2 \varphi, \tag{12.58}$$

这是速度势 φ 的二维 Klein-Gordon 方程,称为地转适应方程.它也可以由 $D = \nabla_h^2 \varphi$ 代入方程(12.42),然后去掉 ∇_h^2 而得到.

方程(12.58)的初条件可以写为

$$\begin{cases} \varphi \big|_{t=0} = \varphi_0(x,y), \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=0} = f_0 \psi_0 - \phi_0' \equiv \varphi_1(x,y), \end{cases} \tag{12.59}$$

其中的第二式是根据方程组(12.57)的第二式得到的.

方程(12.58)是在初条件(12.59)下的 Cauchy 问题,可用降维法求解,即作因变量变换.令

$$w(x,y,z,t) = \varphi(x,y,t)\cos\frac{f_0 z}{c_0}, \tag{12.60}$$

则方程(12.58)和初条件(12.59)分别化为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c_0^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \tag{12.61}$$

$$\begin{cases} w\big|_{t=0} = \varphi_0(x,y)\cos\dfrac{f_0 z}{c_0}, \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x,y)\cos\dfrac{f_0 z}{c_0}. \end{cases} \tag{12.62}$$

方程(12.61)在初条件(12.62)下的求解是标准的三维波动方程 Cauchy 问题的求解.它的解为下列 Poisson 公式:

$$w(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi c_0}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S^M_{c_0 t}}\varphi_0(\xi,\eta)R^{-1}\cos\frac{f_0\zeta}{c_0}\delta S+\iint\limits_{S^M_{c_0 t}}\varphi_1(\xi,\eta)R^{-1}\cos\frac{f_0\zeta}{c_0}\delta S\right\}, \tag{12.63}$$

其中

$$R = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}. \tag{12.64}$$

而 $S^M_{c_0 t}$ 表示以 $M(x,y,z)$ 为中心,$c_0 t$ 为半径的球面,即

$$R = c_0 t. \tag{12.65}$$

利用降维法,因 $z=0$ 时,$w(x,y,0,t)=\varphi(x,y,t)$,又因 φ_0,φ_1 与 z 无关,则球面 $S^M_{c_0 t}$ 上的积分可以化为这个球面在平面 $z=\zeta$ 上的圆域 $\Sigma^M_{c_0 t}((\xi-x)^2 t(\eta-y)^2\leqslant c_0^2 t^2)$ 上的积分.球面上的面积元 δS 与其投影的面积元 $\delta\xi\delta\eta$ 有下列关系:

$$(\delta S)\cos\gamma = \delta\xi\delta\eta, \tag{12.66}$$

其中 γ 是 δS 的外法线方向与 z 轴间的夹角,即

$$\cos\gamma = \frac{\zeta-z}{c_0 t} = \frac{\sqrt{c_0^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}{c_0 t}. \tag{12.67}$$

故

$$\delta S = \frac{c_0 t}{\sqrt{c_0^2 t^2-\rho^2}}\delta\xi\delta\eta, \tag{12.68}$$

其中

$$\rho \equiv \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}. \tag{12.69}$$

注意上下两个半球面的投影相同,因此,积分应是在 $\Sigma^M_{c_0 t}$ 积分的两倍,所以

$$\varphi(x,y,t)= \frac{1}{2\pi c_0}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma^M_{c_0 t}}\varphi_0(\xi,\eta)\,\frac{\cos f_0\sqrt{c_0^2t^2-\rho^2}/c_0}{\sqrt{c_0^2t^2-\rho^2}}\delta\xi\delta\eta\right.$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_{c_0t}^M}\varphi_1(\xi,\eta)\frac{\cos f_0\sqrt{c_0^2t^2-\rho^2}/c_0}{\sqrt{c_0^2t^2-\rho^2}}\delta\xi\delta\eta\Big\}. \tag{12.70}$$

引入平面极坐标(ρ,θ)有

$$\xi-x=\rho\cos\theta,\quad \eta-y=\rho\sin\theta,\quad \delta\xi\delta\eta=\rho\delta\rho\delta\theta\quad \left(\rho=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\right), \tag{12.71}$$

则(12.70)式可改写为

$$\varphi(x,y,t)=\frac{1}{2\pi c_0}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{c_0t}\varphi_0(x+\rho\cos\theta,y+\rho\sin\theta)\frac{\cos f_0\sqrt{c_0^2t^2-\rho^2}/c_0}{\sqrt{c_0^2t^2-\rho^2}}\rho\delta\rho\delta\theta$$

$$+\frac{1}{2\pi c_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{c_0t}\varphi_1(x+\rho\cos\theta,y+\rho\sin\theta)\frac{\cos f_0\sqrt{c_0^2t^2-\rho^2}/c_0}{\sqrt{c_0^2t^2-\rho^2}}\rho\delta\rho\delta\theta. \tag{12.72}$$

由上面(12.70)式或(12.72)式可以看出，只有 φ_0,φ_1 不全为零时，φ 才不为零，否则 $\varphi=0$. 所以，在适应过程中出现的惯性-重力外波乃是由初始局部的非地转扰动所激发出来的.

设初始扰动局限于中心在原点，半径为 R_0 的圆内，即

$$\begin{cases}\varphi_0(x,y)=\begin{cases}F(x,y) & r\leqslant R_0,\\ 0, & r>R_0,\end{cases}\\ \varphi_1(x,y)=\begin{cases}G(x,y), & r\leqslant R_0,\\ 0 & r>R_0\end{cases}\end{cases}\quad (r=\sqrt{x^2+y^2}). \tag{12.73}$$

初始扰源见图 12.2.

设初始扰源外一点 $P(x,y)$到扰源的最近距离和最远距离分别为 ρ_1 和 ρ_2，则

$$\rho_1=r-R_0,\quad \rho_2=r+R_0. \tag{12.74}$$

当 $t<t_1\equiv\rho_1/c_0$ 时，$c_0t<\rho_1$，$c_0t\ll\rho_2$，(12.72)式的积分区域与扰源不相交，因而 $\varphi=0$，它表示初始扰动还未到达场点；

当 $\rho_1/c_0\equiv t_1\leqslant t\leqslant t_2\equiv\rho_2/c_0$ 时，$\rho_1\leqslant c_0t\leqslant\rho_2$，(12.72)式的积分区域与扰源相交，因而 $\varphi\neq0$，它表示初始扰动已传到场点；

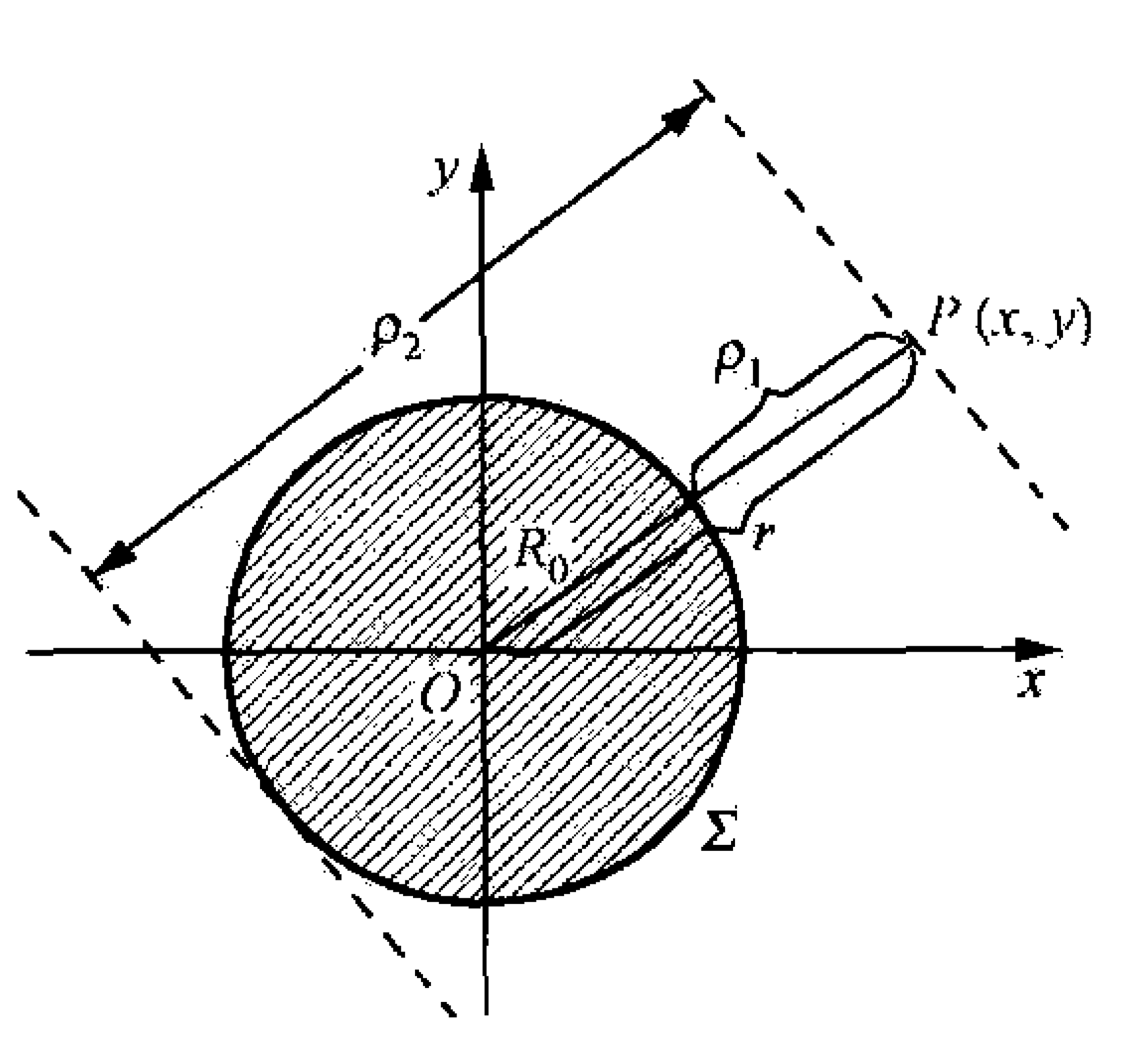


图 12.2 初始扰源

当 $t>t_2\equiv\rho_2/c_0$ 时，$c_0t>\rho_2$，(12.72)式的积分区域完全包围了扰源，这时实际的积分区域即为扰源区域 Σ：$\rho_1\leqslant\rho\leqslant\rho_2$，这样，(12.72)式可改写为

$$\varphi(x,y,t)=\frac{1}{2\pi c_0}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\rho\leqslant c_0t}F(x+\rho\cos\theta,y+\rho\sin\theta)\frac{\cos f_0\sqrt{c_0^2t^2-\rho^2}/c_0}{\sqrt{c_0^2t^2-\rho^2}}\rho\delta\rho\delta\theta$$

$$+\frac{1}{2\pi c_0}\iint\limits_{\rho\leqslant c_0 t} G(x+\rho\cos\theta, y+\rho\sin\theta)\,\frac{\cos f_0\sqrt{c_0^2t^2-\rho^2}/c_0}{\sqrt{c_0^2t^2-\rho^2}}\rho\delta\rho\delta\theta. \quad (12.75)$$

设 $\overline{F},\overline{G}$ 分别为 F,G 在圆域 $\rho\leqslant c_0 t$ 内的平均值，又 ρ_1,ρ_2 的平均值为 r，则上式近似表为

$$\varphi(x,y,t)=\frac{R_0^2\overline{F}}{2c_0}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\cos f_0\sqrt{c_0^2t^2-r^2}/c_0}{\sqrt{c_0^2t^2-r^2}}\right]+\frac{R_0^2\overline{G}}{2c_0}\cdot\frac{\cos f_0\sqrt{c_0^2t^2-r^2}/c_0}{\sqrt{c_0^2t^2-r^2}}. \quad (12.76)$$

由上式可看出，随着 t 的增加，φ 将迅速衰减，当 $t\to\infty$ 时，$\varphi=0$. 显然，这种阻尼的产生不是由于摩擦所引起，因为方程中未考虑摩擦作用；这种阻尼是由于惯性-重力外波的频散所产生的. 而且扰动以速度 $c=|c|=\sqrt{c_0^2+(f_0/K_h)^2}$ 传播，能量则以 $c_g=|c_g|=c_0/\sqrt{1+\mu_0^2}$ 传播，因 c 和 c_g 的数值都很大，所以，由(12.76)式所表示的振荡随时间衰减得非常快.

当 $\varphi=0$ 时，运动变为涡旋运动. 由(12.57)式，$\frac{\partial\psi}{\partial t}=0$ 和 $\frac{\partial\phi'}{\partial t}=0$，它表示流场和气压场都变为定常；而且 $f_0\psi=\phi'$，这就是地转平衡关系，从而实现了地转适应.

三、地转适应时间

事实上，无需到 $t\to\infty$，φ 已经衰减得微不足道了. 从(12.76)式看到，使 φ 足够小所需时间依赖于初始扰源的尺度 L 和能量的频散速度 c_g. 所以，我们把 L/c_g 定义为地转适应时间，记为 τ_A，即

$$\tau_A\equiv\frac{L}{c_g}=\frac{L}{c_0}\sqrt{1+\mu_0^2}=\frac{1}{f_0}\mu_0\sqrt{1+\mu_0^2}=\tau_i\mu_0\sqrt{1+\mu_0^2}, \quad (12.77)$$

其中 $\tau_i=f_0^{-1}$ 为惯性时间尺度.

上式表明：扰源尺度越大(μ_0 越大)，地转适应时间 τ_A 也越长，若取 $L=10^6\,\mathrm{m}$，$f_0=10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$，$L_0=3\times10^6\,\mathrm{m}$，则由上式算得 $\tau_A\approx1\,\mathrm{h}$. 正由于地转适应时间非常短，所以，我们很难在大气中观测到显著的地转偏差.

四、地转适应终态

当适应过程结束，恢复到地转平衡后，φ,ψ,ϕ' 的终态 $\varphi_\infty,\psi_\infty,\phi'_\infty$ 满足

$$\varphi_\infty=0,\quad f_0\psi_\infty=\phi'_\infty,\quad \nabla_h^2\psi_\infty-\frac{f_0}{c_0^2}\phi'_\infty=\nabla_h^2\psi_0-\frac{f_0}{c_0^2}\phi'_0\equiv q(x,y), \quad (12.78)$$

其中第二式即是地转关系. 后两式合并有

$$\nabla_h^2\psi_\infty - \frac{1}{L_0^2}\psi_\infty = q(x,y) = \nabla_h^2\psi_0 - \frac{1}{L_0^2}\left(\frac{\phi_0'}{f_0}\right), \tag{12.79}$$

这是 ψ_∞ 的非齐次 Helmholtz 方程. 该方程的 Green 函数(或基本解)$G(x,y;\xi,\eta)$满足

$$\nabla_h^2 G - \frac{1}{L_0^2}G = \delta(\xi - x, \eta - y), \tag{12.80}$$

其中 $\delta(\xi - x, \eta - y)$为 Dirac δ 函数. 由方程(12.80)不难求得

$$G(x,y;\xi,\eta) = -\frac{1}{2\pi}K_0(\rho/L_0), \tag{12.81}$$

其中

$$\rho = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}. \tag{12.82}$$

而 $K_0(z)$为第二类变型的零阶 Bessel 函数(或零阶 MacDonald 函数).

由 Green 函数 G,依叠加原理我们立即求得方程(12.79)的解为

$$\psi_\infty(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} q(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)\delta\xi\delta\eta = -\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} q(\xi,\eta)K_0\left(\frac{\rho}{L_0}\right)\delta\xi\delta\eta. \tag{12.83}$$

因为当 $z\to\infty$时,$K_0(z)\to\sqrt{\pi/2z}\,e^{-z}\to 0$,所以,上述积分是收敛的. 根据初始状态确定 $q_0(x,y)$,利用(12.83)式可确定流函数 ψ 的终态 ψ_∞,再由(12.78)式定出 ϕ_∞'.

应用平面极坐标(12.71)式,(12.83)式可以改写为

$$\begin{aligned}
\psi_\infty(x,y) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} q(x+\rho\cos\theta, y+\rho\sin\theta)K_0\left(\frac{\rho}{L_0}\right)\rho\delta\rho\delta\theta \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\nabla_h^2\psi_0 - \frac{1}{L_0^2 f_0}\phi_0'\right)K_0\left(\frac{\rho}{L_0}\right)\rho\delta\rho\delta\theta \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\nabla_h^2\psi_0 - \frac{1}{L_0^2}\psi_0\right)K_0\left(\frac{\rho}{L_0}\right)\rho\delta\rho\delta\theta \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{L_0^2}\left(\psi_0 - \frac{\phi_0'}{f_0}\right)K_0\left(\frac{\rho}{L_0}\right)\rho\delta\rho\delta\theta,
\end{aligned} \tag{12.84}$$

上式最后一个等式的右端第一个积分是 Helmholtz 方程 $\nabla_h^2\psi_0 - \frac{1}{L_0^2}\psi_0 = F$ 的解,即

$$\psi_0(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\nabla_h^2\psi_0 - \frac{1}{L_0^2}\psi_0\right)K_0\left(\frac{\rho}{L_0}\right)\rho\delta\rho\delta\theta. \tag{12.85}$$

这样,(12.84)式可以改写为

$$\psi_\infty(x,y) = \psi_0(x,y) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{L_0^2}\left(\psi_0 - \frac{\phi_0'}{f_0}\right)K_0\left(\frac{\rho}{L_0}\right)\rho\delta\rho\delta\theta. \tag{12.86}$$

五、适应方向与扰源尺度的关系

设初始扰动局限于以中心在原点、半径为 L 的圆内，且考虑在圆内，ψ_0，ϕ_0' 为常数，这样，由它们形成的 ψ_∞ 在圆内也为常数，则由(12.86)式求得在上述圆内

$$\psi_\infty = \psi_0 - \frac{1}{L_0^2}\left(\psi_0 - \frac{\phi_0'}{f_0}\right)\int_0^L \mathrm{K}_0\left(\frac{\rho}{L_0}\right)\rho\delta\rho. \tag{12.87}$$

利用 MacDonald 函数的微商性质：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z\mathrm{K}_1(z)) = -z\mathrm{K}_0(z), \tag{12.88}$$

这里 $\mathrm{K}_1(z)$是一阶 MacDonald 函数.

这样，(12.87)式可改写为

$$\psi_\infty = \psi_0 - \frac{1}{L_0^2}\left(\psi_0 - \frac{\phi_0'}{f_0}\right)L_0^2\left[-\frac{\rho}{L_0}\mathrm{K}_1\left(\frac{\rho}{L_0}\right)\right]_{\rho=0}^{\rho=L} = \psi_0 - \left(\psi_0 - \frac{\phi_0'}{f_0}\right)[1-\mu_0\mathrm{K}_1(\mu_0)], \tag{12.89}$$

这里用到了 $z\to 0$，$\mathrm{K}_1(z)\to 1/z$ 的性质. 根据上式，我们有：

(1) 当 $\mu_0 \equiv L/L_0 < 1$ 时，$\mu_0\mathrm{K}_1(\mu_0)\approx 1$，因而由上式和(12.78)式有

$$\psi_\infty \approx \psi_0, \quad \phi_\infty' \approx f_0\psi_0, \tag{12.90}$$

这表明当 $L<L_0$ 时，流场几乎没有什么变化，气压场相对有较大的变化，因而是气压场适应流场；

(2) 当 $\mu_0 \equiv L/L_0 > 1$ 时，$\mu_0\mathrm{K}_1(\mu_0)\approx 0$，因而由(12.89)式和(12.78)式有

$$\psi_\infty = \phi_0'/f_0, \quad \phi_\infty' \approx \phi_0', \tag{12.91}$$

它表明当 $L>L_0$ 时，气压场几乎没有什么变化，流场相对有较大的变化，因而是流场适应气压场.

§12.5 斜压地转适应过程

正压地转适应过程没有考虑层结和扰动的垂直分布，其中的波动是惯性-重力外波；当考虑了斜压大气后，地转适应过程必然会出现一些新的特点. 这主要是因为在斜压地转适应过程中的波动是惯性-重力内波的缘故. 下面将具体分析.

一、基本方程组

在 p 坐标系中，斜压地转适应过程的基本方程组可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-f_0 v=-\dfrac{\partial \phi}{\partial x},\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}+f_0 u=-\dfrac{\partial \phi}{\partial y},\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial \omega}{\partial p}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial p}\right)+\dfrac{c_a^2}{p^2}\omega=0.\end{cases}\tag{12.92}$$

根据适应过程的性质，这里用的是线性方程，而且视 f 为常数 f_0，c_a^2 也视为常数. 方程组(12.92)的前两式作涡度运算和散度运算，则方程组(12.92)可以化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \zeta}{\partial t}+f_0 D=0,\\ \dfrac{\partial D}{\partial t}-f_0\zeta+\nabla^2\phi=0 \quad \left(\nabla^2\equiv\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right),\\ D+\dfrac{\partial \omega}{\partial p}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(p^2\dfrac{\partial \phi}{\partial p}\right)+c_a^2\omega=0,\end{cases}\tag{12.93}$$

它应包含惯性-重力内波. 为了简洁而清楚地说明斜压地转适应过程，我们采用第七章已用过的“斜压两层模式”(见图 7.14).

将涡度方程、散度方程、连续性方程写在第一、第三两层上，绝热方程写在第二层上，$\partial/\partial p$ 用差商代替(气压间隔为 Δp)，则方程组(12.93)改写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial t}+f_0 D_1=0, & \dfrac{\partial \zeta_3}{\partial t}+f_0 D_3=0,\\ \dfrac{\partial D_1}{\partial t}-f_0\zeta_1+\nabla^2\phi_1=0, & \dfrac{\partial D_3}{\partial t}-f_0\zeta_3+\nabla^2\phi_3=0,\\ D_1+\dfrac{1}{2\Delta p}\omega_2=0, & D_3-\dfrac{1}{2\Delta p}\omega_2=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\phi_1-\phi_3)-\dfrac{1}{2\Delta p}c_a^2\omega_2=0, & \end{cases}\tag{12.94}$$

其中已经用到了 $\omega_0=0$ 和 $\omega_4=0$ 的条件. 若令

$$\hat{\zeta}=\frac{1}{2}(\zeta_1-\zeta_3),\quad \hat{D}=\frac{1}{2}(D_1-D_3),\quad \hat{\phi}=\frac{1}{2}(\phi_1-\phi_3),\tag{12.95}$$

$\hat{\zeta},\hat{D},\hat{\phi}$ 分别表征 ζ,D,ϕ 的垂直切变. 这样，方程(12.94)改写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t}+f_0\hat{D}=0,\\ \dfrac{\partial \hat{D}}{\partial t}-f_0\hat{\zeta}+\nabla^2\hat{\phi}=0,\\ \hat{D}+\dfrac{1}{2\Delta p}\omega_2=0,\\ \dfrac{\partial \hat{\phi}}{\partial t}-\dfrac{1}{4\Delta p}c_a^2\omega_2=0.\end{cases} \tag{12.96}$$

若由上述方程组的第三、四两式消 ω_2，则方程组(12.96)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t}+f_0\hat{D}=0,\\ \dfrac{\partial \hat{D}}{\partial t}-f_0\hat{\zeta}+\nabla^2\hat{\phi}=0,\\ \dfrac{\partial \hat{\phi}}{\partial t}+c_1^2\hat{D}=0,\end{cases} \tag{12.97}$$

其中

$$c_1^2=c_a^2/2. \tag{12.98}$$

若取 $c_a=10^2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，则 $c_1=70\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

方程组(12.97)在形式上完全同方程组(12.41)，只是 ζ, D, ϕ 分别换成了 $\hat{\zeta}, \hat{D}, \hat{\phi}$，而且将 c_0^2 换成了 c_1^2. 这反映了斜压地转适应过程与正压地转适应过程相比，在波的性质上发生了变化，显然，这里已不是惯性-重力外波，而是惯性-重力内波了.

将方程组(12.96)的第三式代入第二式有

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t}=-2\Delta p(f_0\hat{\zeta}-\nabla^2\hat{\phi}), \tag{12.99}$$

再将上式对时间 t 微商，并利用(12.96)的第一、第三和第四式得到

$$\frac{\partial^2\omega_2}{\partial t^2}=c_1^2\nabla^2\omega_2-f_0^2\omega_2, \tag{12.100}$$

这是 ω_2 的在 p 坐标系中的二维 Klein-Gordon 方程. 求其波动解，不难得到在两层模式中惯性-重力内波的圆频率为

$$\omega=\pm\sqrt{K_h^2c_1^2+f_0^2}. \tag{12.101}$$

它的相速度和群速度分别与(12.45)式和(12.46)式相似，即

$$\boldsymbol{c}=\pm\sqrt{c_1^2+\left(\frac{f_0}{K_h}\right)^2}\cdot\frac{\boldsymbol{K}_h}{K_h}, \tag{12.102}$$

$$\boldsymbol{c}_g=\pm\frac{K_hc_1^2}{\sqrt{K_h^2c_1^2+f_0^2}}\cdot\frac{\boldsymbol{K}_h}{K_h}=\pm\frac{c_1}{\sqrt{1+\mu_1^2}}\cdot\frac{\boldsymbol{K}_h}{K_h}, \tag{12.103}$$

其中

$$\mu \equiv 1/K_h L_1 = L/L_1 \quad (L \equiv 1/K_h), \tag{12.104}$$

而

$$L_1 \equiv c_1/f_0 \tag{12.105}$$

为斜压两层模式中的 Rossby 变形半径.

由方程组(12.97)的第一式与第三式消去 $\hat{D}$ 得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{\zeta} - f_0 \frac{\hat{\phi}}{c_1^2}\right) = 0 \tag{12.106}$$

或

$$\hat{\zeta} - \frac{f_0}{c_1^2}\hat{\phi} = \hat{q}(x,y) = \hat{\zeta}_0 - \frac{f_0}{c_1^2}\hat{\phi}_0, \tag{12.107}$$

其中 $\hat{q}$ 即为斜压两层模式中的位涡度,$\hat{\zeta}_0$,$\hat{\phi}_0$ 分别为 $\hat{\zeta}$,$\hat{\phi}$ 的初值.

类似(12.52)式可引入流函数 $\hat{\psi}$ 和速度势 $\hat{\varphi}$,则有

$$\hat{\zeta} = \nabla^2 \hat{\psi}. \tag{12.108}$$

这样,(12.107)式可改写为

$$\nabla^2\hat{\psi} - \frac{f_0}{c_1^2}\hat{\phi} = \hat{q}(x,y) = \nabla^2\hat{\psi}_0 - \frac{f_0}{c_1^2}\hat{\phi}_0, \tag{12.109}$$

其中 $\hat{\psi}_0$ 为 $\hat{\psi}$ 的初值.

二、适应方程的求解

这里即来求解方程(12.100).从(12.99)式可看到,当$\frac{\partial \omega_2}{\partial t}=0$时有

$$f_0\hat{\zeta} = \nabla^2\hat{\phi}, \tag{12.110}$$

这就是 $\hat{\zeta}$ 的地转涡度关系.将(12.108)式代入上式,去掉 ∇^2 得到

$$f_0\hat{\psi} = \hat{\phi}, \tag{12.111}$$

这就是 $\hat{\psi}$ 的地转关系,实际上是热成风关系.因此,方程(12.98)的非地转条件可以写为

$$\omega_2\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \omega_2}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x,y), \tag{12.112}$$

其中 $g(x,y)$ 可根据(12.99)式由 $\hat{\zeta}_0$ 和 $\hat{\phi}$ 去确定.

类似(12.70)式,我们求得方程(12.100)在初条件(12.112)下的解为

$$\omega_2(x,y,t) = \frac{1}{2\pi c_1}\iint\limits_{\rho\leqslant c_1 t} g(\xi,\eta)\,\frac{\cos f_0\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}/c_1}{\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}}\delta\xi\delta\eta. \tag{12.113}$$

与正压适应过程讨论相似,若初始扰动局限于中心在原点、半径为 R_0 的圆内,即

$$g(x,y) = \begin{cases} G(x,y), & r \leqslant R_0, \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (r = \sqrt{x^2+y^2}), \tag{12.114}$$

则当 $t>\rho_2/c_1$ 时，有

$$\omega_2(x,y,t)=\frac{1}{2\pi c_1}\iint\limits_{\rho\leqslant c_1 t} G(\xi,\eta)\frac{\cos f_0\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}/c_1}{\sqrt{c_1^2t^2-\rho^2}}\delta\xi\delta\eta. \tag{12.115}$$

显然，当 $t\to\infty$ 时，$\omega_2\to 0$，达到地转平衡.

若取 $G(x,y)=-2\Delta p f_0 A$，$A=\hat{\zeta}_0-\frac{1}{f_0}\nabla^2\hat{\phi}_0=2\times10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$，它相当于区域有 $5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的非热成风，又取 $R_0=5\times10^5\,\mathrm{m}$，则求得在 $r=0$ 处的垂直运动 w_2 随时间 t 的变化，见图 12.3. 由图 12.3 可看出：当 $t=2.2\,\mathrm{h}$，$w_2\approx3.8\times10^{-2}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$；在 $t=4\,\mathrm{h}$ 后，w_2 的数值就不再超过 $10^{-2}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$；24 h 后，$w_2$ 的数值不超过 $10^{-3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

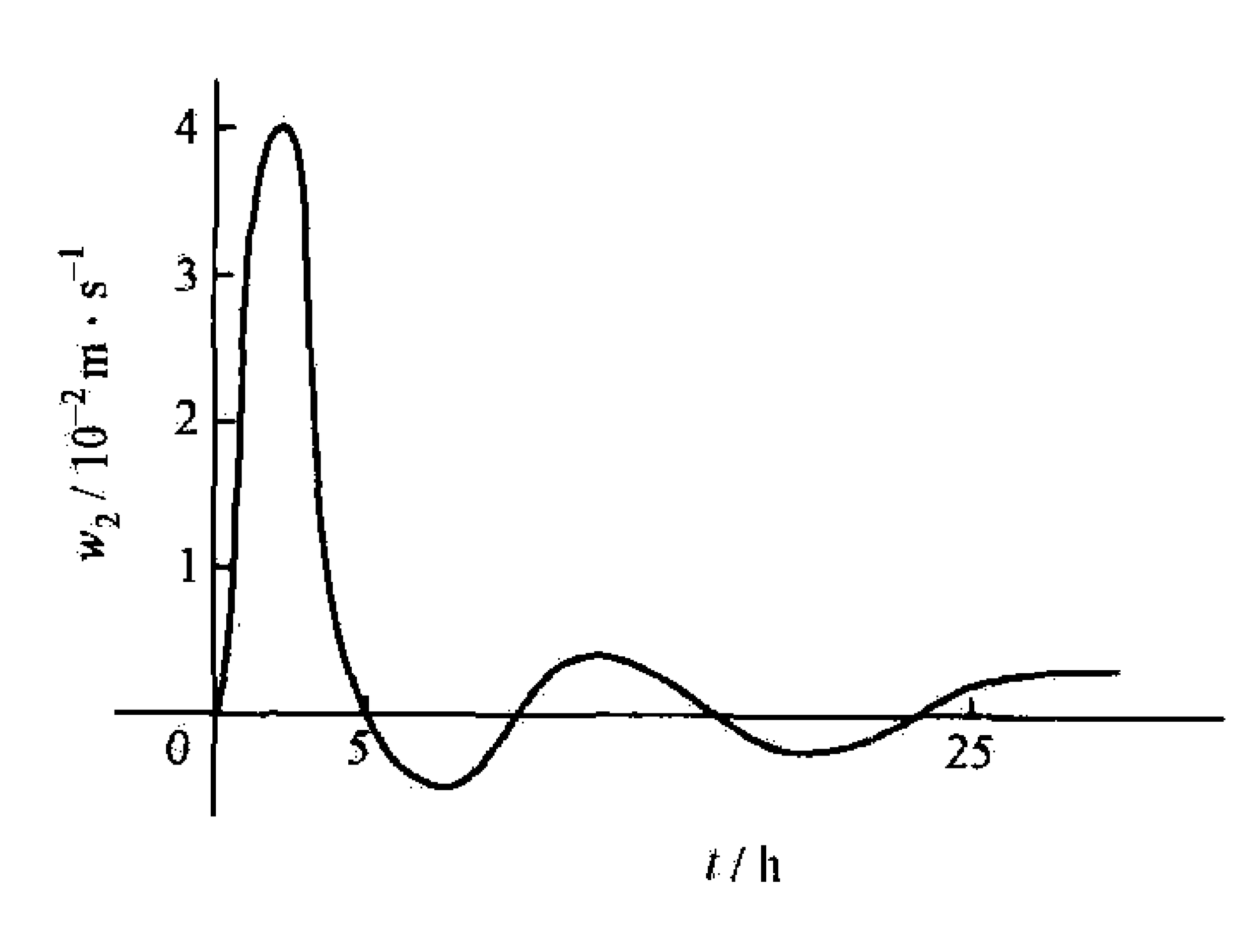


图 12.3　适应过程中 w_2 的变化曲线

三、地转适应时间

类似(12.77)式，利用(12.103)式求得地转适应时间为

$$\tau_A=\frac{L}{c_g}=\frac{L}{c_1}\sqrt{1+\mu_1^2}=\tau_i\mu_1\sqrt{1+\mu_1^2}. \tag{12.116}$$

因为 $c_1<c_0$，因而 $L_1<L_0$，对同样的 L，$\mu_1>\mu_0$，因此斜压地转适应过程的适应时间大于正压地转适应过程的适应时间. 即是说，由于斜压适应过程中的波是惯性-重力内波，所以斜压大气的适应过程进行得较正压大气的适应过程为慢. 如果取 $L=10^6\,\mathrm{m}$，$f_0=10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$，$L_1=10^6\,\mathrm{m}$，则由上式算得 $\tau_A\approx4\,\mathrm{h}$.

又因为通常认为高层的 c_1 较低层的 c_1 大(高层 Γ 小，低层 Γ 大的缘故)，所以通常高层地转适应较快，低层适应较慢.

四、地转适应终态

当达到地转适应后，$\hat{\zeta},\hat{\psi},\hat{\phi},\hat{\omega},\hat{D}$ 的终态 $\hat{\zeta}_\infty,\hat{\psi}_\infty,\hat{\phi}_\infty,\hat{\omega}_\infty,\hat{D}_\infty$ 满足

$$\begin{cases}\hat{D}_\infty=0,\quad \hat{\omega}_\infty=0,\quad f_0\hat{\psi}_\infty=\hat{\phi}_\infty,\\ \nabla^2\hat{\psi}_\infty-\frac{f_0}{c_1^2}\hat{\phi}_\infty=\hat{q}(x,y)=\nabla^2\hat{\psi}_0-\frac{f_0}{c_1^2}\hat{\phi}_0,\end{cases} \tag{12.117}$$

其中的最后两式可以合并为

$$\nabla^2\hat{\psi}_\infty-\frac{1}{L_1^2}\hat{\psi}_\infty=\hat{q}(x,y), \tag{12.118}$$

这是 $\hat{\psi}_\infty$ 的 Helmholtz 方程. 类似于(12.79)式,我们求得方程(12.118)的解为

$$\hat{\psi}_\infty(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\hat{q}(\xi,\eta)\mathrm{K}_0\left(\frac{\rho}{L_1}\right)\delta\xi\delta\eta. \tag{12.119}$$

五、地转适应与扰源尺度、扰动垂直结构的关系

类似分析可知,当 $L<L_1$ 时,气压场适应流场;当 $L>L_1$ 时,流场适应气压场. 在同一纬度(f_0 相同),一般 $L_1<L_0$,所以,在斜压大气中,对扰源更易满足 $L>L_1$,也就是说,在斜压大气中气压场更易维持,是流场适应气压场. 比较高层与低层,高层 L_1 大,低层 L_1 小,所以,对同一扰源尺度,高层更易满足 $L<L_1$,低层更易满足 $L>L_1$,即是说,高层流场更易维持,是气压场适应流场,而低层气压场更易维持,是流场适应气压场. 比较深厚系统与浅薄系统,深厚系统能达到较高的层次,更易满足 $L<L_1$,浅薄系统达不到较高的层次,更易满足 $L>L_1$,即是说,深厚系统流场更易维持,浅薄系统气压场更易维持. 上述分析使我们推断: 在高层及深厚系统中流场占主导地位,其变化主要由动力作用所引起;而在低层及浅薄系统中气压场占主导地位,其变化主要由热力作用所引起. 这些理论推断都与实际相一致.

§12.6 天气形势变化的分解、演变过程和适应过程的联结

前面,我们分析了适应过程的性质及在适应过程中流场与气压场的变化,而且把它与演变过程区别开来,这是必要的,但这也是近似的. 实际上演变过程和适应过程是同时进行的,而且相互作用、相互影响.

一、天气形势变化的分解

在中高纬度的大尺度运动中,正是因为地转平衡的不断破坏和不断建立的过程,造成了天气形势的不断变化和发展,所以,可以把天气形势变化的整个过程分成很多时间间隔为 Δt 的小阶段,在每个小阶段既有演变过程又有适应过程,其内的天气形势变化是两者变化的和. 在每个小阶段,首先考虑演变过程,分析由准地转到非地转风的出现,然后考虑适应过程,分析由非地转向准地转的调整,调整后出现的新的准地转状态表征了在 Δt 内的天气形势变化. 这就是天气形势变化的分解. 下面我们具体说明这种分解.

在 p 坐标系中,描写大尺度运动的方程组可以写为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \zeta}{\partial t}+u\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}+v\dfrac{\partial \zeta}{\partial y}+\beta_0 v+f_0 D=0, \\
\dfrac{\partial D}{\partial t}-f_0\zeta+\nabla^2\phi=0, \\
\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial p}\right)+u\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial p}\right)+v\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial p}\right)+\sigma\omega=0 \quad \left(\sigma=\dfrac{c_a^2}{p^2}\right),
\end{cases}
\tag{12.120}
$$

其中第一式为涡度方程，第二式为散度方程，第三式为绝热方程.

方程组可以分解为以平流变化和 β 作用为主的演变过程与以线性变化和 f_0 作用为主的适应过程. 演变过程的方程组可以写为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \zeta}{\partial t}=-\left(u\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}+v\dfrac{\partial \zeta}{\partial y}\right)-\beta_0 v, \\
\dfrac{\partial D}{\partial t}=0, \\
\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial p}\right)=-\left[u\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial p}\right)+v\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial p}\right)\right];
\end{cases}
\tag{12.121}
$$

而适应过程的方程组为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \zeta}{\partial t}=-f_0 D, \\
\dfrac{\partial D}{\partial t}=f_0\zeta-\nabla^2\phi, \\
\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial p}\right)=-\sigma\omega \quad \left(\sigma=\dfrac{c_a^2}{p^2}\right).
\end{cases}
\tag{12.122}
$$

下面分别说明演变过程和适应过程.

1. 演变过程

应用“斜压两层模式”，将方程组(12.121)中的涡度方程写在第一、第三两层；绝热方程写在第二层，对 p 的微商用差商代替，则方程组(12.121)改写为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial t}=-\left(u_1\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial x}+v_1\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial y}\right)-\beta_0 v_1, \\
\dfrac{\partial \zeta_3}{\partial t}=-\left(u_3\dfrac{\partial \zeta_3}{\partial x}+v_3\dfrac{\partial \zeta_3}{\partial y}\right)-\beta_0 v_3, \\
\dfrac{\partial}{\partial t}(\phi_1-\phi_3)=-\left[u_2\dfrac{\partial}{\partial x}(\phi_1-\phi_3)+v_2\dfrac{\partial}{\partial y}(\phi_1-\phi_3)\right].
\end{cases}
\tag{12.123}
$$

若令

$$
\begin{cases}
u_2=\dfrac{1}{2}(u_1+u_3), \quad v_2=\dfrac{1}{2}(v_1+v_3), \quad \zeta_2=\dfrac{1}{2}(\zeta_1+\zeta_3), \\
\hat{u}=\dfrac{1}{2}(u_1-u_3), \quad \hat{v}=\dfrac{1}{2}(v_1-v_3), \quad \hat{\zeta}=\dfrac{1}{2}(\zeta_1-\zeta_3), \quad \hat{\phi}=\dfrac{1}{2}(\phi_1-\phi_3),
\end{cases}
\tag{12.124}
$$

其中(u_2,v_2)表征平均层的流场，即正压流场部分；$(\hat{u},\hat{v})$表征垂直切变的流场，即斜压流场部分. 式中 ζ_2 为平均层的涡度，$\hat{\zeta}$ 为流场的垂直切变涡度，$\hat{\phi}$ 为垂直切变位势. 这样，方程组(12.123)可改写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\zeta_2}{\partial t}=-\left(u_2\dfrac{\partial\zeta_2}{\partial x}+v_2\dfrac{\partial\zeta_2}{\partial y}\right)-\left(\hat{u}\dfrac{\partial\hat{\zeta}}{\partial x}+\hat{v}\dfrac{\partial\hat{\zeta}}{\partial y}\right)-\beta_0 v_2,\\ \dfrac{\partial\hat{\zeta}}{\partial t}=-\left(u_2\dfrac{\partial\hat{\zeta}}{\partial x}+v_2\dfrac{\partial\hat{\zeta}}{\partial y}\right)-\left(\hat{u}\dfrac{\partial\zeta_2}{\partial x}+\hat{v}\dfrac{\partial\zeta_2}{\partial y}\right)-\beta_0\hat{v},\\ \dfrac{\partial\hat{\phi}}{\partial t}=-\left(u_2\dfrac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}+v_2\dfrac{\partial\hat{\phi}}{\partial y}\right).\end{cases}\tag{12.125}$$

演变过程通常的做法是将物理场量分解为沿纬圈平均的基本场和叠加在其上的小扰动场，即

$$\begin{cases}u_2=\bar{u}_2+u_2', \quad v_2=v_2', \quad \zeta_2=\bar{\zeta}_2+\zeta_2',\\ \hat{u}=\bar{\hat{u}}+\hat{u}', \quad \hat{v}=\hat{v}', \quad \hat{\phi}=\bar{\hat{\phi}}+\hat{\phi}', \quad \hat{\zeta}=\bar{\hat{\zeta}}+\hat{\zeta}',\end{cases}\tag{12.126}$$

其中 $\bar{\hat{u}}$ 与 $\hat{\phi}=\bar{\hat{\phi}}$ 满足形式上的地转关系，即

$$f_0\bar{\hat{u}}=-\frac{\partial\bar{\hat{\phi}}}{\partial y},\tag{12.127}$$

它实质上是热成风关系.

将(12.126)式代入(12.125)式，则演变过程经过线性化的方程组(12.125)可以写为(其中“′”号已省略)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\zeta_2}{\partial t}=-\bar{u}_2\dfrac{\partial\zeta_2}{\partial x}-\bar{\hat{u}}\dfrac{\partial\hat{\zeta}}{\partial x}-\beta_0 v_2,\\ \dfrac{\partial\hat{\zeta}}{\partial t}=-\bar{u}_2\dfrac{\partial\hat{\zeta}}{\partial x}-\bar{\hat{u}}\dfrac{\partial\zeta_2}{\partial x}-\beta_0\hat{v},\\ \dfrac{\partial\hat{\phi}}{\partial t}=-\bar{u}_2\dfrac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}+f_0\bar{\hat{u}}v_2.\end{cases}\tag{12.128}$$

为了看清在演变过程中流场与气压场的变化，我们引入气压场的切变涡度 $\hat{\zeta}_g$：

$$\hat{\zeta}_g=\frac{1}{f_0}\nabla^2\hat{\phi},\tag{12.129}$$

它即是热成风涡度. $\hat{\zeta}_g<0$ 表示暖温度脊或暖中心；$\hat{\zeta}_g>0$ 表示冷温度槽或冷中心.

这样，若对方程组(12.128)的第三式作$\dfrac{1}{f_0}\nabla^2$ 运算，则得

$$\frac{\partial\hat{\zeta}_g}{\partial t}=-\bar{u}_2\frac{\partial\hat{\zeta}_g}{\partial x}+\bar{\hat{u}}\,\nabla^2 v_2.\tag{12.130}$$

这样，由方程组(12.128)的第二式可判断在演变过程中流场切变涡度的变化，而由(12.130)式可判断在演变过程中气压场切变涡度的变化.

2. 适应过程

应用"斜压两层模式"，其方程组(12.122)就化为方程组(12.96)，取其中的第一、第三和第四式，并将第三、第四两式合并消去 ω_2 得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\hat{\zeta}}{\partial t}+f_0\hat{D}=0,\\[2ex]\dfrac{\partial\hat{\phi}}{\partial t}+c_1^2\hat{D}=0.\end{cases}\tag{12.131}$$

上述方程组的第二个方程应用(12.129)式，并取

$$\nabla^2\hat{\phi}=-\hat{\phi}/L^2,\tag{12.132}$$

则化为

$$\frac{\partial\hat{\zeta}_g}{\partial t}-\mu_1^2f_0\hat{D}=0.\tag{12.133}$$

这样，由方程组(12.131)的第一式可判断在适应过程中流场切变涡度的变化；而由(12.133)式可判断在适应过程中气压场切变涡度的变化. 由这两式还可得到

$$\left|\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial t}\Big/\frac{\partial\hat{\zeta}_g}{\partial t}\right|=\mu_1^2.\tag{12.134}$$

由上式可判断在适应过程中流场切变涡度和气压场切变涡度变化的相对大小. 当 $\mu_1^2\ll1$ 时，$L<L_1$，$\left|\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial t}\right|\ll\left|\frac{\partial\hat{\zeta}_g}{\partial t}\right|$，是气压场适应流场；当 $\mu_1^2\gg1$ 时，$L>L_1$，$\left|\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial t}\right|\gg\left|\frac{\partial\hat{\zeta}_g}{\partial t}\right|$，是流场适应气压场.

将(12.129)式代入(12.99)式得到

$$\frac{\partial\omega_2}{\partial t}=-2\Delta pf_0(\hat{\zeta}-\hat{\zeta}_g),\tag{12.135}$$

上式可用来判断在适应过程中垂直运动的变化.

二、演变过程和适应过程的联结

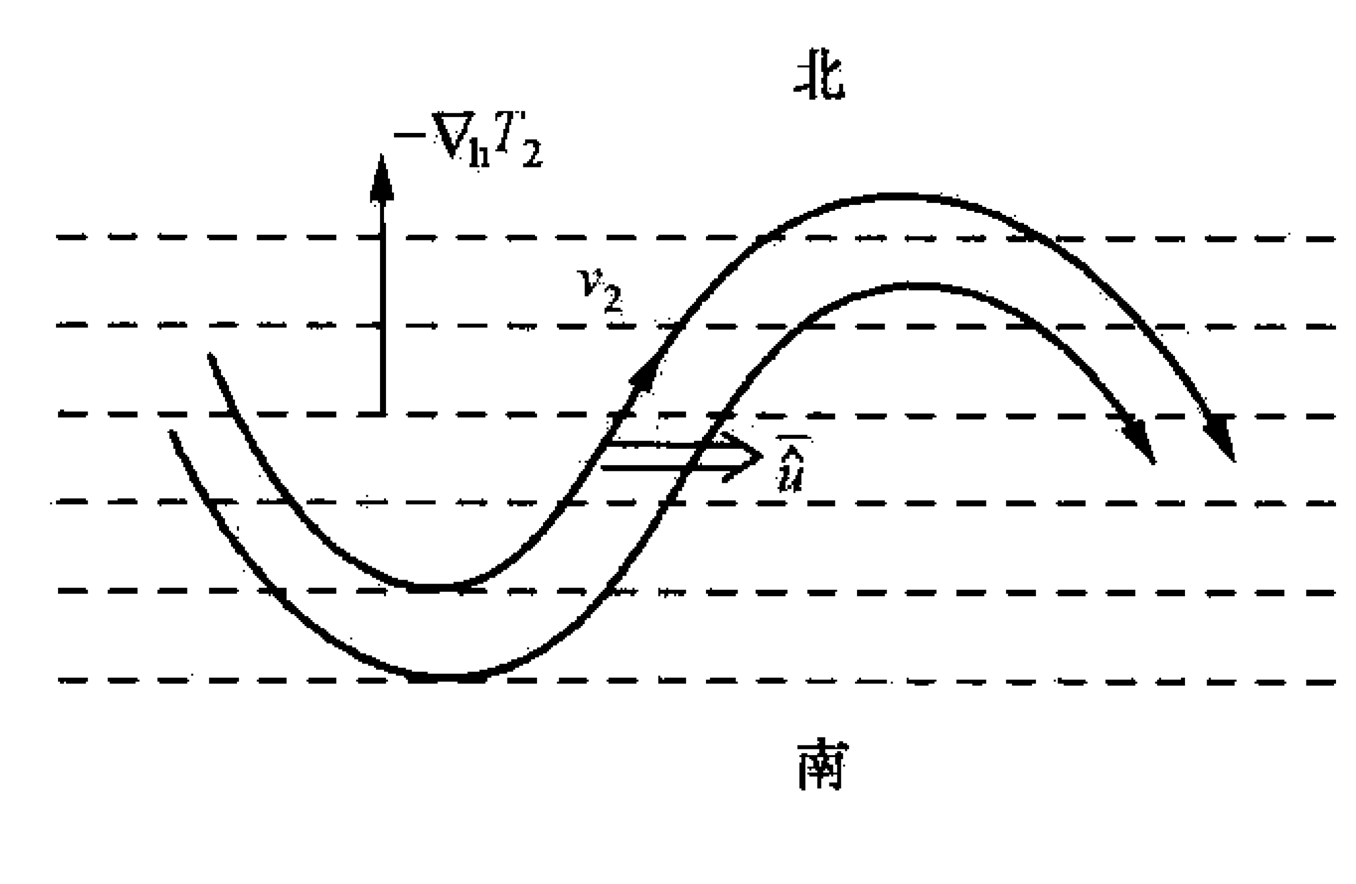


图 12.4　平均层上的流场和温度场

为了说明在 Δt 时段内演变过程和适应过程的联结，我们考察一个简单的例子. 图 12.4 为平均层(p=500 hPa 等压面)上的流场和温度场. 实线为流场，它存在着扰动，虚线为温度场，它由南向北均匀地减小.

1. 演变过程中，$\hat{\zeta}$，$\hat{\zeta}_g$ 的变化

在 Δt 内先考查演变过程，其初始状态应满足地转平衡，即 $\bar{u}$ 沿着平均层的等温线自

西向东，且

$$\hat{\zeta}=\hat{\zeta}_g, \tag{12.136}$$

因而，$-\bar{u}_2\dfrac{\partial\hat{\zeta}}{\partial x}=-\bar{u}_2\dfrac{\partial\hat{\zeta}_g}{\partial x}$. 比较(12.128)的第二式和(12.130)式，两式右端第一项便相等，它们使 $\hat{\zeta}$,$\hat{\zeta}_g$ 改变的数值相等，因此，这一项不能改变初始的地转平衡，即不能产生非地转运动. 再分析(12.128)第二式右端的第二项和第三项以及(12.130)式右端的第二项. 因在图 12.4 的流场的槽前脊后的区域 $-\hat{u}\dfrac{\partial\zeta_2}{\partial x}>0$，它使得 $\hat{\zeta}$ 增加，但 $\bar{v}=0$，β_0 项不起作用，又在流场的槽前脊后，$v_2>0$，$\nabla^2 v_2<0$，它使得 $\hat{\zeta}_g$ 减小，即产生暖脊；而在流场的槽后脊前的区域，$-\hat{u}\dfrac{\partial\zeta_2}{\partial x}<0$，它使得 $\hat{\zeta}$ 减小，又 $v_2<0$，$\nabla^2 v_2>0$，它使得 $\hat{\zeta}_g$ 增加，即产生冷槽. 所以，由于平流的作用，在演变过程中的初始流场的槽前脊后将产生暖脊，且形成 $\hat{\zeta}>\hat{\zeta}_g$ 的非地转运动；而在初始流场的槽后脊前将产生冷槽，且形成 $\hat{\zeta}<\hat{\zeta}_g$ 的非地转运动.

2. 适应过程中，ω_2，$\hat{\zeta}$，$\hat{\zeta}_g$ 的变化

在演变过程中产生的非地转运动如何向地转运动调整呢？我们利用(12.135)式，(12.131)的第一式和(12.133)式来分析. 在初始流场的槽前脊后区域，因为 $\hat{\zeta}>\hat{\zeta}_g$，则由(12.135)式知，它使 ω_2 减小，即产生上升运动，并伴有下层水平辐合和上层水平辐散. 而在初始流场的槽后脊前区域，因 $\hat{\zeta}<\hat{\zeta}_g$，则由(12.135)式知，它使 ω_2 增加，即产生下沉运动，并伴有下层水平辐散和上层水平辐合. 所以，与流场的槽脊相联系的垂直运动和水平散度的分布是由于演变过程中出现了非地转风而在适应过程中产生的.

适应过程中不仅要产生垂直运动，而且还要引起 $\hat{\zeta}$ 和 $\hat{\zeta}_g$ 的变化. 在流场的槽前脊后，$\omega_2<0$，$\hat{D}>0$，则由(12.131)的第一式 $\hat{\zeta}$ 将减小，由(12.133)式 $\hat{\zeta}_g$ 将增加；而在流场的槽后脊前，$\omega_2>0$，$\hat{D}<0$，则由(12.131)的第一式 $\hat{\zeta}$ 将增加，由(12.133)式 $\hat{\zeta}_g$ 将减小. 所以，通过垂直运动和水平散度的垂直分布可以使在演变过程中出现的非地转运动在适应过程中调整到地转平衡.

在适应过程中，当 $L<L_1$ 时，气压场适应流场，即气压场变化较大，所以在演变过程中流场的槽前脊后形成的暖脊和流场的槽后脊前形成的冷槽都要发生较大的变化以适应流场，这样，在流场的槽前脊后形成冷槽，槽后脊前形成暖脊，这就是在第八章所分析的温度槽超前流场槽的稳定结构；当 $L>L_1$ 时，流场适应气压场，即气压场变化较小，所以在演变过程中流场的槽前脊后形成的暖脊和流场的槽后脊前形成的冷槽仅稍有变化而维持，这样，在流场的槽前脊后维持暖脊，在流场的槽后脊前维持冷槽，这就是在第八章所分析的温度槽落后于流场槽的不稳定结构.

以上通过一个典型例子分析了演变过程和适应过程的联结，并由此分析了大

尺度天气形势的变化，从而说明了 Rossby 波的演变与垂直运动、高低层水平辐散辐合间的内在联系，这些对于认识大尺度天气的变化和预报都有重要的意义.

复习思考题

1. 什么叫地转适应过程？地转适应理论企图解决哪些实际问题？

2. 什么叫准地转演变过程？它与地转适应过程如何区分？

3. 什么叫"时间边界层"，它有何意义？

4. 为什么在自由大气中不能经常观测到较大的地转偏差？

5. 地转适应的快慢取决于哪些物理因子？

6. 用辩证唯物主义的观点论述适应过程和演变过程的矛盾对立统一.

7. 在地转适应过程中，惯性-重力波是怎样被激发出来的？又是如何被"消灭"的？

8. 在地转适应过程中，Coriolis 力起什么作用？波的频散又起什么作用？

9. 解释 Rossby 变形半径的意义，并在物理上说明适应方向与初始扰源尺度的关系.

10. 气压场适应流场或流场适应气压场在天气系统的生成、发展中各表征什么意义？

11. 比较正压地转适应和斜压地转适应的结果，说明相同点和不同点.

12. 理解天气形势分解的意义，并利用图 12.4 说明演变过程、适应过程对流场、气压场的变化各起什么作用.

习　题

1. 用 Fourier 积分变换法求解下列一维适应方程（即 Klein-Gordon 方程）Cauchy 问题的解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f_0^2 u & (-\infty < x < \infty, t > 0), \\ u\Big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_0 v_0(x) & (-\infty < x < \infty). \end{cases}$$

提示：$\displaystyle\int_0^\infty \cos\alpha z \cdot \frac{\sin\beta\sqrt{z^2+\gamma^2}}{\sqrt{z^2+\gamma^2}} \delta z = \begin{cases} \pi J_0(\gamma\sqrt{\beta^2-\alpha^2})/2, & |\alpha| < \beta\ (>0), \\ 0, & |\alpha| > \beta\ (>0). \end{cases}$

2. 证明下列一维适应方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-f_0 v=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial x},\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+f_0 u=0,\\ \dfrac{\partial \phi'}{\partial t}+c_0^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\end{cases}$$

存在一个时间不变量

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{f_0}{c_0^2}\phi'=q(x).$$

3. 应用上题的一维适应方程组，分析当初始仅有气压场而无流场$\left(\text{即}|x|\leqslant L,\ \dfrac{\partial \phi'}{\partial x}\Big|_{t=0}\neq 0, u|_{t=0}=0, v|_{t=0}=0\right)$的非地转状态下，地转适应的建立过程.

4. 对第 2 题的方程组，设初条件为

$$u|_{t=0}=0,\quad v|_{t=0}=0,\quad \phi'|_{t=0}=\begin{cases}\phi_0, & x<0,\\ -\phi_0, & x>0.\end{cases}$$

证明：适应过程的终态解为

$$u_\infty=0,\quad \phi'_\infty=\begin{cases}\phi_0(1-e^{x/L_0}), & x<0,\\ \phi_0(-1+e^{-x/L_0}), & x>0,\end{cases}\quad v_\infty=\begin{cases}-\dfrac{\phi_0}{c_0}e^{x/L_0}, & x<0\\ -\dfrac{\phi_0}{c_0}e^{-x/L_0}, & x>0.\end{cases}$$

提示：(1) ϕ'_∞ 满足$\dfrac{\partial^2\phi'_\infty}{\partial x^2}-\dfrac{1}{L_0^2}\phi'_\infty=-\dfrac{1}{L_0^2}\phi'|_{t=0}$，$L_0\equiv c_0/f_0$；(2) $x<0$ 和 $x>0$ 处的解分别是 $\phi'_\infty=Ae^{x/L_0}+\phi_0$，$\phi'_\infty=Be^{-x/L_0}-\phi_0$，用 $x=0$ 处 $\phi'_\infty=0$ 去定常数 A 和 B.

5. 对第 2 题的方程组，设初条件为

$$u|_{t=0}=0,\quad v|_{t=0}=\begin{cases}v_0, & |x|<L,\\ 0, & |x|>L,\end{cases}\quad \frac{\partial\phi'}{\partial x}\Big|_{t=0}=0.$$

证明：适应过程的终态解为

$$u_\infty=0,\quad \phi'_\infty=\begin{cases}-c_0v_0e^{x/L_0}\sinh L/L_0, & x\leqslant -L,\\ c_0v_0e^{-L/L_0}\sinh x/L_0, & |x|\leqslant L,\\ c_0v_0e^{-x/L_0}\sinh L/L_0, & x\geqslant L,\end{cases}$$

$$v_\infty=\begin{cases}-v_0e^{x/L_0}\sinh L/L_0, & x\leqslant -L,\\ v_0e^{-L/L_0}\cosh x/L_0, & |x|\leqslant L,\\ -v_0e^{-x/L_0}\sinh L/L_0, & x\geqslant L.\end{cases}$$

提示：(1) ϕ'_∞ 满足$\dfrac{\partial^2\phi'_\infty}{\partial x^2}-\dfrac{1}{L_0^2}\phi'_\infty=f_0\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_{t=0}=0(x\neq\pm L)$；(2) 考虑到 $v|_{t=0}$是

x 的偶函数，ϕ'_∞ 应是 x 的奇函数，在 $|x|<L$ 处的解是 $\phi'_\infty = A\sinh x/L_0$，而在 $x<-L$ 和 $x>L$ 处的解分别是 $\phi'_\infty = B_1 e^{x/L_0}$ 和 $\phi'_\infty = B_2 e^{-x/L_0}$，用 $x=\pm L$，ϕ'_∞ 连续的条件定出 $B_1 = -Ae^{L/L_0}\sinh L/L_0$，$B_2 = Ae^{L/L_0}\sinh L/L_0$；(3) 因在 $x=\pm L$ 处，$\dfrac{\partial\phi'_\infty}{\partial x}$ 有一跳跃，如根据 $\left(\dfrac{\partial\phi'_\infty}{\partial x}\right)_{L-\varepsilon} - \left(\dfrac{\partial\phi'_\infty}{\partial x}\right)_{L+\varepsilon} = f_0 v_0$，令 $\varepsilon\to 0$ 定出 $A = c_0 v_0 e^{-L/L_0}$.

6. 对第 2 题的方程组，设初条件为

$$v|_{t=0} = 0, \quad \phi'|_{t=0} = \phi'_0(x) = \begin{cases} \phi_0, & |x| \leqslant L, \\ 0, & |x| > L. \end{cases}$$

证明：在 $x=0$ 处的适应终态为

$$\phi'_\infty = \phi_0(1 - e^{-L/L_0}).$$

7. 用 Riemann 方法解第 1 题.

8. 在正压地转适应过程中，若初条件为

$$\varphi|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} f_0\psi_0 = 常数, & |r| \leqslant R_0, \\ 0, & |r| > R, \end{cases}$$

证明：在扰源中心 $(x,y)=(0,0)$ 处

$$\psi = \begin{cases} \psi_0 \sin f_0 t, & 当\ t \leqslant R_0/c_0, \\ \psi_0\left(\sin f_0 t - \sin\sqrt{(f_0 t)^2 - \left(\dfrac{R_0}{L_0}\right)^2}\right), & 当\ t \geqslant R_0/c_0. \end{cases}$$

9. 用 Fourier 积分变换法解正压地转适应方程的初值问题（即解方程组(12.58)带有初条件(12.59)的 Cauchy 问题）.

10. 用 Fourier 积分变换法解正压地转适应的终态方程（即解方程(12.79)）.

11. 在斜压地转适应过程中，若初条件为

$$\omega_2|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\omega_2}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} -2\Delta p f_0 A, & |r| \leqslant R_0, \\ 0, & |r| > R_0, \end{cases}$$

证明：在扰源中心 $(x,y)=(0,0)$ 处

$$\omega_2 = \begin{cases} -\Delta p A \sin f_0 t, & t \leqslant R_0/c_1, \\ -\Delta p A\left(\sin f_0 t - \sin\sqrt{(f_0 t)^2 - \left(\dfrac{R_0}{L_1}\right)^2}\right), & t \geqslant R_0/c_1. \end{cases}$$

12. 证明：在斜压地转适应过程中的时间不变量为

$$\zeta + \frac{f_0}{c_a^2}\frac{\partial}{\partial p}\left(p^2\frac{\partial\phi}{\partial p}\right) = q(x,y,p).$$

13. 将下列一般二维波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}+A\dfrac{\partial}{\partial t}+B\dfrac{\partial}{\partial x}+D\dfrac{\partial}{\partial y}-c_0^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+f_0^2\right]q=0,\\ q\big|_{t=0}=q_0(x,y),\quad \dfrac{\partial q}{\partial t}\bigg|_{t=0}=q_1(x,y)\end{cases}$$

化为标准二维适应方程的初值问题.

提示：作变换 $q=Qe^{\alpha t+\beta x+\gamma y}$.

14. 试求非线性正压方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial E}{\partial x}=(f_0+\zeta)v\equiv N_u,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial E}{\partial y}=-(f_0+\zeta)u\equiv N_v,\\ \dfrac{\partial E}{\partial t}+c_0^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=-\left[u\dfrac{\partial}{\partial x}(E+\phi)+v\dfrac{\partial}{\partial y}(E+\phi)\right]\equiv N_\phi\end{cases}$$

满足一定条件在整个平面上的有界解，其中 $E=\phi+\dfrac{1}{2}(u^2+v^2)$ 为正压模式中的总能量.

提示：通过消元，视 N_u,N_v,N_ϕ 为已知量，把方程组化为仅含 $\dfrac{\partial u}{\partial t},\dfrac{\partial v}{\partial t},\dfrac{\partial E}{\partial t}$ 的方程.

第十三章 低纬大气动力学

本章的主要内容有：

简述低纬大气运动的特征，对低纬大尺度运动进行尺度分析，并分析低纬大气风场与气压场的关系及惯性振荡；

介绍低纬大气的主要波动：即低纬 Kelvin 波、低纬惯性-重力波、低纬 Rossby 波和低纬混合的 Rossby-重力波（即 Yanai 波），同时介绍低纬的半地转近似及其滤波；

讨论低纬扰动的不稳定问题，并用它说明台风的生成和发展；

分析低纬小尺度对流与大尺度扰动间的相互作用，并介绍用大尺度变量表征对流凝结加热的所谓积云对流加热参数化的方法；

叙述第二类条件不稳定，即所谓 CISK 的概念，并用它讨论台风的发展；

叙述台风的一般结构；

介绍与非绝热过程有关的非绝热波动.

§13.1 低纬大气运动的主要特征

在本章之前主要讨论的是中、高纬度大气动力学的一些基本问题. 本章则讨论发生在赤道（$\varphi=0$）以北或以南 20—30 纬度（称为低纬度或热带地区）内大气的运动.

低纬大气运动是全球大气环流中重要的一环. 如把大气视为一部热机，则推动这部热机的根本动力是太阳辐射能. 而太阳辐射首先加热地球表面，然后输送给大气，而太阳辐射能的大部分在低纬地区被地球吸收. 所以，就地球不同纬度而言，低纬是大气运动的主要能源地区，这样，低纬大气运动就与中、高纬大气运动紧密相关.

大量的观测事实和理论分析都说明，低纬大气运动主要的特征有：

(1) 在低纬，Coriolis 参数 f 的数值较小，平均而言

$$f \approx 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}.$$

正因为如此，取 $f_0=0$，则低纬多应用所谓“赤道 β 平面近似”，即

$$f=\beta_0 y,\quad \beta_0 = 2\Omega\cos\varphi_0/a = 2\Omega/a. \tag{13.1}$$

不过，应该注意的是，在低纬，另一 Coriolis 参数 f' 显得较为重要，且近似为常

数，即

$$f' = 2\Omega\cos\varphi \approx 2\Omega. \tag{13.2}$$

(2) 低纬地区多为广大海洋，除高层而外，在低纬盛行潮湿空气的对流运动，上升运动伴有凝结潜热的释放．所以，低纬大气运动是湿空气的运动，凝结潜热是十分重要的能源．

(3) 低纬地区的对流层中、下层多是湿空气运动，表征层结的参数应是湿 Brunt-Väisälä 频率 N_m，即

$$N_m \equiv \sqrt{g\frac{\partial \ln\theta_e}{\partial z}} = \sqrt{\frac{g}{T_0}(\Gamma_m - \Gamma)}, \tag{13.3}$$

其中 θ_e 为相当位温，Γ_m 为湿绝热垂直减温率．因为通常 $\Gamma_m < \Gamma_d$，所以，与中高纬度多为干空气的情况相比，$N_m < N$．而低纬地区对流和湍流都较强，因此，低纬对流层中、下层的弱的层结有利于对流和湍流的垂直输送．

(4) 低纬地区水平温差较小，所以，相对于中、高纬度而言，低纬大气的斜压性较小，某些地区可近似处理为正压大气．

(5) 低纬的大气系统主要有：

(a) 积云对流云团：它由中小型对流云系组成，水平范围为几百公里，可维持 3—4 天，它按盛行风向移动．

(b) 热带气旋：它包括台风（位于西太平洋）和飓风（位于大西洋），是流场呈气旋式旋转的低压系统，具有暖心和眼的结构．水平范围也为几百公里，可维持 3—5 天，同时伴有强烈的风和暴雨天气．

(c) 热带辐合带 ITCZ(Inter-Tropical Convergence Zones)：它又称为赤道辐合带，在北半球，是由北面的东北信风和南面的赤道西风构成的狭长的纬圈带，其水平范围为几千公里，其上扰动常不稳定，形成台风．

(d) 低纬波动：在低纬对流层下层，大尺度的波动主要是向西移动的低纬 Rossby 波（即东风波，移速近于 $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，周期约 4—5 天）和向东传播的惯性-重力波（移速约 $30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，周期 4—5 天或 14—15 天）．另外，在台风这样的中尺度系统中还存在惯性-重力波．

在低纬对流层上层和平流层，大尺度的波动主要是向东移动的低纬 Kelvin 波（移速 $30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，周期 15 天，但 $v=0$，且对于赤道，u 是对称的，p 也是对称的）和向西移动的混合 Rossby-重力波（移速 $20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，周期 4—5 天，且对于赤道，$v$ 对称，而 u 反对称，p 也是反对称）．

§13.2 低纬大尺度运动的尺度分析

首先，我们要说明的是，由于 $\delta \equiv D/L \ll 1$，所以静力学关系在低纬的大尺度运

动中依然非常准确地成立，因此，可利用方程组(10.1). 其次，在低纬要考虑非绝热的作用，主要是太阳辐射和凝结潜热. 这样，不考虑摩擦，则以静态为背景的大气运动方程组可以写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}-fv=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}+fu=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial \phi'}{\partial z}=g\dfrac{\theta'}{\theta_0} \qquad (\phi'\equiv p'/\rho_0), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+u\dfrac{\partial}{\partial x}+v\dfrac{\partial}{\partial y}+w\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\left(g\dfrac{\theta'}{\theta_0}\right)+N^2w=\dfrac{g}{c_pT_0}\left(Q-L\dfrac{\mathrm{d}q_s}{\mathrm{d}t}\right), \end{cases} \tag{13.4}$$

其中 Q 主要代表太阳辐射加热，而 $-L\dfrac{\mathrm{d}q_s}{\mathrm{d}t}$ 表凝结潜热.

采用在第五章尺度分析中所应用的符号，在低纬对流层中，我们取

$L=10^6\,\mathrm{m}$, $U=10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\tau=L/U=10^5\,\mathrm{s}$, $f_0=10^{-5}\,\mathrm{s^{-1}}$,

$H=10^4\,\mathrm{m}$, $D=10^4\,\mathrm{m}$, $Q/c_p=10^{-5}\,\mathrm{K\cdot s^{-1}}$, $T_0=\theta_0=300\,\mathrm{K}$,

$g=10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $N^2=10^{-4}\,\mathrm{s^{-2}}$, $N_m^2=10^{-5}\,\mathrm{s^{-2}}$.

下面就利用方程组(13.4)作尺度分析.

一、连续性方程

连续性方程为

$$\underset{\boxed{\frac{U}{L}}}{\frac{\partial u}{\partial x}}+\underset{\boxed{\frac{U}{L}}}{\frac{\partial v}{\partial y}}+\underset{\frac{W}{D}}{\frac{\partial w}{\partial z}}=0, \tag{13.5}$$

由此得到 w 的尺度 W 满足

$$W/D\leqslant U/L, \tag{13.6}$$

而且可以得到水平散度的尺度 D_0 与 W 之间有关系

$$D_0=W/D. \tag{13.7}$$

二、水平运动方程

水平运动方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}-fv=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial x},\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}+fu=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial y}.\end{cases}\quad (\phi'\equiv p'/\rho_0)\quad(13.8)$$

$$\boxed{\frac{U^2}{L}}\quad \boxed{\frac{U^2}{L}}\quad \frac{WU}{D}\leqslant\frac{U^2}{L}\quad f_0U\quad \frac{\Phi'}{L}=\frac{p'}{\rho_0 L}$$

因低纬 $f_0=10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$，则低纬 Rossby 数为

$$R_0\equiv\frac{U}{f_0L}\approx 10^0,\tag{13.9}$$

因而，在方程(13.8)中的已知最大项为 U^2/L，而 $\Phi'/L=p'/\rho_0L$ 待定，则求得

$$\frac{p'}{\rho_0}=\Phi'=U^2=10^2\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}=10\,\mathrm{gpm}.\tag{13.10}$$

而在中、高纬地区的大尺度运动中，$\Phi'=f_0UL=10^3\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}=10^2\,\mathrm{gpm}$(gpm 定义见第一章§1.3)，所以，若用角标 l 表低纬，m 表中高纬，则

$$\frac{\Phi_l'}{\Phi_m'}=10^{-1}.\tag{13.11}$$

再由状态方程和静力学方程，必然有

$$\frac{\Theta_l'}{\Theta_m'}=\frac{T_l'}{T_m'}=\frac{\Pi_l'}{\Pi_m'}=\frac{\Phi_l'}{\Phi_m'}=10^{-1},\tag{13.12}$$

式中 Θ',T',Π' 分别表等压面上位温偏差、气温偏差和密度偏差的尺度. 由此可知，在等压面上低纬状态偏差较中高纬状态偏差小一个量级，因而低纬状态分布较均匀，这是符合观测事实的. 至于 T_l' 的大小，可以由状态方程去确定.

三、静力学方程

静力学方程为

$$\frac{\partial\phi'}{\partial z}=g\frac{\theta'}{\theta_0}.\tag{13.13}$$

$$\boxed{\frac{\Phi'}{D}}\quad g\frac{\Theta'}{\theta_0}$$

由此求得

$$\Theta'=\frac{\Phi'\theta_0}{gD}=\frac{U^2\theta_0}{gD}=3\times10^{-1}\,\mathrm{K}.\tag{13.14}$$

四、热力学方程

我们分无凝结潜热和有凝结潜热两种情况说明.

1. 无凝结潜热

此时,热力学方程可以写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(g\frac{\theta'}{\theta_0}\right)+N^2w=\frac{g}{c_pT_0}Q, \tag{13.15}$$

$$\frac{gU\Theta'}{L\theta_0}=\frac{U^3}{LD}<\frac{gQ}{T_0c_p} \qquad N^2W \qquad \boxed{\frac{g}{T_0}\frac{Q}{c_p}}$$

其中的最大已知项为$\frac{g}{T_0}\frac{Q}{c_p}$,则求得

$$W=\frac{g}{N^2T_0}\cdot\frac{Q}{c_p}=\frac{1}{3}\times10^{-2}\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}, \tag{13.16}$$

此值略小于中高纬度大尺度运动的 W(中高纬度大尺度运动 $W=10^{-2}\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$).

2. 有凝结潜热

此时,若仅考虑凝结潜热,则热力学方程可以写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(g\frac{\theta'}{\theta_0}\right)+N^2w=-\frac{g}{c_pT_0}L\frac{\mathrm{d}q_s}{\mathrm{d}t}. \tag{13.17}$$

但是,$\frac{\mathrm{d}q_s}{\mathrm{d}t}\approx w\frac{\partial q_{s0}}{\partial z}$,$-\frac{g}{c_pT_0}L\frac{\mathrm{d}q_s}{\mathrm{d}t}=-g\frac{Lw}{c_pT_0}\frac{\partial q_{s0}}{\partial z}$,注意到(4.42)式$\frac{\partial\ln\theta_{e_0}}{\partial z}=\frac{\partial\ln\theta_0}{\partial z}+\frac{L}{c_pT_0}\frac{\partial q_{s0}}{\partial z}$,$N^2=g\frac{\partial\ln\theta_0}{\partial z}$,$N_m^2=g\frac{\partial\ln\theta_{e_0}}{\partial z}$,则(13.17)式化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(g\frac{\theta'}{\theta_0}\right)+N_m^2w=0. \tag{13.18}$$

$$\frac{gU\Theta'}{L\theta_0}=\frac{U^3}{LD} \qquad N_m^2W$$

由此求得

$$W=\frac{gU\Theta'}{N_m^2L\theta_0}=\frac{gU^3}{N_m^2LD}=10^{-1}\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}, \tag{13.19}$$

其数值约是中高纬度大尺度运动 W 的 10 倍.

由以上分析便知,在考虑凝结潜热的情况下,低纬大尺度运动有较强的垂直运动.相应,由(13.7)式,

$$D_0=\frac{gU^3}{N_m^2LD^2}\approx10^{-5}\mathrm{s}^{-1}. \tag{13.20}$$

因而水平辐散也较强,这样就给蕴育在大尺度运动中的积云对流提供了形成降水的必不可少的条件.当然,积云中的水汽凝结又反过来给大尺度运动提供能量,所以,在低纬经常要考虑大尺度运动和积云对流间的相互作用.

垂直涡度 ζ 的尺度通常取为

$$\zeta_0 = U/L \approx 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}, \tag{13.21}$$

因此，在有凝结时，水平散度与垂直涡度有同样的量级，这意味着低纬通常具有较强的非地转运动.

由(13.19)式还可求得 $O\left(w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)=O\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$，这意味着当有凝结时，在水平运动方程中，$w\dfrac{\partial u}{\partial z}$，$w\dfrac{\partial v}{\partial z}$与平流项具有同样的量级.

至于涡度方程和散度方程也可作类似的尺度分析.

§13.3 低纬大气风场与气压场的关系

在中高纬度的大尺度运动中，风场与气压场的最基本的关系就是地转风关系. 低纬的情况如何呢？低纬地区描写水平运动(风)的运动方程可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}-\beta_0 yv=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial x},\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+\beta_0 yu=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial y}\end{cases}\quad (\phi'\equiv p'/\rho_0). \tag{13.22}$$

若不考虑加速度，则上式化为

$$-\beta_0 yv=-\frac{\partial \phi'}{\partial x},\quad \beta_0 yu=-\frac{\partial \phi'}{\partial y}, \tag{13.23}$$

此即低纬地区形式上的地转风关系. 然而实际观测表明，在低纬$\dfrac{\partial \phi'}{\partial x}\approx 0$，$\dfrac{\partial \phi'}{\partial y}\neq 0$，因而上式可改写为

$$v\approx 0,\quad \beta_0 yu=-\frac{\partial \phi'}{\partial y}. \tag{13.24}$$

这表明，u 在形式上与 $\phi'(y)$之间满足地转关系，这就是通常所说的低纬的半地转关系.

在近赤道地区，$y\to 0$，若 $\phi'(y)$存在极值($\partial\phi'/\partial y=0$)，则由上式有

$$u=\lim_{y\to 0}\left(-\frac{\partial \phi'}{\partial y}\right)\Big/\beta_0 y=-\frac{1}{\beta_0}\left(\frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2}\right)_{y=0}, \tag{13.25}$$

这就是低纬近赤道地区风场与气压场之间的关系. 在赤道多数情况有 $\partial^2\phi'/\partial y^2<0$（赤道高压），则由上式有 $u>0$，这就是赤道西风，若在赤道 $\partial^2\phi'/\partial y^2>0$（赤道低压），则 $u<0$，即赤道东风.

正由于低纬 Coriolis 参数 f 的数值较小，因而，低纬非线性的作用增大，因此完全不考虑加速度是不合适的. 若考虑水平运动的加速度，则方程组(13.22)可以写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_{\mathrm{h}}}{\partial t}-(\zeta+\beta_0 y)\boldsymbol{V}_{\mathrm{h}}\times\boldsymbol{k}=-\nabla(\phi'+K),\tag{13.26}$$

其中 $\phi'=p'/\rho_0$ 为压力能，$K\equiv(u^2+v^2)/2$ 为水平运动动能.

由上式我们求得：在定常条件下$\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}_{\mathrm{h}}}{\partial t}=0\right)$，风场与气压场的关系可写为

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{h}}=-\frac{1}{\zeta+\beta_0 y}\nabla(\phi'+K)\times\boldsymbol{k}.\tag{13.27}$$

上式表明：在定常情况下，低纬大气风场的流线也是能量 $\phi'+K$ 的等值线.

§13.4 低纬大气的惯性振动

本节讨论在 Coriolis 力作用下的惯性振动. 考虑到低纬$\frac{\partial \phi'}{\partial x}\approx 0$，我们令

$$-\frac{\partial \phi'}{\partial y}\equiv F(y),\tag{13.28}$$

则方程组(13.22)可以改写为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-\beta_0 yv=0,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\beta_0 yu=F(y).\end{cases}\tag{13.29}$$

因

$$u\equiv\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\equiv\dot{x},\quad v\equiv\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\equiv\dot{y},\tag{13.30}$$

则方程组(13.29)化为

$$\begin{cases}\ddot{x}-\beta_0 y\dot{y}=0,\\ \ddot{y}+\beta_0 y\dot{x}=F(y).\end{cases}\tag{13.31}$$

将其中的第一个方程对时间积分一次，得到

$$\dot{x}-\frac{1}{2}\beta_0 y^2=A,\tag{13.32}$$

式中 A 为积分常数. 将(13.32)式代入到方程组(13.31)的第二个方程，得到

$$\ddot{y}+\beta_0 Ay+\frac{1}{2}\beta_0^2 y^3=F(y).\tag{13.33}$$

下面，我们仅讨论 $F(y)=0$ 的低纬纯惯性振动. 因此，方程(13.33)化为

$$\ddot{y}+\beta_0 Ay+\frac{1}{2}\beta_0^2 y^3=0,\tag{13.34}$$

注意，若取初始($t=0$)位置和速度分别为

$$x\big|_{t=0} = x_0, \quad y\big|_{t=0} = y_0, \quad \dot{x}\big|_{t=0} = u_0, \quad \dot{y}\big|_{t=0} = v_0, \tag{13.35}$$

则由(13.32)式求得

$$A = u_0 - \frac{1}{2}\beta_0 y_0^2 \equiv u_0^*. \tag{13.36}$$

这样，方程(13.34)化为

$$\ddot{y} + \beta_0 u_0^* y + \frac{1}{2}\beta_0^2 y^3 = 0, \tag{13.37}$$

这是 y 的非线性微分方程，称为 Duffing 方程.

先不考虑 Duffing 方程(13.37)中的非线性项，则它化为

$$\ddot{y} + \beta_0 u_0^* y = 0. \tag{13.38}$$

当 $u_0^* > 0$，或 $u_0 > \beta_0 y_0^2/2$ 时，方程(13.38)是振动方程. 它表示在低纬强西风时会出现惯性振动，其振动圆频率为

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\beta_0 u_0^*}; \tag{13.39}$$

而振动周期为

$$T_0 \equiv 2\pi/\omega_0 = 2\pi/\sqrt{\beta_0 u_0^*}. \tag{13.40}$$

若取 $u_0^* = 5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$，则算得 $\omega_0 = 10^{-5}\,\mathrm{s^{-1}}$，$T_0 = 6\times 10^5\,\mathrm{s} \approx 7\,\mathrm{d}$.

若考虑 Duffing 方程的非线性项，则 Duffing 方程(13.37)可以化为

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -\gamma\omega_0^2 y^3, \tag{13.41}$$

其中

$$\gamma \equiv \beta_0/2u_0^*. \tag{13.42}$$

Duffing 方程(13.41)的解为

$$y = y_0 \,\mathrm{cn}\,\omega t, \tag{13.43}$$

其中 cn( )是 Jacobi 椭圆余弦函数；其周期为 $4\mathrm{K}(m)$，这里 m 为模数，$\mathrm{K}(m)$为第一类 Legendre 完全椭圆积分(见(9.185)式). 模数 m 和圆频率 ω 分别满足

$$\begin{cases} m^2 = \dfrac{\gamma y_0^2}{2(1+\gamma y_0^2)} = \dfrac{\beta_0 y_0^2/2}{2u_0^* + \beta_0 y_0^2}, \\ \omega^2 = (1+\gamma y_0^2)\omega_0^2 = \left(1 + \dfrac{\beta_0 y_0^2}{2u_0^*}\right)\omega_0^2. \end{cases} \tag{13.44}$$

由 u_0^* 和 y_0 即可求得 m 和 ω.

由(13.43)式我们求得非线性惯性振动周期为

$$T = 4\mathrm{K}(m)/\omega. \tag{13.45}$$

取 $y_0 = 5\sqrt{2}\times 10^5\,\mathrm{m}$，$u_0^* = 5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$，则由(13.44)式算得 $m = 1/2$ 和 $\omega = \sqrt{2}\omega_0$；由 $m = 1/2$ 算得 $\mathrm{K}(m) = 1.686$. 则由上式算得 $T \approx 5\times 10^5\,\mathrm{s} \approx 6\,\mathrm{d}$.

由以上分析可知，低纬纯惯性振动周期约 6—7 天. 若要求得更长的周期，必须

考虑 $F(y)$，即考虑 y 方向气压梯度力的作用.

§13.5 低纬大气 Kelvin 波

低纬大气的 Kelvin 波是低纬大气对流层上层和平流层中存在的具有重力波性质的波动. 因为在赤道($y=0$)可以认为没有经向速度($v=0$)，而在远离赤道处($y\to\infty$)应认为包括 v 在内的所有物理量应有界或者为零，则由 §7.6 知，在整个区间上处处有 $v=0$，而且波向东传播. 所不同的是低纬 Kelvin 波的纬向速度 u 和气压场关于赤道对称. 为了方便，我们先分析正压模式下的低纬大气的 Kelvin 波，然后分析斜压模式下的低纬大气的 Kelvin 波.

一、正压大气的低纬 Kelvin 波

这是重力外波型的 Kelvin 波，应用赤道 β 平面近似的有自由面的线性正压模式，在 $v=0$ 时，方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=-\dfrac{\partial\phi'}{\partial x},\\ \beta_0 yu=-\dfrac{\partial\phi'}{\partial y},\\ \dfrac{\partial\phi'}{\partial t}+c_0^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0.\end{cases}\tag{13.46}$$

它可以理解为 $v\approx0$ 下的方程组. 方程组(13.46)的第三式对 t 微商，并利用第一式得

$$\mathscr{L}_G^{(1)}\phi'=0,\tag{13.47}$$

其中

$$\mathscr{L}_G^{(1)}\equiv\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tag{13.48}$$

为一维重力外波算子. 由此判断，其传播速度为重力外波的波速，即

$$c=\pm c_0=\pm\sqrt{gH},\tag{13.49}$$

相应的圆频率为

$$\omega=\pm kc_0.\tag{13.50}$$

从形式上看，它可以向东和向西两个方向传播，但若利用方程组(13.46)的第二式，c 或 ω 只能取正号，即这种重力波只能向东移动. 这是因为若将方程组(13.46)的第二式对 t 微商，并利用第一式得

$$\frac{\partial^2\phi'}{\partial t\partial y}-\beta_0 y\frac{\partial\phi'}{\partial x}=0,\tag{13.51}$$

这是 ϕ' 的变系数方程. 若取

$$y \to \infty, \quad \phi' = 0, \tag{13.52}$$

则设

$$\phi' = \Phi(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \tag{13.53}$$

将其代入方程(13.51)和边条件(13.52)得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}y} + \dfrac{\beta_0 k}{\omega} y\Phi = 0, \\ \Phi\big|_{y\to\infty} = 0. \end{cases} \tag{13.54}$$

(13.54)式中方程的解很易求得为

$$\Phi(y) = \phi_0 \exp\left\{-\frac{\beta_0 k}{2\omega} y^2\right\}, \tag{13.55}$$

但要满足 $\Phi|_{y\to\infty}=0$ 的条件，只有 $\omega>0$；否则，$\omega<0$，$\Phi|_{y\to\infty}\to\infty$. 所以，对 Kelvin 波，只能向东传播，即

$$c = c_0, \tag{13.56}$$

或

$$\omega = kc_0. \tag{13.57}$$

将(13.55)式代入(13.53)式，得到

$$\phi' = \phi_0 \exp\left\{-\frac{y^2}{2L_0^2}\right\} \cdot \exp\{\mathrm{i}(kx-\omega t)\}. \tag{13.58}$$

显然，ϕ_0 是赤道处($y=0$)ϕ'的振幅；其中

$$L_0 = \sqrt{c_0/\beta_0} \tag{13.59}$$

称为低纬正压 Rossby 变形半径，其数值近于 3.8×10^6 m. 由(13.58)式看到，低纬 Kelvin 波的气压场关于赤道对称，且当 $y=\sqrt{2}L_0$ 时，$\phi'=\phi_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}/\mathrm{e}$，即扰动振幅是 $y=0$ 处振幅的 $1/\mathrm{e}$.

将(13.57)式代入(13.46)的第二式求得 Kelvin 波的纬向速度为

$$u = \frac{1}{c_0}\phi_0 \exp\left\{-\frac{1}{2L_0^2} y^2\right\} \cdot \exp\{\mathrm{i}(kx-\omega t)\}, \tag{13.60}$$

它也关于赤道对称.

由此可知，正压的低纬 Kelvin 波的经向速度为零；纬向速度和自由面高度扰动关于赤道对称且呈 Gauss 分布和满足形式上的地转关系 $\left(\beta_0 yu = -\dfrac{\partial\phi'}{\partial y}\right)$. 正压情况下，低纬 Kelvin 波向东移动，波速为 $c_0=\sqrt{gH}$.

低纬 Kelvin 波最早在海洋中被发现，$y=0$ 相当于海岸. 这样，在海洋中的低纬 Kelvin 波能量集中于海岸附近，它沿着海岸的一个方向传播，而且常引起海岸附近有限水位的变动.

二、斜压大气的低纬 Kelvin 波

这是重力内波型的 Kelvin 波，我们应用方程组(8.233)，在 $v=0$ 和赤道 β 平面近似的条件下，线性化的方程组可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial x},\\ \beta_0 yu=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial y},\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \phi'}{\partial z}\right)+N^2 w=0\end{cases}\qquad (\phi'\equiv p'/\rho_0). \tag{13.61}$$

它可以理解为 $v\approx 0$ 下的方程组.

将方程组(13.61)的第四式对 z 微商，再利用第三式消去 w，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 \phi'}{\partial z^2}\right)-N^2\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{13.62}$$

将上式再对 t 微商，并利用方程组(13.61)的第一式消去 u，得

$$\mathscr{L}_{\mathrm{G}}^{(2)}\phi'=0, \tag{13.63}$$

其中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{G}}^{(2)}\equiv\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+N^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{13.64}$$

为静力平衡条件下的二维重力内波算子. 若令

$$\phi'=\Phi(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+nz-\omega t)}, \tag{13.65}$$

将其代入方程(13.63)，则求得重力内波的圆频率 ω 满足

$$\omega^2=k^2N^2/n^2. \tag{13.66}$$

由此求得它在 x 方向的传播速度为

$$c_x\equiv\frac{\omega}{k}=\pm c_1=\pm\frac{N}{n}=\pm\frac{NH}{nH}=\mp\frac{c_a}{\pi}. \tag{13.67}$$

在对流层上层及平流层，取 $c_a=10^2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$nH=\pi$，则由上式算得 $c_1=30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 仅由(13.67)式，似乎 c 可取正号也可取负号，但若给出下列无穷远条件

$$y\to\infty,\quad \phi'\to 0, \tag{13.68}$$

c 就只能取正值了. 这是因为若将方程组(13.61)的第二式对 t 微商，并利用第一式，得到

$$\frac{\partial^2\phi'}{\partial t\partial y}-\beta_0 y\frac{\partial \phi'}{\partial x}=0, \tag{13.69}$$

其形式完全同(13.51)式.

将(13.65)式代入方程(13.69),得到

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}y}+\frac{\beta_0 ky}{\omega}\Phi=0. \tag{13.70}$$

它的解为

$$\Phi(y)=\phi_0\exp\left\{-\frac{\beta_0 k}{2\omega}y^2\right\}. \tag{13.71}$$

将其代入(13.65)式求得

$$\phi'=\phi_0\exp\left\{-\frac{1}{2L_1^2}y^2\right\}\cdot\exp\{\mathrm{i}(kx+nz-\omega t)\}, \tag{13.72}$$

因而

$$p'=\rho_0\phi_0\exp\left\{-\frac{1}{2L_1^2}y^2\right\}\cdot\exp\{\mathrm{i}(kx+nz-\omega t)\}, \tag{13.73}$$

这里 ϕ_0 是赤道($y=0$)的 $z=0$ 处 ϕ' 的振幅;其中

$$L_1=\sqrt{c_1/\beta_0} \tag{13.74}$$

称为低纬斜压 Rossby 变形半径,其数值近于 1.2×10^6 m. 由(13.73)式看到,当 $y=\sqrt{2}L_1$ 时,p' 是 $y=0$ 处的值的 $1/e$.

由(13.65)式和(13.67)式还可以计算 z 方向 Kelvin 波的波长为

$$L_z=2\pi/n=2\pi c_1/N. \tag{13.75}$$

若取 $c_1=30\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $N=10^{-2}\mathrm{s^{-1}}$,则由上式算得 $L_z=1.8\times10^4$ m.

将(13.72)式代入方程组(13.61),可以求得 u 和 w 分别为

$$u=\frac{1}{c_1}\phi_0\exp\left\{-\frac{1}{2L_1^2}y^2\right\}\cdot\exp\{\mathrm{i}(kx+nz-\omega t)\}, \tag{13.76}$$

$$w=-\frac{knc_1}{N^2}\phi_0\exp\left\{-\frac{1}{2L_1^2}y^2\right\}\cdot\exp\{\mathrm{i}(kx+nz-\omega t)\}. \tag{13.77}$$

它们关于赤道也是对称的.

§13.6 低纬大气的一般线性波动

本节分析低纬大气的一般线性波动,为了方便,与低纬 Kelvin 波一样,我们仍分两类来说明.

一、低纬正压大气波动(外波型)

应用赤道 β 平面近似,有自由面的线性正压模式方程组可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\beta_0 yv=-\dfrac{\partial\phi'}{\partial x},\\ \delta\dfrac{\partial v}{\partial t}+\beta_0 yu=-\dfrac{\partial\phi'}{\partial y},\\ \dfrac{\partial\phi'}{\partial t}+c_0^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=0.\end{cases}\tag{13.78}$$

其中 $\delta=0$ 表 y 方向上的地转近似，即半地转近似．将方程组(13.78)的第二式对 x 微商，第一式对 y 微商，然后相减消去 ϕ' 得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial y}-\beta_0 y\frac{\partial}{\partial x}\right)u=\left(\delta\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}+\beta_0 y\frac{\partial}{\partial y}+\beta_0\right)v,\tag{13.79}$$

这就是涡度方程．同样，将方程组(13.78)的第一式对 t 微商，并利用第三式消去 ϕ' 得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u=\left(\beta_0 y\frac{\partial}{\partial t}+c_0^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)v.\tag{13.80}$$

由(13.79)式和(13.80)式消去 u，注意 $\dfrac{\partial^2}{\partial t\partial y}\left(\beta_0 y\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)=\beta_0 y\dfrac{\partial^3 v}{\partial t^2\partial y}+\beta_0\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}$，则得到

$$\mathscr{L}v=0,\tag{13.81}$$

其中

$$\mathscr{L}\equiv\frac{\partial}{\partial t}\left[\delta\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_0^2\left(\delta\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\beta_0^2 y^2\right]-\beta_0 c_0^2\frac{\partial}{\partial x}.\tag{13.82}$$

我们考虑低纬大气波动，离低纬很远处可认为波动消失，这样，我们取边条件为

$$y\to\pm\infty,\quad v=0.\tag{13.83}$$

方程(13.81)是关于 v 的变系数方程，应用正交模方法设

$$v=V(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\tag{13.84}$$

将其代入方程(13.81)，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}y^2}+\left[-\frac{\beta_0 k}{\omega}+\delta\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}-k^2\right)-\frac{\beta_0^2}{c_0^2}y^2\right]V=0,\tag{13.85}$$

这是变系数的二阶常微分方程．为了使其化为标准型，我们将自变量 y 和方程的系数无量纲化，令

$$y=L_0y_1,\quad k=\frac{1}{L_0}k_1,\quad \omega=\sqrt{\beta_0 c_0}\,\omega_1=\beta_0 L_0\omega_1,\tag{13.86}$$

其中 $L_0=\sqrt{c_0/\beta_0}$ 为低纬正压 Rossby 变形半径（见(13.59)式）；而 y_1,k_1,ω_1 分别为 y,k,ω 的无量纲量．

将(13.86)式代入方程(13.85)，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}y_1^2}+(\lambda-y_1^2)V=0. \tag{13.87}$$

这是所谓 Weber 方程，其中

$$\lambda\equiv-\frac{k_1}{\omega_1}+\delta(\omega_1^2-k_1^2). \tag{13.88}$$

将(13.86)式和(13.84)式代入边条件(13.83)，得到

$$V\mid_{y_1\to\pm\infty}=0. \tag{13.89}$$

方程(13.87)满足边条件(13.89)的本征值为

$$\lambda\equiv-\frac{k_1}{\omega_1}+\delta(\omega_1^2-k_1^2)=2m+1\quad(m=0,1,2,\cdots). \tag{13.90}$$

相应的本征函数为

$$V(y_1)=A_m\mathrm{e}^{-y_1^2/2}\mathrm{H}_m(y_1)\quad(m=0,1,2,\cdots), \tag{13.91}$$

其中 A_m 为非零常数，而 $\mathrm{H}_m(y_1)$为 m 阶的 Hermite 多项式. 因 $\mathrm{H}_m(y_1)$是 y_1 的振荡函数，所以，m 相当于波沿经圈方向的节点数. 注意 $\mathrm{e}^{-y_1^2/2}\mathrm{H}_m(y_1)=2^{m/2}\mathrm{D}_m(\sqrt{2}y_1)$，$\mathrm{D}_m(\sqrt{2}y_1)$是抛物柱函数或 Weber 函数.

将(13.91)式代入(13.84)式，记 $A_m=v_0$，则求得

$$v=v_0\exp\left\{-\frac{1}{2L_0^2}y^2\right\}\mathrm{H}_m\left(\frac{y}{L_0}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}. \tag{13.92}$$

类似，将 u 及 ϕ 也写成(13.84)式的形式，并将(13.92)式代入(13.80)式求出 u，代入(13.78)式求出 ϕ'，则得到

$$\begin{cases}u=\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{\beta_0c_0}}{\omega^2-k^2c_0^2}\left\{\dfrac{1}{2}(\omega+kc_0)\mathrm{H}_{m+1}\left(\dfrac{y}{L_0}\right)+(\omega-kc_0)m\mathrm{H}_{m-1}\left(\dfrac{y}{L_0}\right)\right\}v_0\exp\left\{-\dfrac{1}{2L_0^2}y^2\right\}\\ \qquad\cdot\exp\{\mathrm{i}(kx-\omega t)\},\\ \phi'=\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{\beta_0c_0}\cdot c_0}{\omega^2-k^2c_0^2}\left\{\dfrac{1}{2}(\omega+kc_0)\mathrm{H}_{m+1}\left(\dfrac{y}{L_0}\right)-(\omega-kc_0)m\mathrm{H}_{m-1}\left(\dfrac{y}{L_0}\right)\right\}v_0\exp\left\{-\dfrac{1}{2L_0^2}y^2\right\}\\ \qquad\cdot\exp\{\mathrm{i}(kx-\omega t)\}.\end{cases} \tag{13.93}$$

注意，上式得到过程中利用了 Hermite 多项式的下列性质：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{dH}_m(y_1)}{\mathrm{d}y_1}=2m\mathrm{H}_{m-1}(y_1),\\ \mathrm{H}_{m+1}(y_1)-2y_1\mathrm{H}_m(y_1)+2m\mathrm{H}_{m-1}(y_1)=0.\end{cases} \tag{13.94}$$

令 $\delta=1$，频率方程(13.90)是 ω_1 的三次代数方程，现在我们分别对 m 的不同情形进行讨论.

1. $m\geqslant1$

此时准确求解方程(13.90)并无必要，因为它能很好地区别低频波与高频波.

对于高频波，方程(13.90)中的$-k_1/\omega_1$项可以忽略，则有

$$\omega_1 = \pm\sqrt{k_1^2+2m+1} \quad (m \geqslant 1). \tag{13.95}$$

将(13.86)式代入上式，便求得高频波频率为

$$\omega_{IG} = \pm\sqrt{k^2c_0^2+(2m+1)\beta_0 c_0} \quad (m \geqslant 1), \tag{13.96}$$

它显然表征的是低纬惯性-重力外波的频率. 与中高纬惯性-重力外波的圆频率比较，$(2m+1)\beta_0 c_0$ 相当于 f_0^2. 若考虑基本气流 $\bar{u}$，则由上式求得低纬惯性-重力外波的波速为

$$c_{IG} = \bar{u} \pm\sqrt{c_0^2+\frac{(2m+1)\beta_0 c_0}{k^2}} \quad (m \geqslant 1). \tag{13.97}$$

但 $\bar{u} \ll c_0$，因此，它可以向东西两个方向传播.

对于低频波，方程(13.90)中的 ω_1^2 项可以忽略，则有

$$\omega_1 = -\frac{k_1}{k_1^2+2m+1} \quad (m \geqslant 1). \tag{13.98}$$

将(13.86)式代入，便求得低频波频率为

$$\omega_R = -\frac{\beta_0 k}{k^2+(2m+1)\beta_0/c_0} \quad (m \geqslant 1), \tag{13.99}$$

显然，它表征的是低纬 Rossby 波的频率. 与中高纬水平无辐散的 Rossby 波的圆频率比较，$(2m+1)\beta_0/c_0$ 相当于 y 方向波数 l 的平方 l^2. 若考虑基本气流 $\bar{u}$，则由上式求得低纬 Rossby 波的波速为

$$c_R = \bar{u} - \frac{\beta_0}{k^2+(2m+1)\beta_0/c_0} \quad (m \geqslant 1). \tag{13.100}$$

因低纬副热带高压南侧盛行偏东风，$\bar{u}<0$，则由上式算得 $c_R<0$，这就是低纬 Rossby 波俗称东风波的原因.

若作半地转近似，即令 $\delta=0$，则由(13.90)式求得

$$\omega_1 = -\frac{k_1}{2m+1} \quad (m \geqslant 1). \tag{13.101}$$

将(13.86)式代入，使上式还原为有量纲量，为

$$\omega = -\frac{kc_0}{2m+1} = -\frac{\beta_0 k}{(2m+1)\beta_0/c_0} \quad (m \geqslant 1). \tag{13.102}$$

将(13.102)式与(13.99)式比较即知：采用半地转近似可以滤去低纬惯性-重力外波，而保留超长尺度($k^2 \ll (2m+1)\beta_0/c_0$)的低纬 Rossby 波. 还要注意的是半地转近似可以视为 $v=0$，因此，半地转近似仍保留低纬 Kelvin 波.

对于低纬惯性-重力外波，在(13.90)式中忽略$-k_1/\omega_1$一项意味着在(13.82)式右端$\dfrac{\partial}{\partial t}$和$\dfrac{\partial}{\partial x}$的舍弃，因此，对于低纬惯性-重力外波，满足方程(13.81)的微分算

子(13.82)式改为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{IG}} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla_{\mathrm{h}}^2 + \beta_0^2 y^2. \tag{13.103}$$

与中高纬惯性-重力外波的(7.155)式相比，两者形式相同，只是(7.155)中的 f_0^2 现在换成了 $\beta_0^2 y^2$.

对于低纬 Rossby 波，在(13.90)式中忽略 ω_1^2 一项意味着在(13.82)式右端将 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 舍弃，因而它改为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{R}} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla_{\mathrm{h}}^2 - \frac{\beta_0^2}{c_0^2} y^2\right) + \beta_0 \frac{\partial}{\partial x}. \tag{13.104}$$

与中高纬 Rossby 波的(7.161)式相比，也是将 f_0^2 换成了 $\beta_0^2 y^2$(注意 $\lambda_0^2 = f_0^2/c_0^2$).

从(13.92)式和(13.93)式看到，由于存在 $\exp\left\{-\frac{1}{L_0^2} y^2\right\}$，因而，离开赤道越远，波越衰减. 事实上，由方程(13.87)看到，随着 y_1 的增加，V 的系数从正可以减少到零，甚至变为负. 使 V 的系数变为零的临界 y_1 值为

$$y_{1\mathrm{c}} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2m+1}. \tag{13.105}$$

把它作为有量纲的形式即为

$$y_{\mathrm{c}} = \sqrt{2m+1} \cdot \sqrt{c_0/\beta_0} = \sqrt{2m+1} L_0. \tag{13.106}$$

所以，当 $|y| < y_{\mathrm{c}}$ 时，V 的系数为正，波可以在 y 方向传播，且由方程(13.85)看到，此时 y 方向的波数 l 满足

$$l^2 \equiv -\frac{\beta_0 k}{\omega} + \frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2 - \frac{\beta_0^2}{c_0^2} y^2 = \frac{1}{L_0^2}(y_{\mathrm{c}}^2 - y^2). \tag{13.107}$$

而当 $|y| > y_{\mathrm{c}}$ 时，V 的系数为负，波在 y 方向被拦截(trapped).

2. $m=0$

此时方程(13.90)化为

$$\omega_1^3 - (k_1^2 + 1)\omega_1 - k_1 = 0, \tag{13.108}$$

即

$$(\omega_1 + k_1)(\omega_1^2 - k_1\omega_1 - 1) = 0. \tag{13.109}$$

方程(13.109)的第一个根为

$$\omega_1 = -k_1 \quad (m=0), \tag{13.110}$$

将(13.86)式代入并换回有量纲量，有

$$\omega = -k\beta_0 L_0^2 = -kc_0 \quad (m=0), \tag{13.111}$$

这是向西传播的重力外波的频率. 但由上式 $\omega^2 = k^2 c_0^2$，它将使得(13.80)式左端为零，所以，这个根应舍弃.

方程(13.109)的另两个根满足

$$\omega_1^2 - k_1\omega_1 - 1 = 0 \quad (m = 0). \tag{13.112}$$

它的两个根分别为

$$\omega_1^{(1)} = \frac{k_1}{2} + \sqrt{\frac{k_1^2}{4} + 1}, \quad \omega_1^{(2)} = \frac{k_1}{2} - \sqrt{\frac{k_1^2}{4} + 1} \quad (m = 0). \tag{13.113}$$

将(13.86)式代入得

$$\begin{cases} \omega^{(1)} = \dfrac{1}{2}kc_0 + \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}kc_0\right)^2 + \beta_0 c_0}, \\ \omega^{(2)} = \dfrac{1}{2}kc_0 - \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}kc_0\right)^2 + \beta_0 c_0} \end{cases} \quad (m = 0). \tag{13.114}$$

因 $\omega^{(1)} > 0$，且当 $\beta_0 \approx 0$ 时，$\omega^{(1)} \approx kc_0$，所以，$\omega^{(1)}$ 表征的是向东传播的惯性-重力外波的频率；因 $\omega^{(2)} < 0$，且当 $\beta_0 \approx 0$ 时，

$$\omega^{(2)} \approx \frac{1}{2}kc_0 - \frac{1}{2}kc_0\left(1 + \frac{4\beta_0}{2k^2c_0}\right) = -\frac{\beta_0}{k},$$

所以，$\omega^{(2)}$ 表征的是向西传播的混合 Rossby-重力外波的频率，这种波又称为柳井波(Yanai 波).

若考虑基本气流 $\bar{u}$，则由(13.114)式求得这两类波的波速为

$$\begin{cases} c^{(1)} = \bar{u} + \dfrac{1}{2}c_0 + \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}c_0\right)^2 + \dfrac{\beta_0 c_0}{k^2}}, \\ c^{(2)} = \bar{u} + \dfrac{1}{2}c_0 - \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}c_0\right)^2 + \dfrac{\beta_0 c_0}{k^2}} \end{cases} \quad (m = 0). \tag{13.115}$$

因 $m=0$ 时，$\mathrm{H}_m(y/L_0)=1$，则由(13.92)式求得

$$v = v_0 \exp\left\{-\frac{1}{2L_0^2}y^2\right\} \cdot \exp\{\mathrm{i}(kx - \omega t\} \quad (m = 0). \tag{13.116}$$

它说明：当 $m=0$ 时，经向速度关于赤道对称，且随 y 呈 Gauss 分布.

又因 $m=0$ 时，$\mathrm{H}_1(y/L_0)=2y/L_0$，则由(13.93)式求得

$$\begin{cases} u = \mathrm{i}\dfrac{\beta_0 y}{\omega - kc_0} v_0 \exp\left\{-\dfrac{1}{2L_0^2}y^2\right\} \cdot \exp\{\mathrm{i}(kx - \omega t)\}, \\ \phi' = \mathrm{i}\dfrac{\beta_0 c_0 y}{\omega - kc_0} v_0 \exp\left\{-\dfrac{1}{2L_0^2}y^2\right\} \cdot \exp\{\mathrm{i}(kx - \omega t)\} \end{cases} \quad (m = 0). \tag{13.117}$$

它说明：当 $m=0$ 时，纬向速度和自由面高度(表征气压场)关于赤道奇对称.

3. $m=-1$

依(13.90)式，$m \neq -1$，但当 $m=-1$ 时，(13.90)式化为

$$-\frac{k_1}{\omega_1} + \omega_1^2 - k_1^2 = -1, \tag{13.118}$$

即

$$(\omega_1 - k_1)(\omega_1^2 + k_1\omega_1 + 1) = 0, \tag{13.119}$$

其中 $\omega_1 = k_1$ 化为有量纲形式就是(13.57)式,这就是正压大气低纬 Kelvin 波的圆频率.所以低纬 Kelvin 波可以归结为(13.90)式中 $m=-1$ 的情况.

图 13.1 是低纬大气波动的圆频率 ω 随波数 k 的变化图.由图看出,对同样的 k 和 m 可能有性质不同的波动.

图 13.2 是当 $m=1$ 时由低纬 Rossby 波和惯性-重力外波给出的气压场和速度场的经向分布图.

图 13.3 是当 $m=0$ 时由向东传播的惯性-重力外波和向西传播的混合 Rossby-重力外波给出的气压场和速度场的经向分布图.

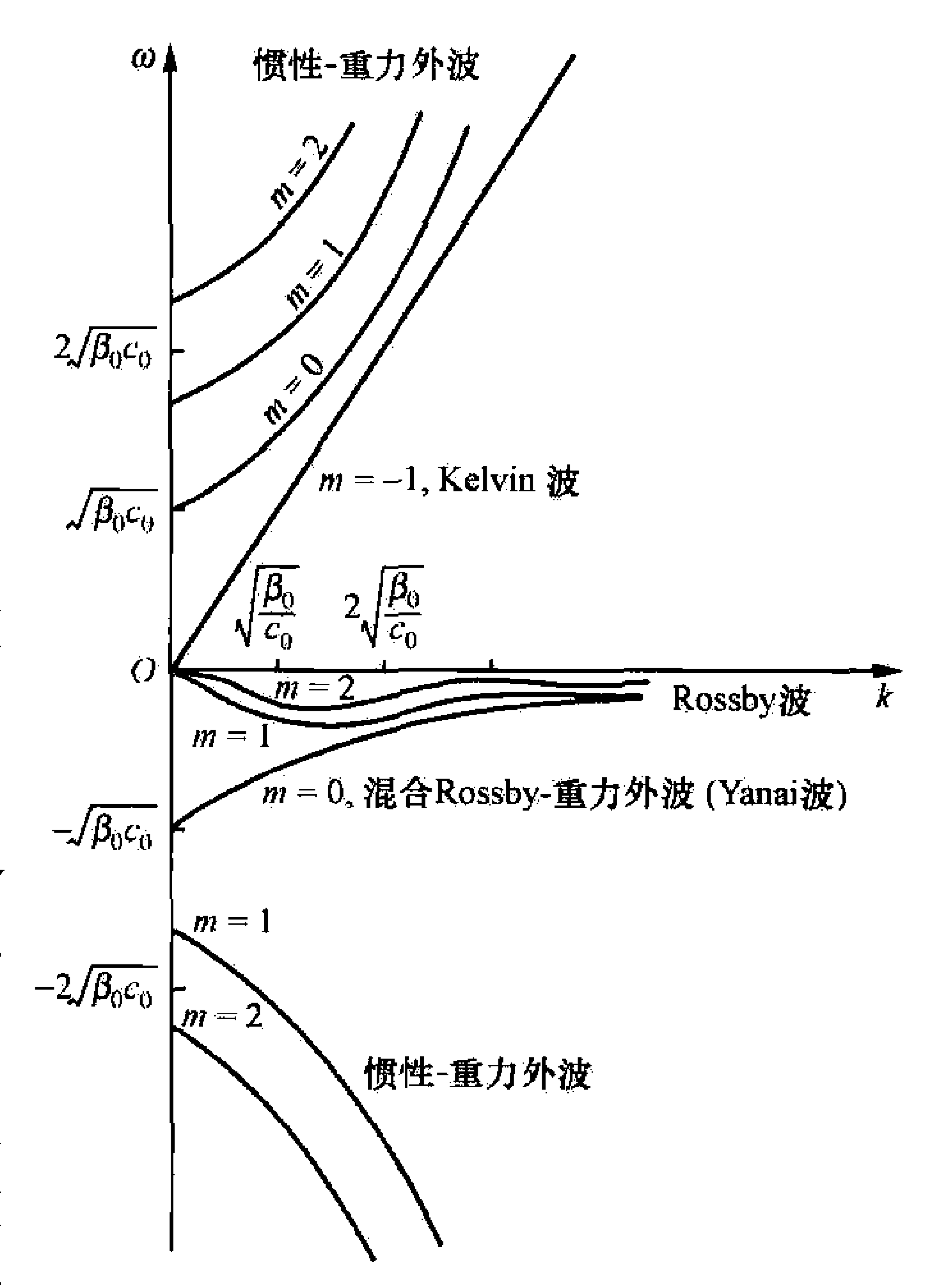


图 13.1 低纬大气波动的 ω-k 图

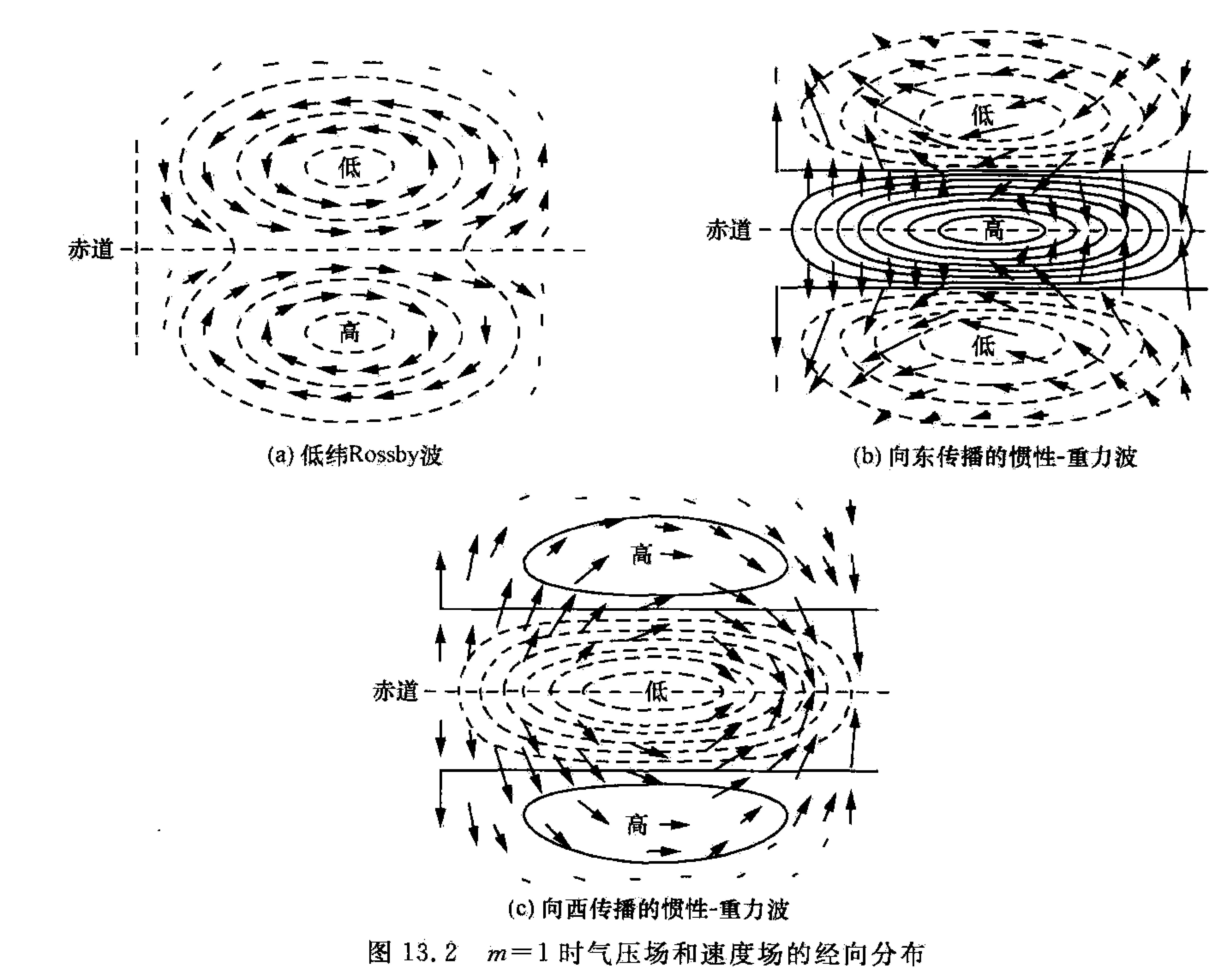


图 13.2 $m=1$ 时气压场和速度场的经向分布

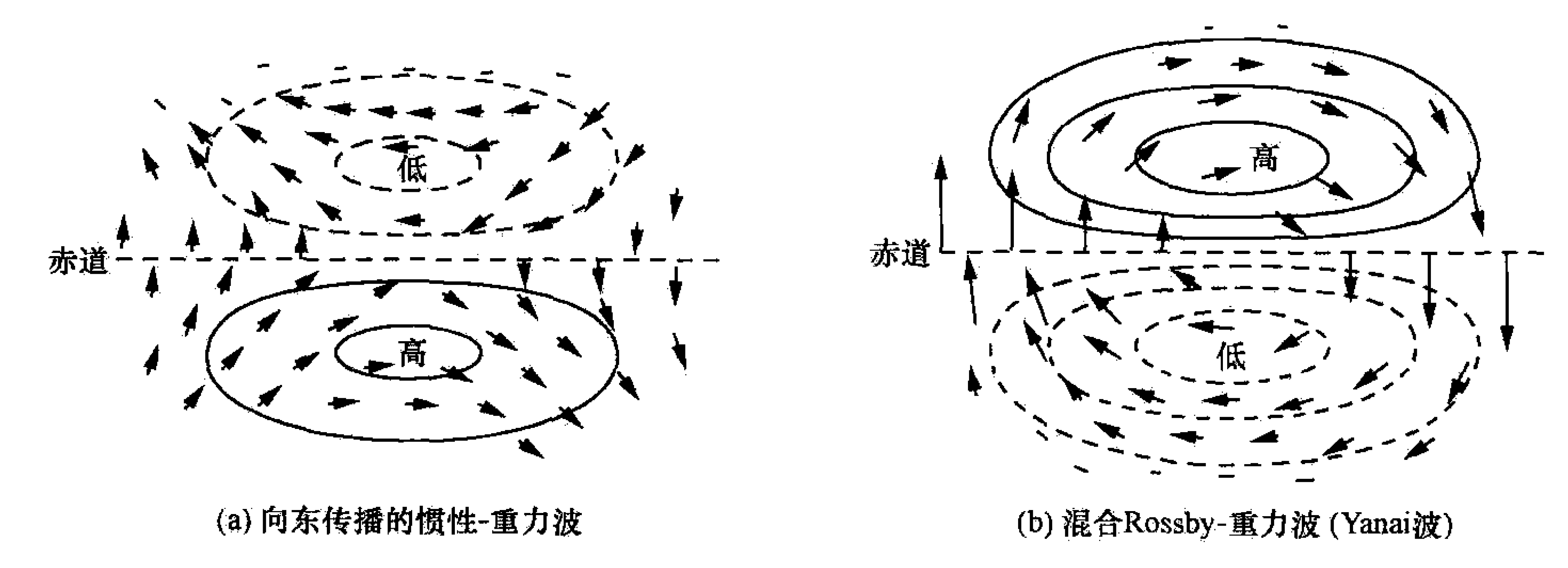


图 13.3 $m=0$ 时气压场和速度场的经向分布

图 13.4 是当 $m=-1$ 时由 Kelvin 波给出的气压场和速度场的经向分布图.

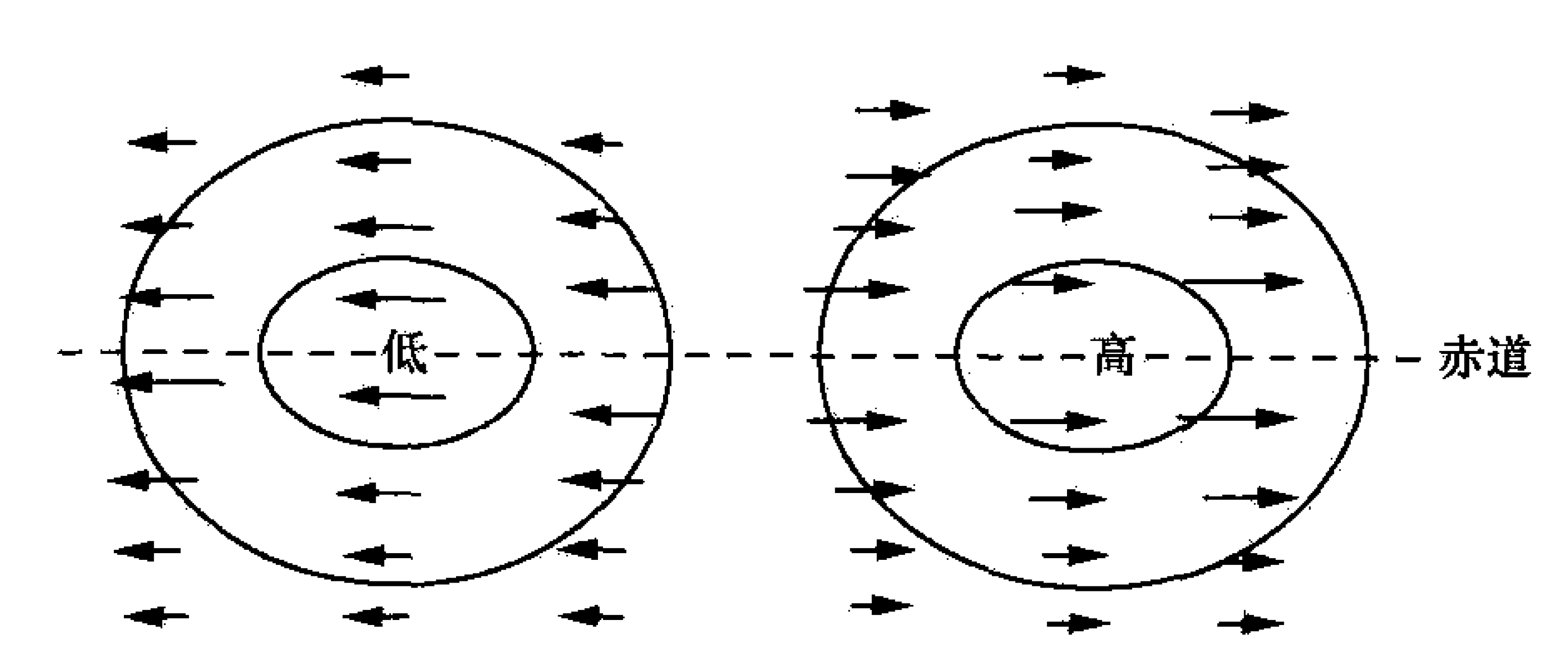


图 13.4 $m=-1$ 时低纬 Kelvin 波给出的气压场和速度场的经向分布

最后要指出的是由于 β 的作用，方程(13.81)在一定的初条件下的解 v 将在 t 足够大时趋于零，因而导致低纬气压场趋于纯纬向分布.

二、低纬斜压大气波动(内波型)

应用赤道 β 平面近似，在静力平衡条件下的方程组(8.233)的线性形式可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\beta_0 yv=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial x},\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+\beta_0 yu=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial y},\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \phi'}{\partial z}\right)+N^2 w=0\end{cases}\quad (\phi'\equiv p'/\rho_0),\tag{13.120}$$

方程组(13.120)通过消元很易得到

$$\mathscr{L}v=0,\tag{13.121}$$

其中

$$\mathscr{L} \equiv N^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla_h^2 + \beta_0\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \beta_0^2 y^2\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tag{13.122}$$

与(13.83)式相应，考虑低纬大气波动要求

$$y \to \pm\infty, \quad v \to 0. \tag{13.123}$$

考虑到算子(13.122)式的性质，我们设方程(13.121)的波动解为

$$v = V(y)e^{i(kx+nz-\omega t)}. \tag{13.124}$$

将上式代入方程(13.121)，得到

$$\frac{d^2V}{dy^2} + \left(-\frac{\beta_0 k}{\omega} + \frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2 - \frac{\beta_0^2}{c_1^2}y^2\right)V = 0. \tag{13.125}$$

方程(13.125)与方程(13.85)($\delta=1$)在形式上完全一样，只是 c_0^2 用 c_1^2 去代替了，因此，完全可以应用低纬正压波动的结果.

1. $m \geqslant 1$

它包含低频的低纬 Rossby 波和高频的惯性-重力内波，频率分别为

$$\omega_R = -\frac{\beta_0 k}{k^2 + (2m+1)\beta_0/c_1} \quad (m \geqslant 1), \tag{13.126}$$

$$\omega_{IG} = \pm\sqrt{k^2c_1^2 + (2m+1)\beta_0 c_1} \quad (m \geqslant 1). \tag{13.127}$$

相应 v 的解可以写为

$$v = v_0\exp\left\{-\frac{y^2}{2L_1^2}\right\}\cdot H_m\left(\frac{1}{L_1}y\right)\cdot \exp\{i(kx+nz-\omega t)\}, \tag{13.128}$$

其中 v_0 为 $y=0,z=0$ 处的 v 的振幅，而 $L_1=\sqrt{c_1/\beta_0}$ 为低纬斜压 Rossby 变形半径(见(13.74)式).

2. $m=0$

它包含惯性-重力内波和混合的 Rossby-重力内波，它们的频率分别是

$$\begin{cases} \omega^{(1)} = \frac{1}{2}kc_1 + \sqrt{\left(\frac{1}{2}kc_1\right)^2 + \beta_0 c_1}, \\ \omega^{(2)} = \frac{1}{2}kc_1 - \sqrt{\left(\frac{1}{2}kc_1\right)^2 + \beta_0 c_1} \end{cases} \quad (m=0). \tag{13.129}$$

相应，v 的解为

$$v = v_0\exp\left\{-\frac{y^2}{2L_1^2}\right\}\cdot \exp\{i(kx+nz-\omega t)\}. \tag{13.130}$$

3. $m=-1$

与外波型相似的分析推得，当 $m=-1$ 时，退化为斜压大气的低纬 Kelvin 波.

同时要指出的是：与外波型分析相似，在 y 方向上的半地转近似可以滤去惯性-重力内波而保留超长尺度的低纬 Rossby 波和 Kelvin 波.

最后要指出的是：在低纬平流层低层存在的所谓平均纬向风速的准两年周期

振荡(quasibiennial oscillation,简称 QBO)现象通常认为是由于向东传播的 Kelvin 波和向西传播的混合 Rossby-重力波与纬向气流相互作用的结果. 观测表明,Kelvin 波向东传播的同时也向下传播,依第七章分析,则波动能量向上传播($c_{gz}>0$),而且由于平流层辐射冷却形成的阻尼使得 Kelvin 波振幅随高度增加而衰减,这种能量输送产生 QBO 中的西风加速区;类似,向西传播的混合 Rossby-重力波也向下传播,则波动能量也向上传播,而且产生 QBO 中的东风加速区. 这样,垂直传播的 Kelvin 波和混合 Rossby-重力波把波动能量传输给纬向平均气流,使得向东和向西的平均纬向气流交替地得到加速,形成平均纬向气流的所谓准两年振荡. 还要指出的是低纬大气存在的 30—50 天的低频振荡(low-frequency oscillation 或 intraseasonal oscillation)现象通常认为是非绝热的 Kelvin 波和 Rossby 波所致,本章最后一节,我们将扼要地进行说明.

§13.7 积云对流加热参数化

我们知道,在低纬大气中凝结潜热的释放是低纬系统发展的一个重要能源. 但大气中的凝结过程在中高纬与低纬是不同的. 在中高纬锋区附近的大范围降水是缓慢的大尺度上升运动使空气绝热冷却达到饱和而产生的,这是大尺度缓慢上升运动形成的水汽凝结过程. 而在低纬度,水平温差小,很少会出现这种大范围的缓慢降水过程,它主要是积云对流形成的水汽凝结过程.

大量观测表明:在低纬度,上述对流凝结降水过程多集中在发展旺盛的深厚积云对流单体中,人们把这些对流积云称之为"热塔"(hot towers). 这些"热塔"所占面积并不大,却对低纬大气运动有重要的影响. 这是因为"热塔"将大量的感热、潜热和动量从低层输送到高层,这样又影响到高层以及中高纬度的大气运动. 当然,这些"热塔"的产生需要有大尺度运动的背景,因此,低纬大气动力学的一个重要特点是研究大尺度运动和小尺度积云对流运动之间的相互作用. 本节着重分析积云对流加热问题,并且给出用大尺度运动的变量来表征对流凝结加热的方法,即所谓积云对流加热参数化的方法.

为了表征大尺度运动和积云对流的相互作用,我们取一水平面积作为单位面积. 一方面该面积必须足够大,使其中包含相当多的积云群体,另一方面该面积又必须足够小,使物理量在该面积内平均能够反映出大尺度运动的特征. 设在此面积内,积云所占面积的百分比为 σ_c,则该面积内的无云部分所占面积的百分比为 $1-\sigma_c$,σ_c 可称为积云覆盖比. 设积云内温度、位温和比湿分别为 T_c,θ_c 和 q_c,云内垂直速度为 w_c,相应垂直 p 速度为 ω_c;云外环境空气的温度、位温和比湿分别为 T_0,θ_0 和 q_0,垂直速度为 w_0,相应垂直 p 速度为 ω_0. 则该面积内任一物理量 A(云内为

A_c，云外为 A_0）的平均值定义为

$$\bar{A} = \sigma_c A_c + (1 - \sigma_c) A_0, \tag{13.131}$$

$\bar{A}$ 可以用来表征大尺度运动. 同时，令

$$A = \bar{A} + A', \tag{13.132}$$

其中 A' 为 A 相对于 $\bar{A}$ 的扰动，它可以用来表征对流引起的扰动.

在低纬，若仅考虑积云对流凝结加热 Q_c，则在 p 坐标系中的热力学方程可以写为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + u\frac{\partial\theta}{\partial x} + v\frac{\partial\theta}{\partial y} + \omega\frac{\partial\theta}{\partial p} = \frac{1}{\Pi}Q_c, \tag{13.133}$$

其中

$$\Pi = c_p\frac{T}{\theta} = c_p\left(\frac{p}{P_0}\right)^{R/c_p} \tag{13.134}$$

为 Exner 函数.

按(13.132)式取平均，热力学方程(13.133)可以化为

$$\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y} + \bar{\omega}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial p} = \frac{1}{\Pi}\bar{Q}_c - \overline{\left(u'\frac{\partial\theta'}{\partial x} + v'\frac{\partial\theta'}{\partial y} + \omega'\frac{\partial\theta'}{\partial p}\right)}. \tag{13.135}$$

利用连续性方程，上式右端第二项 $-\overline{\left(u'\frac{\partial\theta'}{\partial x}+v'\frac{\partial\theta'}{\partial y}+\omega'\frac{\partial\theta'}{\partial p}\right)}$ 可改写为 $-\left(\frac{\partial\overline{\theta'u'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\theta'v'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\theta'\omega'}}{\partial p}\right)$. 若忽略其中的扰动热量的水平输送项 $-\left(\frac{\partial\overline{\theta'u'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\theta'v'}}{\partial y}\right)$，则方程(13.135)化为

$$\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y} + \bar{\omega}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial p} = \frac{1}{\Pi}\bar{Q}_c - \frac{\partial\overline{\theta'\omega'}}{\partial p}. \tag{13.136}$$

但因为 Q_c 是积云对流凝结加热，它只决定于云内的特征，因而

$$\bar{Q}_c = -\overline{L\omega\frac{\partial q_s}{\partial p}} = -L\sigma_c\omega_c\frac{\partial q_c}{\partial p}. \tag{13.137}$$

而 $-\frac{\partial\overline{\theta'\omega'}}{\partial p}$ 表征积云扰动热量的垂直输送，利用(13.131)式和(13.132)式，

$$\begin{aligned}\overline{\theta'\omega'} &= \overline{(\theta-\bar{\theta})(\omega-\bar{\omega})} = \sigma_c(\theta_c-\bar{\theta})(\omega_c-\bar{\omega}) + (1-\sigma_c)(\theta_0-\bar{\theta})(\omega_0-\bar{\omega}) \\ &= \sigma_c(\theta_c-\bar{\theta})(\omega_c-\bar{\omega}) + (1-\sigma_c)\left[\frac{1}{1-\sigma_c}(\bar{\theta}-\sigma_c\theta_c)-\bar{\theta}\right]\left[\frac{1}{1-\sigma_c}(\bar{\omega}-\sigma_c\omega_c)-\bar{\omega}\right] \\ &= \frac{\sigma_c}{1-\sigma_c}(\theta_c-\bar{\theta})(\omega_c-\bar{\omega}).\end{aligned} \tag{13.138}$$

但 $|\omega_c| \gg |\bar{\omega}|$，又 $\sigma_c \ll 1$（一般 $\sigma_c \approx 0.1$），则(13.138)式近似为

$$\overline{\theta'\omega'} = \sigma_c\omega_c(\theta_c-\bar{\theta}), \tag{13.139}$$

因而

$$-\frac{\partial \overline{\theta'\omega'}}{\partial p}=-\frac{\partial}{\partial p}[\sigma_c\omega_c(\theta_c-\bar{\theta})].\tag{13.140}$$

这样，热力学方程(13.136)改写为

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}+u\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}+\omega\frac{\partial \theta}{\partial p}=\frac{Lg}{\Pi}M_c\frac{\partial q_c}{\partial p}+g\frac{\partial}{\partial p}[M_c(\theta_c-\theta)],\tag{13.141}$$

其中我们已省略了平均运算的符号，且

$$M_c\equiv\rho\sigma_c w_c\approx-\frac{1}{g}\sigma_c\omega_c\tag{13.142}$$

表云内总的质量垂直通量(单位时间通过单位面积向上输送的质量).

在方程(13.141)中，左端全是大尺度特征的量，但右端 θ_c，q_c，M_c 全是积云本身的量，我们若能用大尺度的特征变量表征它们，那么方程(13.141)就仅含大尺度变量了，这就需要参数化. 下面主要介绍郭晓岚(Kuo H. L.，1965)的参数化方法.

郭晓岚认为积云对流出现在条件不稳定的层结大气中，其低层有大尺度的水平辐合. 由于云内温度高于环境温度，则通过云内空气与环境空气的交换，向环境空气提供的感热量就是平均对流凝结加热量. 因而，郭晓岚设

$$Q_c=\frac{\sigma_c c_p(T_c-T)}{\tau_c},\tag{13.143}$$

其中 τ_c 为积云生成的时间，它通常取为积云存在时间(时间尺度)的一半；T_c 可以由湿绝热曲线确定；为了确定 σ_c，郭晓岚考虑由大尺度水汽辐合和下垫面蒸发所产生的在单位时间通过单位面积上的水汽量为

$$M=-\frac{1}{g}\int_0^{p_s}\left(\frac{\partial qu}{\partial x}+\frac{\partial qv}{\partial y}\right)\delta p+\rho_0 c_D\mid \boldsymbol{V}_0\mid q_{s0}-q_0),\tag{13.144}$$

其中 ρ_0，q_0，$\boldsymbol{V}_0$ 分别为接近地面的某一参考高度上的空气密度、比湿和风速，q_{s0} 为与参考高度上的气温 T_0 相对应的饱和比湿，c_D 为地面与大气的水汽交换系统(拖曳系数).

由于水汽辐合和下垫面蒸发所产生的水汽量，一部分用于成云，另一部分以气体形式存在于空气中. 而用于成云的水汽量包含积云加热用于凝结的水汽量和使云中水汽从 q 变为 q_{sc} 所需要的水汽量，即单位面积上成云所需的水汽量为

$$I_c=\frac{1}{g}\int_{p_t}^{p_b}\left[\frac{c_p}{L}(T_c-T)+(q_{sc}-q)\right]\delta p,\tag{13.145}$$

其中 p_t，p_b 分别表积云顶部和底部的气压，q_{sc} 为积云的饱和比湿. 因积云生成的时间为 τ_c，覆盖率为 σ_c，因而单位时间通过单位面积成云所需的水汽量为

$$M_c=\sigma_c I_c/\tau_c.\tag{13.146}$$

设存在于空气中的水汽量为 bM，b 决定于空气的相对湿度. 相对湿度越大，b 越小，在低纬地区通常 $b\ll 1$，它表示供给的水汽几乎完全成云，这样，成云的水汽量便是 $(1-b)M$，因而

$$M_c = (1-b)M. \qquad (13.147)$$

比较(13.146)式和(13.147)式求得

$$\sigma_c = (1-b)\tau_c M/I_c. \qquad (13.148)$$

将(13.148)式代入(13.143)式即可确定 Q_c 是

$$Q_c = (1-b)\frac{M}{I_c}c_p(T_c - T). \qquad (13.149)$$

Charney 和 Eliassen(1964)也提出过一个积云对流加热参数化的方案. 他们认为供给积云的水汽不仅来自边界层以上的辐合，也可来自 Ekman 层顶上的水汽质量输送，即

$$M = -\frac{1}{g}\int_0^{p_E}\left(\frac{\partial qu}{\partial x} + \frac{\partial qv}{\partial y}\right)\delta p - \frac{1}{g}q_E\omega_E, \qquad (13.150)$$

其中 p_E, q_E, ω_E 分别为 Ekman 层顶的气压、比湿和垂直 p 速度.

设相对湿度为 η，则

$$q = \eta q_s. \qquad (13.151)$$

将上式代入(13.150)式，忽略 q_s 和 η 的水平变化并利用连续性方程得

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{g}\int_0^{p_E}\eta q_s\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta p - \frac{1}{g}q_E\omega_E \\ &= -\frac{1}{g}\left\{\int_0^{p_E} - \eta q_s\frac{\partial \omega}{\partial p}\delta p + q_E\omega_E\right\}. \end{aligned} \qquad (13.152)$$

将上式右端第一项分部积分，设 $p=0$ 处，$\omega=0$，并忽略 η 的垂直变化，则得

$$M = -\frac{1}{g}\int_0^{p_E}\eta\omega\frac{\partial q_s}{\partial p}\delta p. \qquad (13.153)$$

Charney 和 Eliassen 又认为在积云中的对流凝结加热与向它提供的水汽凝结加热相等，即

$$\frac{1}{g}\int_0^{p_E}Q_c\delta p = LM, \qquad (13.154)$$

而且 Q_c 在形式上可表为

$$Q_c = -L\frac{\partial q_s}{\partial p}\omega_c. \qquad (13.155)$$

这样，将(13.155)式代入(13.154)式，并设在 $p=0$ 处 $q_s=0$，在 $p=p_E$ 处 $q_s=q_{sE}$，又不考虑 ω_c 的变化，则得

$$-\frac{L\omega_c}{g}q_{sE} = LM. \qquad (13.156)$$

因而

$$\omega_c = -gM/q_{sE}, \qquad (13.157)$$

把 $\bar{\omega}_c$ 代入(13.155)式最后求得

$$Q_c = \frac{gL}{q_{sE}} \frac{\partial q_s}{\partial p} M. \tag{13.158}$$

§13.8 台风中惯性-重力内波的不稳定

在第十一章，我们分析了具有风速水平切变的 Rossby 波的不稳定，用它可以解释热带辐合带上台风的生成. 因为低纬水平温差小，所以，正压不稳定是低纬扰动发展的一个重要机制. 本节分析台风发展的一个重要过程，即台风中惯性-重力内波的不稳定.

因为台风可视为是铅直圆对称的涡旋，所以应用柱坐标系 $\{r, \theta, z\}$ 比较方便，与坐标方向 r, θ, z 对应的空气速度分别是

$$v_r \equiv \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad v_\theta \equiv r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \quad w \equiv \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}, \tag{13.159}$$

v_r 称为径向速度，v_θ 称为切向速度，w 为垂直速度.

若不考虑基本气流，且认为是轴对称的情况 $\left(\frac{\partial}{\partial\theta}=0\right)$，则在 Boussinesq 近似下描写台风中惯性-重力内波的线性方程组(参见(7.66))可以写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_r}{\partial t} - f_0 v_\theta = -\dfrac{\partial \phi'}{\partial r}, \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial t} + f_0 v_r = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = -\dfrac{\partial \phi'}{\partial z} + g\dfrac{\theta'}{\theta_0}, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(g\dfrac{\theta'}{\theta_0}\right) + N_m^2 w = 0, \end{cases} \tag{13.160}$$

其中

$$\phi' \equiv p'/\rho_0. \tag{13.161}$$

又因为台风中含有大量的水汽，所以，在方程组(13.160)的绝热方程中应用的是湿的 Brunt-Väisälä 频率 N_m.

将方程组(13.160)的前两式消去 v_θ，得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0^2\right) v_r = -\frac{\partial^2 \phi'}{\partial t \partial r}. \tag{13.162}$$

将上式乘以 r，再作 $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$ 的运算得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f_0^2\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial^2\phi'}{\partial t\partial r}\right). \tag{13.163}$$

再利用方程组(13.160)的第四式消去 v_r 得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f_0^2\right)\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial^2\phi'}{\partial t\partial r}\right). \tag{13.164}$$

最后将方程组(13.160)的第三、第五两式消去 θ',得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+N_m^2\right)w=-\frac{\partial^2\phi'}{\partial t\partial z}. \tag{13.165}$$

将(13.164)式和(13.165)式消去 ϕ',得到

$$\mathscr{L}w=0, \tag{13.166}$$

其中

$$\mathscr{L}\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+N_m^2\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f_0^2\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{13.167}$$

因为这里讨论的是内波,z 方向用 w 的自然边条件是很自然的. 现在,我们重点考虑侧向边条件对稳定度的影响. 为此,我们假定:在台风中心($r=0$),w 有界,在台风边缘($r=a$,a 为台风半径),$w=0$. 这样,方程(13.162)的侧向边条件可以写为

$$w\,|_{r=0}<\infty,\quad w\,|_{r=a}=0. \tag{13.168}$$

设方程(13.166)的单波解为

$$w=W(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(nz-\omega t)}. \tag{13.169}$$

将其代入方程(13.166),得到

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r}\right)+\lambda r^2W=0, \tag{13.170}$$

其中

$$\lambda=\frac{(\omega^2-f_0^2)n^2}{N_m^2-\omega^2}, \tag{13.171}$$

而

$$n=\pi/H. \tag{13.172}$$

方程(13.170)是关于 W 的带参数 λ 的零阶 Bessel 方程,其通解为

$$W(r)=A\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}r)+B\mathrm{Y}_0(\sqrt{\lambda}r), \tag{13.173}$$

其中 A,B 为二任意常数. J_0,Y_0 分别为第一类、第二类的零阶 Bessel 函数(Y_0 又称为零阶 Neumann 函数).

注意边条件(13.168),显然要求 $W|_{r=0}<\infty$,$W|_{r=a}=0$,因 $\mathrm{Y}_0(0)\to\infty$,则由 $W|_{r=0}<\infty$ 得到 $B=0$,而由 $W|_{r=a}=0$ 得到

$$\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda}a)=0. \tag{13.174}$$

设 $\mathrm{J}_0(x)=0$ 的零点为 μ_j ($j=1,2,\cdots$),则

$$\sqrt{\lambda}a = \mu_j \quad (j = 1,2,\cdots). \tag{13.175}$$

将(13.171)式代入(13.175)式,得到

$$\omega^2 = \frac{(\mu_j/a)^2 N_m^2 + n^2 f_0^2}{\left(\frac{\mu_j}{a}\right)^2 + n^2} \quad (j = 1,2,\cdots). \tag{13.176}$$

因此由上式可知:若层结稳定($N_m^2>0$),则 $\omega^2>0$,ω 为实数,则台风中惯性-重力内波稳定;若层结不稳定($N_m^2<0$),则 ω^2 可能是负数.所以,层结不稳定是惯性-重力内波不稳定的先决条件,这与第十一章的分析完全一致.在台风有充分水汽供应的条件下,经常处于层结不稳定状态,因而它容易使台风中的惯性-重力内波不稳定.但由(13.176)式知,只有当

$$\left(\frac{\mu_j}{a}\right)^2 N_m^2 + n^2 f_0^2 < 0 \quad (j = 1,2,\cdots) \tag{13.177}$$

时,$\omega^2<0$,ω 为纯虚数,惯性-重力内波才不稳定,台风才得以发展加强.

注意 $N_m^2<0$,则由(13.177)式求得台风半径满足

$$a < \frac{|N_m|}{nf_0}\mu_j \quad (j = 1,2,\cdots). \tag{13.178}$$

因 $J_0(x)$ 的零点排列为

$$\mu_1 = 2.4048, \quad \mu_2 = 5.5201, \quad \mu_3 = 8.6537, \quad \cdots,$$

则(13.178)式就可改写为

$$a < \frac{|N_m|}{nf_0}\mu_1 \equiv a_c, \tag{13.179}$$

这就是台风中惯性-重力内波不稳定的判据.由此看到:(1) 层结越不稳定($|N_m|$数值越大),台风越易加强;(2) 越是低纬(f_0 数值越小),台风越易加强;(3) 台风半径越小,台风越易加强.这些结论都与实际定性一致.

取 $\mu_1=2.4$,$\varphi=20°\mathrm{N}$,$n=\pi/H=3\times10^{-4}\,\mathrm{m}^{-1}$,$|N_m|=4\times10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$,则求得台风的临界半径 $a_c\approx10^6\,\mathrm{m}$,这就表明:在低纬度,即便是弱的层结不稳定,台风也易发展.

取 $n=\pi/H$,则(13.179)式化为

$$a < \frac{|N_m|H}{\pi f_0}\mu_1 = \frac{c_m}{1.3f_0} \quad (c_m = |N_m|H). \tag{13.180}$$

这与第十一章所得到的不稳定判据 $L<L_1=c_a/f_0$((11.170)式)非常接近.

§13.9 第二类条件不稳定(CISK)和台风的发展

在低纬,一方面积云群蕴育在大尺度运动之中,积云群的层结不稳定(即第一

类条件不稳定)所引起的凝结潜热释放有可能为大尺度运动提供能量;另一方面,积云群尽管常满足层结不稳定的条件,但它不足以达到饱和状态.要达到饱和,必须有强烈的抬升,这就要求大尺度运动在对流层低层形成水平辐合.

所谓第二类条件不稳定(Conditional Instability of Second Kind),简称 CISK,就是指上述在低纬积云群与大尺度运动间的相互作用,从而使得大尺度扰动和热带气旋处于不稳定发展的过程.其物理本质是:在对流层低层,由于摩擦的作用,产生向低压中心的大尺度水平辐合,同时,伴有水汽堆积并通过 Ekman 抽吸作用,使处于条件不稳定的湿空气强迫抬升,产生有组织的积云对流.由于水汽凝结潜热的释放,使低压上空温度比四周空气高,因而有$\overline{\theta'\omega'}>0$,从而使有效位能转换为扰动动能,使大尺度扰动处于不稳定发展的过程;在低压上空温度增高的同时,地面气压下降,则增强指向低压中心的气流,又由于绝对角动量守恒,也使切向风速加强,这就使低压扰动也处于不稳定发展的过程.这样,低层辐合,强迫抬升,凝结增温,地面气压下降……,往复循环,造成积云对流与低压环流间的正反馈,促使大尺度扰动和热带气旋同时发展.下面,我们以台风发展为例,说明 CISK 的机制.

与上节一样,我们采用柱坐标系,但应用静力平衡条件,故垂直坐标用 p 代替 z.同样,考虑轴对称的情况,且假定径向是平衡运动,并应用 Boussinesq 近似.则不考虑基本气流下,描写台风运动的线性方程组可以写为

$$\begin{cases} -f_0 v_\theta = -\dfrac{\partial \phi'}{\partial r}, \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial t} + f_0 v_r = 0, \\ \dfrac{\partial \phi'}{\partial p} = -\dfrac{RT'}{p} = -\dfrac{RT_0}{p}\dfrac{\theta'}{\theta_0}, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \dfrac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \\ \dfrac{\partial \theta'}{\partial t} + \omega \dfrac{\partial \theta_0}{\partial p} = \dfrac{\theta_0}{c_p T_0} Q. \end{cases} \tag{13.181}$$

将方程组(13.181)的第一式(地转风关系)对 p 微商,并利用第三式(静力学关系)就得到热成风关系:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial p} = -\frac{R}{f_0 p}\frac{\partial T'}{\partial r} = -\frac{R}{f_0 p}\frac{T_0}{\theta_0}\frac{\partial \theta'}{\partial r}. \tag{13.182}$$

将上式对 t 微商,并利用方程组(13.181)的第五式得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial p}\right) - \frac{RT_0}{f_0 p \theta_0}\frac{\partial \theta_0}{\partial p}\frac{\partial \omega}{\partial r} = -\frac{R}{c_p f_0 p}\frac{\partial Q}{\partial r}. \tag{13.183}$$

由方程组(13.181)的第四式(连续性方程)可引入流函数 ψ,使得

$$r v_r = \frac{\partial \psi}{\partial p}, \quad r\omega = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{13.184}$$

将上式代入方程组(13.181)的第二式和(13.183)式，得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial t}+\dfrac{f_0}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial p}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial p}\right)+\dfrac{RT_0}{f_0 p\theta_0}\dfrac{\partial \theta_0}{\partial p}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial r}\right)=-\dfrac{R}{c_p f_0 p}\dfrac{\partial Q}{\partial r}.\end{cases} \tag{13.185}$$

下面应用通常的"两层模式"来求解方程组(13.185)。但为了反映 Ekman 抽吸作用，我们将下边界取在边界层顶，见图 13.5.

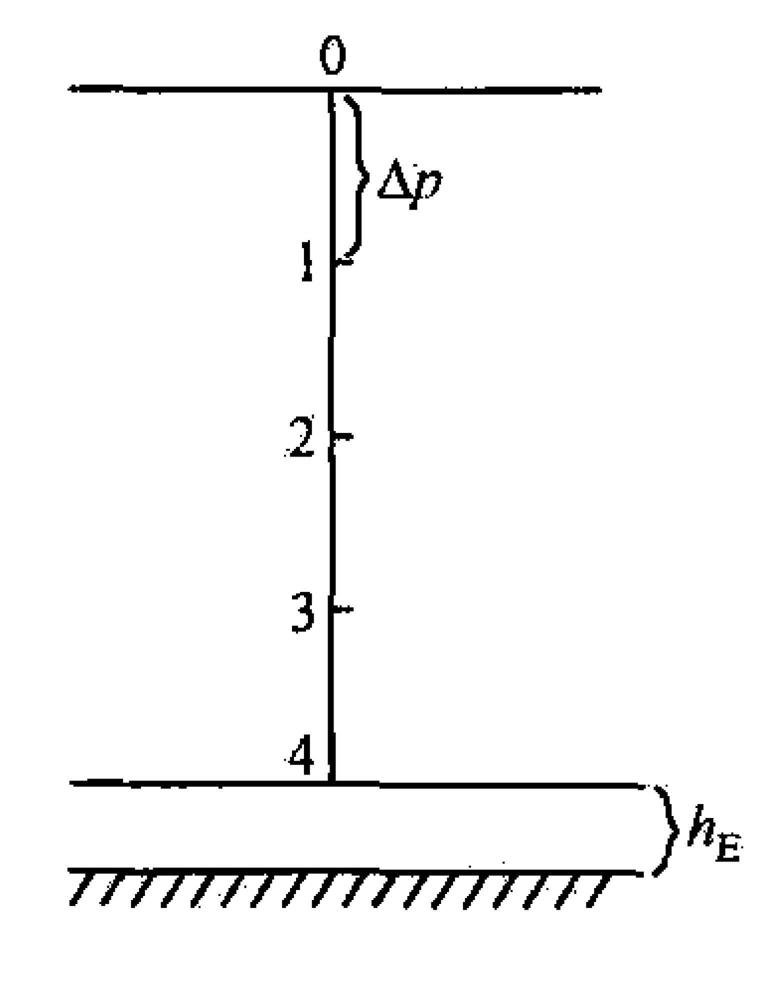


图 13.5 CISK 的两层模式

根据 Ekman 理论，在 Ekman 层顶的垂直运动为

$$w_4=\frac{1}{2}h_E\zeta_4, \tag{13.186}$$

其中 h_E 为 Ekman 标高，ζ_4 为边界层顶的垂直涡度. 注意，$\omega\approx-\rho g w$，$\zeta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)$，则(13.186)式可改写为

$$\omega_4=-\frac{g\rho_4 h_E}{2}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_{\theta_4}). \tag{13.187}$$

利用(13.184)式，上式又可改写为

$$\frac{\partial \psi_4}{\partial r}=\frac{g\rho_4 h_E}{2}\frac{\partial}{\partial r}(rv_{\theta_4}), \tag{13.188}$$

这就是模式的下边界条件.

至于上边界条件，我们就取为

$$\psi_0=0. \tag{13.189}$$

将方程组(13.185)的第一式写在第一、第三两层，第二式写在第二层，并且对 p 的微商用差商代替，则得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_{\theta_1}}{\partial t}+\dfrac{f_0}{r}\cdot\dfrac{\psi_2-\psi_0}{2\Delta p}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial v_{\theta_3}}{\partial t}+\dfrac{f_0}{r}\cdot\dfrac{\psi_4-\psi_2}{2\Delta p}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{v_{\theta_3}-v_{\theta_1}}{2\Delta p}\right)+\dfrac{RT_2}{fp_2\theta_2}\cdot\dfrac{\theta_3-\theta_1}{2\Delta p}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial r}\right)=-\dfrac{R}{c_p f_0 p_2}\dfrac{\partial Q_2}{\partial r},\end{cases} \tag{13.190}$$

其中 $p_2=2\Delta p$，T_2，θ_2 表第二层的静止大气的温度和位温，θ_1，θ_3 分别为第一层和第三层的静止大气位温.

方程组(13.190)的第一、第二两式代入第三式，并利用(13.189)式，得到

$$-\frac{f_0}{r(2\Delta p)^2}(\psi_4-2\psi_2)+\frac{RT_2}{f_0(2\Delta p)^2}\cdot\frac{\theta_3-\theta_1}{\theta_2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_2}{\partial r}\right)=-\frac{R}{c_p f_0(2\Delta p)}\frac{\partial Q_2}{\partial r}. \tag{13.191}$$

又因为第二层的非绝热加热 Q_2 主要应是水汽凝结加热，则应用(13.158)式有

$$Q_2 = \frac{gL}{q_{s_4}}\left(\frac{\partial q_s}{\partial p}\right)_2 M \approx \frac{gL}{q_{s_4}} \cdot \frac{q_{s_3} - q_{s_1}}{2\Delta p}M. \tag{13.192}$$

而依(13.153)式,应用梯形积分公式有

$$M = -\frac{\eta}{g}\int_{p_0}^{p_4} \omega \delta q_s = -\frac{\eta}{2g}(q_{s_4} - q_{s_0})\left(\frac{1}{2}\omega_0 + \omega_2 + \frac{1}{2}\omega_4\right) = -\frac{\eta q_{s_4}}{2g}\left(\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_4\right), \tag{13.193}$$

上式已应用了 $q_{s_0}=0, \omega_0=0$ 的条件.

这样,(13.193)式代入(13.192)式,得到

$$Q_2 = -\frac{\eta L}{4\Delta p}(q_{s_3} - q_{s_1})\left(\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_4\right) = -\frac{\eta L}{4\Delta p}(q_{s_3} - q_{s_1})\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{1}{2r}\frac{\partial \psi_4}{\partial r}\right). \tag{13.194}$$

(13.194)式代入(13.191)式,得到

$$2\psi_2 - \psi_4 = \frac{RT_2}{f_0^2} \cdot \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_2} r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_2}{\partial r}\right) + \frac{\eta RL(q_{s_3} - q_{s_1})}{2c_p f_0^2} r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{1}{2r}\frac{\partial \psi_4}{\partial r}\right). \tag{13.195}$$

上式包含两个未知函数 ψ_2, ψ_4,尚未利用下边界方程(13.188),但方程(13.188)中含有 v_{θ_4},因此,为了利用方程(13.188),我们在第四层上写出切向运动方程((13.185)的第一式),即

$$\frac{\partial v_{\theta_4}}{\partial t} = -\frac{f_0}{r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)_4 \approx -\frac{f_0}{r}\frac{\psi_4 - \psi_2}{2\Delta p}. \tag{13.196}$$

将上式与方程(13.188)结合,消去 v_{θ_4},得到

$$\frac{\partial^2 \psi_4}{\partial t \partial r} = -\frac{g\rho_4 h_E f_0}{4\Delta p}\frac{\partial}{\partial r}(\psi_4 - \psi_2). \tag{13.197}$$

将上式从 $r=0$ 到 $r=r$ 积分,取 $r=0$ 处 $\psi_2=\psi_4=0$,得到

$$\frac{\partial \psi_4}{\partial t} = -\frac{g\rho_4 h_E f_0}{4\Delta p}(\psi_4 - \psi_2). \tag{13.198}$$

若令

$$\lambda = \frac{2f_0^2}{RT_2} \cdot \frac{\theta_2}{\theta_1 - \theta_3}, \quad \mu = \frac{L}{2} \cdot \frac{q_{s_3} - q_{s_1}}{c_p T_2} \cdot \frac{\theta_2}{\theta_1 - \theta_3}, \quad \nu = \frac{g\rho_4 h_E f_0}{4\Delta p}, \tag{13.199}$$

则方程(13.198)和(13.195)构成关于 ψ_2, ψ_4 的封闭方程组,即

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \nu\right)\psi_4 = \nu\psi_2, \\ \dfrac{1}{2}\left[\mu\eta r \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\right) - \lambda\right]\psi_4 = \left[(1-\mu\eta) r \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\right) - \lambda\right]\psi_2. \end{cases} \tag{13.200}$$

由方程组(13.200)的两式消去 ψ_2,得到

$$\mathscr{L}\psi_4 = 0, \tag{13.201}$$

其中

$$\mathscr{L} \equiv \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu\right)(1-\mu\eta)-\frac{\nu}{2}\mu\eta\right] r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\lambda\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\nu}{2}\right). \tag{13.202}$$

设方程(13.201)的解为

$$\psi_4 = \Psi_4(r)\mathrm{e}^{\sigma t}, \tag{13.203}$$

σ 即是增长率. 将(13.203)式代入方程(13.201),得到

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\Psi_4}{\mathrm{d}r}\right)+\lambda_1\Psi_4 = 0, \tag{13.204}$$

其中

$$\lambda_1 = \frac{2\sigma+\nu}{-(2\sigma+2\nu)+\mu\eta(2\sigma+3\nu)}\lambda. \tag{13.205}$$

设在台风的 $0\leqslant r\leqslant a_0$ 区域内存在上升气流(为凝结加热区),在 $r\geqslant a_0$ 的区域内存在下沉气流(为非凝结加热区),a_0 称为台风对流活动半径. 显然,在对流活动区域内,$\eta\neq 0$,而在对流活动区外,$\eta=0$. 这样,方程(13.204)可作为对流活动区域内的方程,而在对流活动区域外,方程则应是

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi_4}{\partial r}\right)-\lambda_2\Psi_4 = 0, \tag{13.206}$$

其中

$$\lambda_2 = \frac{2\sigma+\nu}{2\sigma+2\nu}\lambda. \tag{13.207}$$

方程(13.204)是可化为 Bessel 方程的方程,若令 $\xi=\sqrt{\lambda_1}r$, $y=r^{-1}\Psi_4$,则方程(13.204)化为 y 关于 ξ 的一阶 Bessel 方程,且它满足 $\Psi_4|_{r=0}=0$ 的解为

$$\Psi_4(r) = Ar\mathrm{J}_1(\sqrt{\lambda_1}r) \quad (0\leqslant r\leqslant a_0), \tag{13.208}$$

其中 J_1 为第一类的一阶 Bessel 函数.

类似,方程(13.206)也可化为 Bessel 方程的方程. 若令 $\xi=\mathrm{i}\sqrt{\lambda_2}r$, $y=r^{-1}\Psi_4$,则方程(13.206)也化为 y 对 ξ 的一阶 Bessel 方程,它满足 $\Psi_4|_{r\to\infty}\to 0$ 的解为

$$\Psi_4(r) = Br\mathrm{H}_1^{(1)}(\mathrm{i}\sqrt{\lambda_2}r) \quad (a_0\leqslant r<\infty), \tag{13.209}$$

其中 $\mathrm{H}_1^{(1)}$ 为第一类的一阶 Hankel 函数.

在 $r=a_0$ 处,我们认为径向速度 v_r 和重力位势 ϕ' 应该是连续的.

由方程组(13.184)的第一式知,在 $r=a_0$ 处 v_r 连续,也就是 ψ 连续,则由(13.208)和(13.209)式有

$$A\mathrm{J}_1(\sqrt{\lambda_1}a_0) = B\mathrm{H}_1^{(1)}(\mathrm{i}\sqrt{\lambda_2}a_0). \tag{13.210}$$

至于位势场,应先求出 ψ_2 和 ψ_4,再由(13.196)式求出 v_{θ_4},最后再由方程组(13.181)的第一式求出 ϕ'.

类似(13.203)式,若设

$$\psi_2 = \Psi_2(r)e^{\sigma t}, \tag{13.211}$$

则由方程组(13.200)的第一式求得

$$\Psi_2(r) = \frac{\sigma+\nu}{\nu}\Psi_4(r). \tag{13.212}$$

这样就有

$$\Psi_4 - \Psi_2 = -\frac{\sigma}{\nu}\Psi_4, \quad \psi_4 - \psi_2 = -\frac{\sigma}{\nu}\Psi_4 e^{\sigma t}. \tag{13.213}$$

将其代入(13.196)式求得

$$\frac{\partial v_{\theta_4}}{\partial t} = \frac{f_0}{2\Delta p}\cdot\frac{\sigma}{\nu}\frac{1}{r}\Psi_4(r)e^{\sigma t}. \tag{13.214}$$

再将上式对 t 积分,取积分常数为零,得

$$v_{\theta_4} = \frac{f_0}{2\Delta p}\cdot\frac{1}{\nu r}\Psi_4(r)e^{\sigma t}. \tag{13.215}$$

将上式代入方程组(13.181)的第一式,求得

$$\frac{\partial\phi_4'}{\partial r} = \frac{f_0^2}{2\Delta p}\cdot\frac{1}{\nu r}\Psi_4(r)e^{\sigma t}, \tag{13.216}$$

再对 r 求积分即得

$$\phi_4' = \frac{f_0^2 e^{\sigma t}}{2\nu\Delta p}\int\frac{1}{r}\Psi_4(r)\delta r. \tag{13.217}$$

将(13.208)式和(13.209)式分别代入上式,注意

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x), \quad \frac{dH_0^{(1)}(x)}{dx} = -H_1^{(1)}(x),$$

则求得

$$\phi_4' = -\frac{f_0^2}{2\nu\Delta p\cdot\sqrt{\lambda_1}}AJ_0(\sqrt{\lambda_1}r)e^{\sigma t} \quad (0\leqslant r\leqslant a_0), \tag{13.218}$$

$$\phi_4' = \frac{if_0^2}{2\nu\Delta p\cdot\sqrt{\lambda_2}}BH_0^{(1)}(i\sqrt{\lambda_2}r)e^{\sigma t} \quad (a_0\leqslant r<\infty). \tag{13.219}$$

这样,在 $r=a_0$ 处,ϕ_4' 连续就有

$$-\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}AJ_0(\sqrt{\lambda_1}a_0) = i\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}BH_0^{(1)}(i\sqrt{\lambda_2}a_0), \tag{13.220}$$

其中 J_0,$H_0^{(1)}$ 分别为零阶的第一类 Bessel 函数和 Hankel 函数.

(13.210)式与(13.220)式联立得到

$$\frac{J_1(\sqrt{\lambda_1}a_0)}{J_0(\sqrt{\lambda_1}a_0)} = i\frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1}}\cdot\frac{H_0^{(1)}(i\sqrt{\lambda_2}a_0)}{H_0^{(1)}(i\sqrt{\lambda_2}a_0)}, \tag{13.221}$$

这是增长率 σ 的特征方程.在给定的参数下,可以求出增长率 σ 与对流活动半径 a_0

的关系. 取 $\mu=1.1$, $f_0=3.77\times10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$（相当于 $\varphi=15°\mathrm{N}$），$\nu=1.72\times10^{-6}\,\mathrm{s}^{-1}$，$1/\sqrt{\lambda}=1.2\times10^6\,\mathrm{m}$，则由上式算得的 σ 与 a_0 的关系见图 13.6. 由图 13.6 可以看出：当 $\eta=0.8$ 时，稳定的 $a_0\approx100$—200 km，此时 $\sigma=6\times10^{-6}\,\mathrm{s}^{-1}$，则令 $\sigma t=1$，求得 $\sigma\approx2\,\mathrm{d}$，即估计需要二天左右的时间，通过 CISK，可使台风的对流活动半径达到 100—200 km.

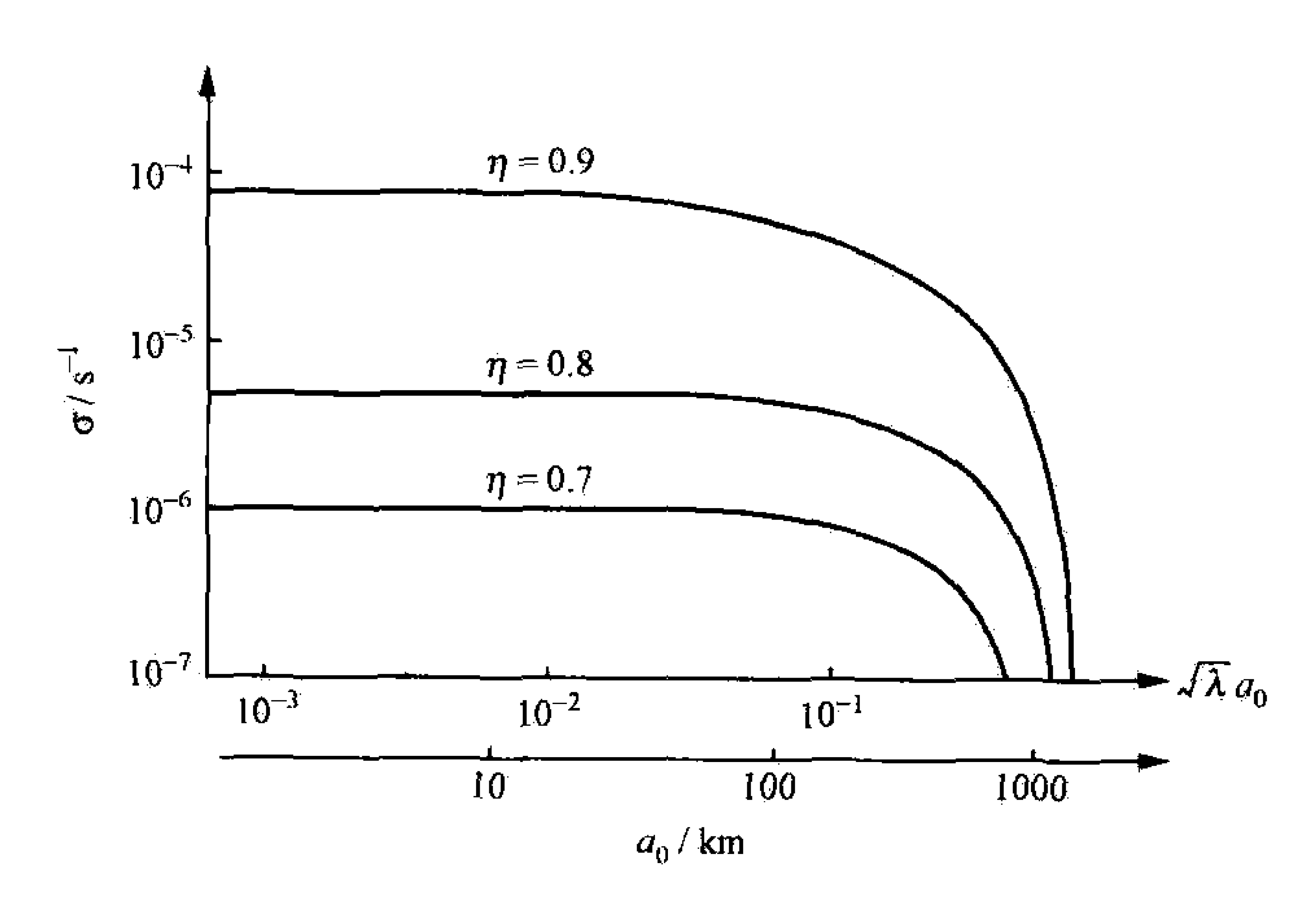


图 13.6　增长率 σ 与对流活动半径的关系

§ 13.10　台风的结构

台风是具有强烈天气（强风和暴雨）的中尺度系统，在对流层低层是中心为低压的强的气旋性涡旋，但在对流层高层转变为中心是高压的弱的反气旋性涡旋. 发展较完善的台风半径有几百公里，其中强烈对流区的半径约 100 公里. 台风中心附近有平静的台风眼，半径约为 5—20 km，台风中心呈暖性，在台风眼壁附近台风有最大风速，风速可达 $100\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. 除台风眼外，在低层，空气向中心流入；而在高层，空气由中心流出. 在垂直方向，于边界层顶附近，风速达最大，但风速随高度变化相对较小，具有准正压性. 从台风眼壁到台风边缘存在螺旋结构（螺旋云带和螺旋雨带）.

下面利用方程组，简单描述这些结构，在 p 坐标系中，绝热无摩擦条件下以静态为背景的描写轴对称的台风方程组可以写为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t}-\dfrac{v_\theta^2}{r}-f_0v_\theta=-\dfrac{\partial\phi'}{\partial r},\\
\dfrac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}t}+\dfrac{v_rv_\theta}{r}+f_0v_r=0,\\
\dfrac{\partial\phi'}{\partial p}=-\dfrac{RT'}{p},\\
\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\dfrac{\partial\omega}{\partial p}=0,\\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial\phi'}{\partial p}\right)+\sigma_{\mathrm{m}}\omega=0,
\end{cases}
\tag{13.222}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+\omega\frac{\partial}{\partial p},\\
&\sigma_{\mathrm{m}}\equiv-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\ln\theta_{e_0}}{\partial p}=\frac{N_{\mathrm{m}}^2}{g^2\rho_0^2}.
\end{aligned}
\tag{13.223}
$$

若令$\dfrac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t}=0$,则由方程组(13.222)的第一式得

$$
\left(f_0+\frac{v_\theta}{r}\right)v_\theta=\frac{\partial\phi'}{\partial r},
\tag{13.224}
$$

这就是梯度风关系.

北半球 $f_0>0$,则由上式知:当 $v_\theta>0$ 时(逆时针运动),$\dfrac{\partial\phi'}{\partial r}>0$,即中心是低压,这就是对流层低层台风的状况;而当 $v_\theta<0$ 时(顺时针运动),如 $f_0+\dfrac{v_\theta}{r}>0$,则 $\dfrac{\partial\phi'}{\partial r}<0$,即中心是高压,这就是对流层高层台风的状况.

方程组(13.222)的第二式乘以 r,注意 $v_r\equiv\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$,则得

$$
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=0,
\tag{13.225}
$$

其中

$$
M\equiv r\left(v_\theta+\frac{1}{2}f_0r\right)
\tag{13.226}
$$

为绕地轴的绝对角动量.方程(13.225)即是绝对角动量守恒定律.

根据角动量守恒定律,空气向台风中心方向运动时,r 减小.v_θ 将增加,而当 $r\to0$ 时,$v_\theta\to\infty$,这显然是不合理的.所以,空气向台风中心运动时,不能超过一最小半径 $a_{\min}$,当 $r\to a_{\min}$时,$v_\theta\to v_{\theta_{\max}}$,$v_r\to0$.这就表明:在台风中心附近存在一个台风眼,其半径为 $r=a_{\min}$,在台风眼壁上($r=a_{\min}$),v_θ 达极大,v_r 达极小.因而,空

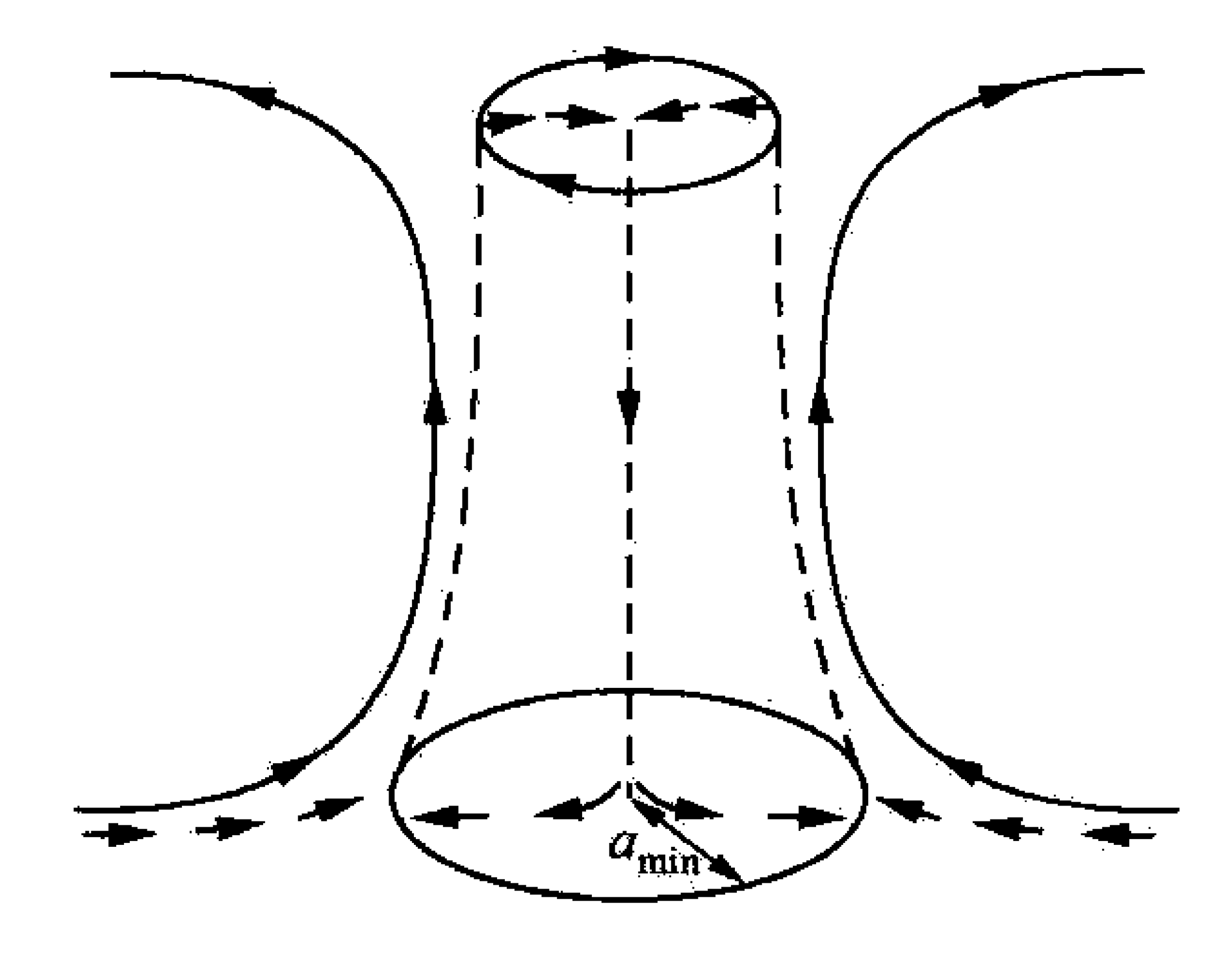


图 13.7 台风流场

气向台风中心运动到达眼壁时将转向，沿眼壁向上运动，到对流层上层某一高度又转向，在眼壁外向外运动，在眼壁内向中心运动，并使台风眼内空气为下沉运动. 图 13.7 是台风流场的示意图.

至于台风眼外的流场可以由能量方程、角动量方程和连续性方程得到说明.

方程组(13.222)的第一式乘以 v_r，第二式乘以 v_θ，然后相加得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}(v_r^2+v_\theta^2)\right]=-v_r\frac{\partial\phi'}{\partial r}, \tag{13.227}$$

这就是台风中的水平运动动能方程. 由上式可知，若要使台风水平动能增加，则 $v_r\frac{\partial\phi'}{\partial r}<0$，所以，对流层低层 $\frac{\partial\phi'}{\partial r}>0$，则 $v_r<0$，即向中心运动；对流层高层 $\frac{\partial\phi'}{\partial r}<0$，则 $v_r>0$，即向外运动.

既然，对流层低层 $v_r|_{r=a_{\min}}=0$， $v_r|_{r>a_{\min}}<0$，因而 $\frac{\partial v_r}{\partial r}<0$，则根据连续性方程(方程组(13.222)的第四式)，这种向眼壁辐合的气流，必然造成上升运动($\omega<0$).

前面已分析：$v_\theta|_{r=a_{\min}}=v_{\theta_{\max}}$，不妨设 $v_\theta|_{r=a}=0$(a 可视为台风半径)，则

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r}<0,$$

而且可以根据(13.226)式定得

$$v_\theta=\frac{f_0(a^2-r^2)}{2r}. \tag{13.228}$$

关于台风的暖心结构，可以由热成风关系得到说明. 利用静力学关系(方程组(13.222)的第三式)和梯度风关系(13.224)可得

$$\left(f_0+\frac{2v_\theta}{r}\right)\frac{\partial v_\theta}{\partial p}=-\frac{R}{p}\frac{\partial T'}{\partial r}, \tag{13.229}$$

这就是热成风关系.

因在台风中气旋式运动随高度的增加而减弱，因而通常

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial p}>0,$$

则由上式知

$$\frac{\partial T'}{\partial r}<0, \tag{13.230}$$

这就解释了台风的暖心结构.

像台风这样的中尺度系统，其中包含惯性-重力内波，波的等相位线可以表为

$$kr + m\theta + nz - \omega t = 常数, \quad (13.231)$$

其中 ω 为圆频率，k，n 分别为 r，z 方向上的波数，m 称为角波数.

由上式知，在固定时刻的任一高度上有

$$\theta = -\frac{k}{m}r + 常数. \quad (13.232)$$

由上式确定等相位线为螺旋线，见图 13.8. 这时的 m 又称为螺旋臂数. 此图与卫星观察到的台风螺旋图较为一致.

我们推断：一般对流涡旋系统都有眼和螺旋结构.

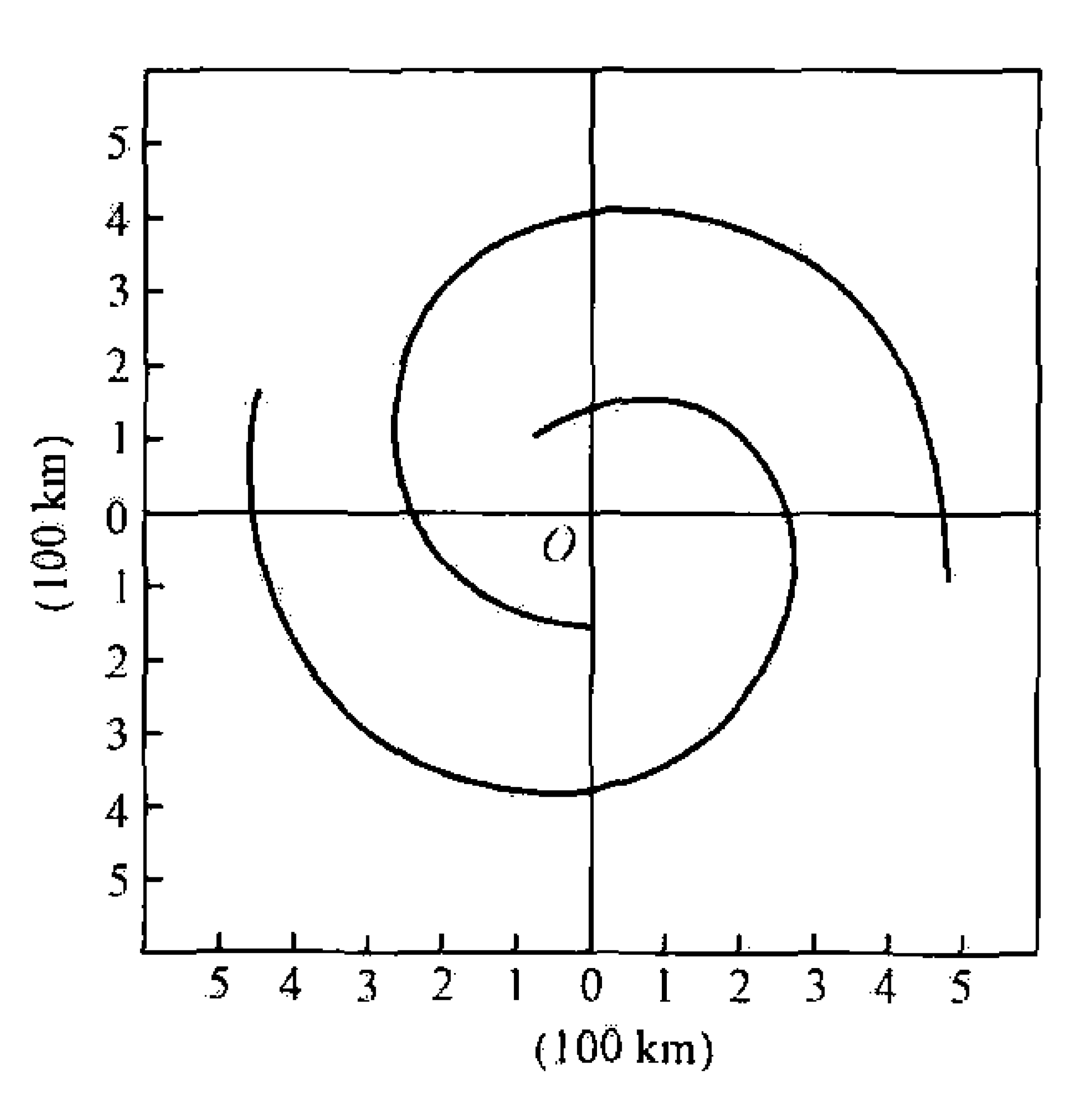


图 13.8 台风的螺旋结构

§13.11 非绝热波动(diabatic waves)

第七章以及本章所讨论的波动都是线性的，而且是绝热的. 线性绝热的大气波动理论一般认为已经成熟，其中周期最长的是 Rossby 波，其周期约为一个星期，它是短期天气预报的理论基础. 研究大气运动的中长期过程和全球气候演变必须要考虑非绝热大气波动. 大量研究表明：加入非绝热因子(如 CISK，海气耦合中海洋对大气的加热等)到大气运动的方程组后出现的非绝热大气波动通常是低频的(周期在两个星期以上)甚至是超低频的(周期为两个月、半年、一年、二年、十年等)，因而非绝热的大气波动是大气运动中长期过程和全球气候演变的理论基础. 近代流行于大气科学界的所谓"低频振荡"实际上就是非绝热波动.

下面，我们以 CISK 机制来说明非绝热波动. 由于对流层低层摩擦辐合抬升，导致凝结潜热释放而加热对流层中上层大气. 假定这部分热量 Q_c 与边界层顶的垂直运动速度 w_B 成正比，即设

$$Q_c = \eta N^2 w_B, \quad (13.233)$$

其中 η 是表征 CISK 机制的无量纲对流凝结加热参数，而且认为它只与 z 有关，且在 $w_B > 0$ 时，$\eta \neq 0$，N^2 为层结参数.

考虑一个稳定层结的 Boussinesq 流体，假定 y 方向是地转的(即所谓半地转近似)，z 方向是静力平衡的，并应用赤道 β 平面近似和(13.233)式，则包含 CISK 机制的非绝热大气波动的线性方程组可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\beta_0 yv=-\dfrac{\partial\phi'}{\partial x},\\ \beta_0 yu=-\dfrac{\partial\phi'}{\partial y},\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial\phi'}{\partial z}\right)+N^2w=\eta N^2 w_B\end{cases}\qquad(\phi'\equiv p'/\rho_0).\tag{13.234}$$

方程组(13.234)的头两式消去 u 有

$$\beta_0^2y^2v=-\left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial y}-\beta_0 y\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi'.\tag{13.235}$$

上式对 y 微商得

$$\beta_0^2y^2\frac{\partial v}{\partial y}+2\beta_0^2yv=-\left(\frac{\partial^3}{\partial t\partial y^2}-\beta_0 y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-\beta_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi'.\tag{13.236}$$

利用方程组(13.234)的第二式，上式右端的$\dfrac{\partial\phi'}{\partial y}$用$-\beta_0 yu$ 代替，得

$$\beta_0^2y^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\beta_0^2yv=-\frac{\partial^3\phi'}{\partial t\partial y^2}+\beta_0\frac{\partial\phi'}{\partial x}.\tag{13.237}$$

利用(13.235)式，上式左端第二项中的 v 用ϕ'表示，则得

$$\beta_0^2y^3\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-y\frac{\partial^3\phi'}{\partial t\partial y^2}+2\frac{\partial^2\phi'}{\partial t\partial y}-\beta_0 y\frac{\partial\phi'}{\partial x}.\tag{13.238}$$

利用方程组(13.234)的第三式，上式左端$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}$用$-\dfrac{\partial w}{\partial z}$代替，则得

$$\beta_0^2y^3\frac{\partial w}{\partial z}=\left(y\frac{\partial}{\partial y}-2\right)\frac{\partial^2\phi'}{\partial t\partial y}+\beta_0 y\frac{\partial\phi'}{\partial x}.\tag{13.239}$$

上式作$\dfrac{\partial^2}{\partial t\partial z}$运算，并利用方程组(12.234)的第四式，最后得

$$\mathscr{L}w=F,\tag{13.240}$$

其中

$$\mathscr{L}\equiv\frac{\partial}{\partial t}\left\{N^2\left(y\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2\frac{\partial}{\partial y}\right)+\beta_0^2y^3\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}+N^2\beta_0 y\frac{\partial}{\partial x},\tag{13.241}$$

$$F\equiv\eta N^2y\frac{\partial^3 w_B}{\partial t\partial y^2}-2\eta N^2\frac{\partial^2 w_B}{\partial t\partial y}+\eta N^2\beta_0 y\frac{\partial w_B}{\partial x}.\tag{13.242}$$

方程(13.240)就是我们讨论 CISK 机制下非绝热波动的基本方程.

为了便于比较，我们先说明无 CISK 加热的情况，此时 $\eta=0$，方程(13.240)化为

$$\mathscr{L}w=0,\tag{13.243}$$

这是 w 的齐次方程. 考虑 y 方向上的区间为$(-\infty,\infty)$，$y\to\pm\infty$表示远离赤道地区；z 方向取对流层 $0\leqslant z\leqslant H$，并且给以如下的边界条件：

$$w\big|_{z=0,H}=0,\quad w\big|_{y\to\pm\infty}=0. \tag{13.244}$$

考虑到方程(13.243)和边界条件(13.244)，应用正交模方法，令

$$w=W(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+nz-\omega t)}\quad (n=\pi/H). \tag{13.245}$$

将上式代入方程(13.243)和边界条件(13.244)得到

$$\begin{cases} y^2\dfrac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}y^2}-2y\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}y}-\left(\dfrac{1}{L_1^4}y^4+\dfrac{\beta_0 k}{\omega}y^2\right)W=0, \\ W\big|_{y\to\pm\infty}=0, \end{cases} \tag{13.246}$$

其中

$$L_1\equiv\sqrt{\frac{c_1}{\beta_0}}\quad\left(c_1\equiv\frac{N}{n}=\frac{NH}{\pi}\right) \tag{13.247}$$

为低纬斜压 Rossby 变形半径. 若令

$$\xi=(y/L_1)^2, \tag{13.248}$$

因

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}y}=\frac{2}{L_1^2}y\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\xi},\quad \frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\xi^2}=\frac{4}{L_1^4}y^2\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\xi^2}+\frac{2}{L_1^2}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\xi},$$

则问题(13.246)化为

$$\begin{cases} \xi\dfrac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\xi^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\xi}-\dfrac{1}{4}\left(\xi+\dfrac{kc_1}{\omega}\right)W=0, \\ W\big|_{\xi\to\infty}=0. \end{cases} \tag{13.249}$$

若再令

$$W=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi}\hat{W}, \tag{13.250}$$

因

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\xi}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi}\left(\frac{\mathrm{d}\hat{W}}{\mathrm{d}\xi}-\frac{1}{2}\hat{W}\right),\quad \frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\xi^2}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi}\left(\frac{\mathrm{d}^2\hat{W}}{\mathrm{d}\xi^2}-\frac{\mathrm{d}\hat{W}}{\mathrm{d}\xi}+\frac{1}{4}\hat{W}\right),$$

则问题(13.249)化为下列 Kummer 方程(合流超几何方程)的本征值问题

$$\begin{cases} \xi\dfrac{\mathrm{d}^2\hat{W}}{\mathrm{d}\xi^2}+(\gamma-\xi)\dfrac{\mathrm{d}\hat{W}}{\mathrm{d}\zeta}-\alpha\hat{W}=0, \\ \hat{W}\big|_{\xi\to\infty}=O(\xi^m), \end{cases} \tag{13.251}$$

其中

$$\gamma=-1/2,\quad \alpha=-1/4\left(1-\frac{kc_1}{\omega}\right). \tag{13.252}$$

因为 $\xi\to\infty$时 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi}\to 0$，则由(13.250)式，要求 $\xi\to\infty$时，$W\to 0$，这可以通过要求 $\hat{W}$ 在 $\xi\to\infty$时，按 ξ 的幂函数 ξ^m $(m\geqslant 0)$ 格式发散而实现，这样才有(13.251)的第二式.

本征值问题(13.251)的本征值为

$$\alpha = -m \quad (m = 0,1,2,\cdots), \tag{13.253}$$

相应的本征函数为

$$\hat{W} = A_m \mathrm{F}\left(-m, -\frac{1}{2}, \xi\right), \tag{13.254}$$

其中 $\mathrm{F}(\alpha, r, \xi) = \mathrm{F}\left(-m, -\frac{1}{2}, \xi\right)$ 为 Kummer 函数(合流超几何函数),A_m 为常数.

以(13.252)式中的 α 代入到(13.253)式求得圆频率为

$$\omega = \frac{kc_1}{-4m+1} \quad (m = 0,1,2,\cdots). \tag{13.255}$$

而(13.254)代入到(13.250)式,再代入到(13.245)式求得

$$w = A_m \mathrm{e}^{\frac{-y^2}{2L_1^2}} \cdot \mathrm{F}\left(-m, -\frac{1}{2}, \frac{y^2}{L_1^2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+nz-\omega t)}. \tag{13.256}$$

由(13.255)式知,当 $m=0$ 时化为

$$\omega = kc_1, \tag{13.257}$$

这显然是向东传播的低纬 Kelvin 波. 而当 $m \geqslant 1$ 时,(13.255)式包含 $\omega = -\frac{1}{3}kc_1$, $-\frac{1}{7}kc_1$, $-\frac{1}{11}kc_1$, …频率的波动;而斜压的低纬 Rossby 波的圆频率(13.126)式在超长尺度($k^2 \to 0$)的条件下包含 $\omega_R = -\frac{1}{3}kc_1$, $-\frac{1}{5}kc_1$, $-\frac{1}{7}kc_1$, …频率. 所以,我们认为在 $m \geqslant 1$ 时,(13.255)式表征的就是超长尺度的向西传播的低纬 Rossby 波.

在存在 CISK 加热,即 $\eta \neq 0$ 时,情况将会如何呢? 为简化起见,我们只考虑(13.242)式中 F 的第三项,这样,方程(13.236)写为

$$\mathscr{L} w = \eta N^2 \beta_0 y \frac{\partial w_{\mathrm{B}}}{\partial x}, \tag{13.258}$$

其中要考虑 η 随 z 的变化. 同样,应用正交模方法,但令

$$\begin{cases} w = W(y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \\ w_{\mathrm{B}} = W_{\mathrm{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \end{cases} \tag{13.259}$$

显然,当 $z = h_{\mathrm{B}}$ 时,$W = W_{\mathrm{B}}$,但我们不考虑 W_{B} 随 y 的变化.

(13.259)式代入到方程(13.258),得到

$$\omega N^2 \left(y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2\frac{\partial W}{\partial y} \right) + \omega \beta_0^2 y^3 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - N^2 k\beta_0 y W = -\eta N^2 k \beta_0 y W_{\mathrm{B}}, \tag{13.260}$$

这是 W 关于 y,z 的偏微分方程. 为了求解方便,我们应用垂直方向上的三层模式. 此模式的概图见图 13.9,其中 Δz 表示 z 方向等分层次的间隔,图 13.10 为该模式中 η 随 z 的变化图示.

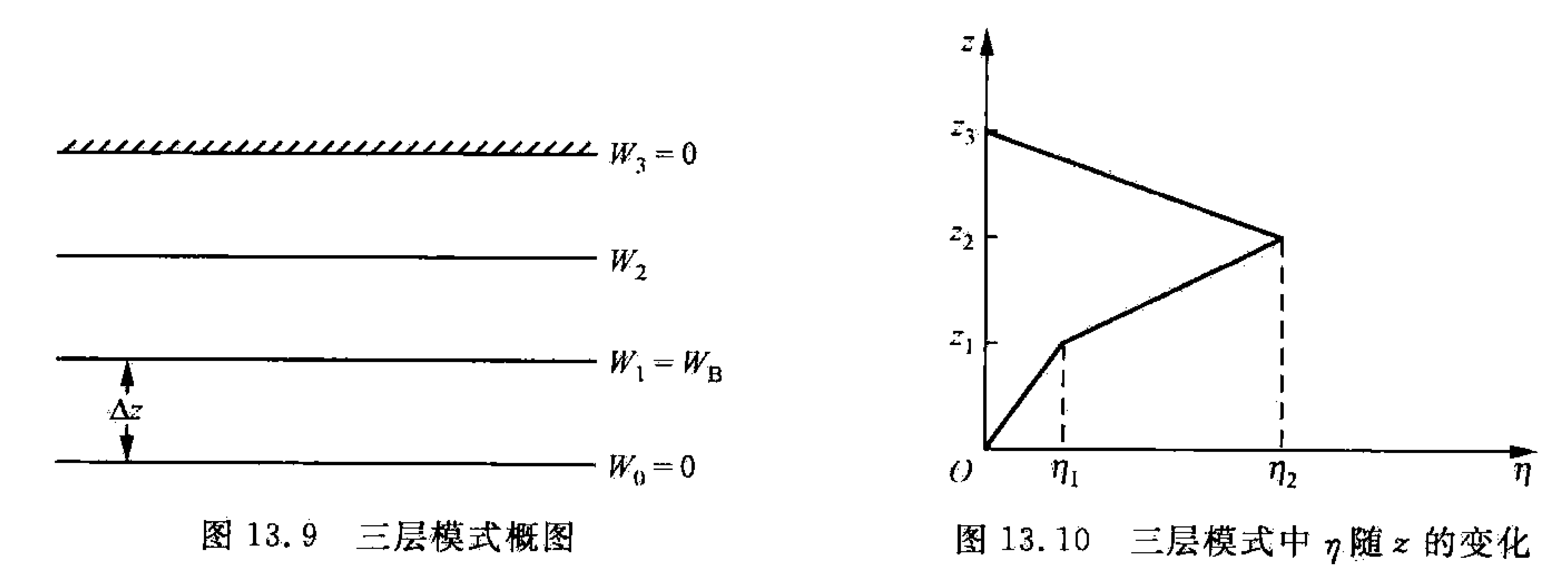


图 13.9 三层模式概图

图 13.10 三层模式中 η 随 z 的变化

我们将方程(13.260)写在三层模式的第一和第二层上，且对 z 的微商用差商代替，即

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_1 = \frac{W_2-2W_1}{(\Delta z)^2},\quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_3 = \frac{W_1-2W_2}{(\Delta z)^2}. \tag{13.261}$$

注意 $W_B=W_1$，且不考虑 W_1 随 y 的变化，则有

$$\begin{cases}\omega\beta_0^2 y^3\cdot\dfrac{W_2-2W_1}{(\Delta z)^2}-N^2k\beta_0 yW_1=-\eta_1 N^2k\beta_0 yW_1,\\ \omega N^2\left(y\dfrac{\mathrm{d}^2W_2}{\mathrm{d}y^2}-2\dfrac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}y}\right)+\omega\beta_0^2y^3\cdot\dfrac{W_1-2W_2}{(\Delta z)^2}-N^2k\beta_0yW_2=-\eta_2N^2k\beta_0yW_1.\end{cases} \tag{13.262}$$

由方程组(13.262)的第一式求得

$$W_1=\frac{\omega\beta_0 y^2}{(1-\eta_1)kN^2(\Delta z)^2+2\omega\beta_0 y^2}W_2. \tag{13.263}$$

上式代入到方程组(13.262)的第二式，得到

$$y^2\frac{\mathrm{d}^2W_2}{\mathrm{d}y^2}-2y\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}y}-G(y)W_2=0, \tag{13.264}$$

其中

$$G(y)\equiv\frac{\dfrac{3\omega^2\beta_0^2}{(\Delta z)^2}y^6+(4-2\eta_1-\eta_2)\omega N^2k\beta_0^2y^4+(1-\eta_1)k^2N^4\beta_0(\Delta z)^2y^2}{\omega N^2[(1-\eta_1)kN^2(\Delta z)^2+2\omega\beta_0y^2]}. \tag{13.265}$$

取

$$\eta_1=1, \tag{13.266}$$

(13.265)式化为

$$G(y)=\frac{1}{L_2^4}y^4+\frac{(2-\eta_2)\beta_0k}{2\omega}y^2, \tag{13.267}$$

其中

$$L_2\equiv\sqrt{\frac{c_2}{\beta_0}},\quad c_2=\sqrt{\frac{2}{3}}N\cdot\Delta z. \tag{13.268}$$

这样，方程(13.264)化为

$$y^2\frac{\mathrm{d}^2W_2}{\mathrm{d}y^2}-2y\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}y}-\left[\frac{1}{L_2^4}y^4+\frac{\left(1-\frac{\eta_2}{2}\right)\beta_0 k}{\omega}y^2\right]W_2=0. \tag{13.269}$$

方程(13.269)在形式上完全同(13.246)式的第一个方程，只是 W 换成了 W_2，L_1 换成了 L_2，ω 换成了 $\omega\Big/\left(1-\frac{\eta_2}{2}\right)$，则依据(13.255)式求得圆频率为

$$\omega=\frac{\left(1-\frac{\eta_2}{2}\right)kc_2}{-4m+1}\quad(m=0,1,2,\cdots). \tag{13.270}$$

而依据(13.256)，并注意 $\eta_1=1$ 时，$W_1=\frac{1}{2}W_2=W_{\mathrm{B}}$，则求得

$$w_2=B_m\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2L_2^2}}\cdot\mathrm{F}\left(-m,-\frac{1}{2},\frac{y^2}{L_2^2}\right)(2W_{\mathrm{B}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \tag{13.271}$$

其中 B_m 为常数.

由(13.270)式知，当 $m=0$ 时化为

$$\omega=\left(1-\frac{\eta_2}{2}\right)kc_2. \tag{13.272}$$

它表征有 CISK 加热的低纬 Kelvin 波，称为 CISK-Kelvin 波. 只要 $0<\eta_2<2$，则 $\omega>0$，且数值要小于 $\eta_2=0$ 时的 kc_2，由此可见，只要 $0<\eta_2<2$. CISK-Kelvin 波向东传播，且比无 CISK 加热时圆频率的数值要小. 当然，$\eta_2>2$ 时，$\omega<0$，CISK-Kelvin 波向西传播.

由(13.270)式还知，当 $m\geqslant 1$ 时，它表征的是有 CISK 加热的超长尺度的低纬 Rossby 波，称为 CISK-Rossby 波. 只要 $0<\eta_2<2$，则 $\omega<0$ 且其绝对值也要小于 $\eta_2=0$ 时的 $\frac{kc_2}{-4m+1}$，因而只要 $0<\eta_2<2$，CISK-Rossby 波向西传播，且比无 CISK 加热时的圆频率的绝对值要小. 当然，$\eta_2>2$ 时，$\omega>0$，CISK-Rossby 波向东传播.

从 CISK 加热的简单例子中充分说明：非绝热波是低频波，特别是长周期的低频波的引导机制，是大气运动中长期过程和全球气候演变的理论基础. 同时，非绝热波改变或扩大了原绝热波的波速和传播方向.

复习思考题

1. 低纬大气运动有哪些特点？
2. 低纬大气运动的 Ro，Ri 各是多少？
3. 低纬大气地转风关系成立否？为什么？在定常时低纬大气较准确的流场与气压场的关系应是什么？
4. 低纬大气惯性振荡的圆频率与周期各是多少？它与中高纬惯性振荡有何

区别?

5. 什么是低纬 Kelvin 波? 其风场、气压场有哪些特点?

6. 什么是混合 Rossby-重力波? 其风场、气压场有哪些特点?

7. 什么是 ITCZ? 它在低纬起什么作用?

8. 什么是 CISK? 它与通常条件下的不稳定有何不同? 说明 CISK 使得大尺度扰动和热带气旋同时发展的过程?

9. 用角动量守恒原理说明台风眼的存在.

10. 用热成风方程说明台风的暖心结构.

习　题

1. 对低纬大尺度运动的涡度方程作尺度分析,证明:

(1) 无凝结时,涡度方程可简化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\zeta+\beta_0 v=0,$$

其中 u,v 可分别表为 $u=-\dfrac{\partial\psi}{\partial y},v=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$.

(2) 有凝结时,涡度方程可简化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\zeta+\beta_0 v+(f+\zeta)D=0.$$

2. 证明:对低纬 Kelvin 波,使 ϕ 的振幅的 e 衰减(e-folding)的经向距离为

$$y_c=\sqrt{2}L_0\quad (L_0\equiv\sqrt{c_0/\beta_0}).$$

3. 证明:对混合 Rossby-重力外波

$$k_1\neq 1/\sqrt{2}\quad (\text{或 } k\neq 1/\sqrt{2}L_0),$$

否则 $\omega_1=-k_1$(或 $\omega=-k\beta_0L_0^2=-kc_0$).

4. 求低纬大气 Kelvin 波和 Yanai 波的群速度.

5. 对于低纬正压大气线性波动

(1) 证明(13.90)式(取 $\delta=1$)的有量纲形式为

$$-\frac{kc_0}{\omega}+\frac{\omega^2}{\beta_0c_0}-\frac{k^2c_0}{\beta_0}=2m+1.$$

(2) 由上式证明 $k=-\dfrac{\beta_0}{2\omega}\pm\sqrt{\left(\dfrac{\beta_0}{\omega}-\dfrac{2\omega}{c_0}\right)^2-8m\dfrac{\beta_0}{c_0}}$.

(3) 求群速度 c_g,并证明当 $\omega=-\beta_0/2k$ 时,$c_g=0$.

(4) 在 $c_g=0$ 的条件下,证明

$$\omega^2=\frac{\beta_0c_0}{2}(2m+1\pm 2\sqrt{m(m+1)})=\frac{\beta_0c_0}{2}(\sqrt{m+1}\pm\sqrt{m})^2,$$

并且有对低纬惯性-重力外波

$$|\omega_{IG}|_{\min}=\sqrt{\frac{\beta_0 c_0}{2}}(\sqrt{m+1}+\sqrt{m}),$$

对低纬 Rossby 波

$$|\omega_R|_{\max}=\sqrt{\frac{\beta_0 c_0}{2}}(\sqrt{m+1}-\sqrt{m}).$$

6. 低纬大气的正压模式的线性方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\beta_0 yv=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial x},\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+\beta_0 yu=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial y},\\ \dfrac{\partial \phi'}{\partial t}+c_0^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=0.\end{cases}$$

取 $t=\dfrac{1}{\sqrt{2\beta_0 c_0}}t_1$，$(x,y)=\sqrt{\dfrac{c_0}{2\beta_0}}(x_1,y_1)$，$(u,v)=c_0(u_1,v_1)$，$\phi'=c_0^2\phi_1'$，证明上式的无量纲形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t_1}-\dfrac{1}{2}y_1 u_1=-\dfrac{\partial \phi_1'}{\partial x_1},\\ \dfrac{\partial v_1}{\partial t_1}+\dfrac{1}{2}y_1 u_1=-\dfrac{\partial \phi_1'}{\partial y_1},\\ \dfrac{\partial \phi_1'}{\partial t_1}+\left(\dfrac{\partial u_1'}{\partial x_1}+\dfrac{\partial v_1'}{\partial y_1}\right)=0.\end{cases}$$

7. 如果令

$$q=\frac{\phi'}{c_0}+u,\quad r=\frac{\phi'}{c_0}-u,$$

证明低纬大气正压模式的线性方程组可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial q}{\partial t}+c_0\dfrac{\partial q}{\partial x}+c_0\dfrac{\partial v}{\partial y}-\beta_0 yv=0,\\ \dfrac{\partial r}{\partial t}-c_0\dfrac{\partial r}{\partial x}+c_0\dfrac{\partial v}{\partial y}+\beta_0 yv=0,\\ 2\dfrac{\partial v}{\partial t}+c_0\dfrac{\partial}{\partial y}(q+r)+\beta_0 y(q-r)=0.\end{cases}$$

而按上题的尺度，证明它的无量纲形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial q_1}{\partial t_1}+\dfrac{\partial q_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial v_1}{\partial y_1}-\dfrac{1}{2}y_1 v_1=0,\\ \dfrac{\partial r_1}{\partial t_1}-\dfrac{\partial r_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial v_1}{\partial y_1}+\dfrac{1}{2}y_1 u_1=0,\\ 2\dfrac{\partial v_1}{\partial t_1}+\dfrac{\partial}{\partial y_1}(q_1+r_1)+\dfrac{1}{2}y_1(q_1-r_1)=0.\end{cases}$$

8. 显然，第 6 题的低纬大气正压模式的线性方程组可以化为

$$\mathscr{L}v = 0,$$

其中

$$\mathscr{L} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \beta_0^2 y^2\right\} - \beta_0 c_0^2 \frac{\partial}{\partial x}.$$

证明在半地转近似下 $\mathscr{L}$ 退化为

$$\mathscr{L} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\beta_0^2 y^2}{c_0^2}\right) + \beta_0 \frac{\partial}{\partial x}.$$

9. 如第 6 题的无量纲化的低纬正压模式的线性方程组，证明它可以化为

$$\mathscr{L}_1 v_1 = 0,$$

其中

$$\mathscr{L}_1 \equiv \frac{\partial}{\partial t_1}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right) + \frac{1}{4} y_1^2\right\} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1},$$

而且在半地转假定下，$\mathscr{L}_1$ 退化为

$$\mathscr{L}_1 \equiv \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \frac{1}{4} y_1^2\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

10. 证明：半地转近似下的正压模式的线性方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \beta_0 y v = -\dfrac{\partial \phi'}{\partial x}, \\ \beta_0 y u = -\dfrac{\partial \phi'}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial \phi'}{\partial t} + c_0^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \end{cases}$$

可以化为

$$\mathscr{L}\phi' = 0,$$

其中

$$\mathscr{L} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{2}{y}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\beta_0^2}{c_0^2} y^2\right) + \beta_0 \frac{\partial}{\partial x}.$$

11. 分别写出低纬惯性-重力内波和低纬斜压 Rossby 波所满足的方程.

12. 证明半地转近似中，可以滤去低纬惯性-重力内波而保留低纬超长尺度的低纬斜压 Rossby 波和 Kelvin 波，并写出此时超长尺度的低纬斜压 Rossby 波的圆频率.

13. 对于混合 Rossby-重力外波或 Yanai 波，证明

$$u = \phi'/c_0, \quad q = 2u, \quad r = 0.$$

提示：$m=0$ 并利用(13.117)式和第 7 题.

14. 利用上题和第 7 题，证明 Yanai 波满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+c_0\dfrac{\partial u}{\partial x}-\beta_0 yv=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+c_0\dfrac{\partial u}{\partial y}+\beta_0 yu=0.\end{cases}$$

因而有

$$\mathscr{L}_{\mathrm{Y}}v=0,$$

其中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{Y}}\equiv\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}+c_0\frac{\partial}{\partial x}\right)+\beta_0 c_0.$$

提示：$q=2u, r=0, c_0\dfrac{\partial v}{\partial y}+\beta_0 yv=0$.

15. 由方程(13.47)，若设

$$\phi'=F_1(x-c_0t,y)+F_2(x+c_0t,y),$$

证明：

$$F_1(x-c_0t,y)=F(x-c_0t)\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2L_0^2}},$$

$$F_2(x+c_0t,y)=G(x+c_0t)\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2L_0^2}}\quad\left(L_0\equiv\sqrt{\frac{c_0}{\beta_0}}\right).$$

16. 用下列 p 坐标系的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=-\dfrac{\partial\phi'}{\partial x},\\ \beta_0 yu=-\dfrac{\partial\phi'}{\partial y},\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial\omega}{\partial p}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial\phi'}{\partial p}\right)+\sigma\omega=0,\end{cases}$$

在 $y\to\infty,\phi'\to 0$ 的条件下求解 Kelvin 波.

17. 用下列 p 坐标系的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\beta_0 yv=-\dfrac{\partial\phi'}{\partial x},\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+\beta_0 yu=-\dfrac{\partial\phi'}{\partial y},\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial\omega}{\partial p}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial\phi'}{\partial p}\right)+\sigma\omega=0,\end{cases}$$

在 $y\to\pm\infty, v=0$ 的条件下求解一般低纬大气波动.

主要参考书目

Andrews D G, Holton J R, Leovy C B. Middle atmosphere dynamics. Academic Press, 1987.

Gill A E. Atmosphere-ocean dynamics. Academic Press, 1982.

Holton J R. An introduction to dynamic meteorology. Academic Press, 1992.

Kuo H L (郭晓岚). Dynamics of quasi-geostrophic flows and instability theory//Advances in applied mechanics, vol. 13. Academic Press, 1973.

刘式适,刘式达. 物理学中的非线性方程. 北京:北京大学出版社,2000.

刘式适,刘式达. 特殊函数(第二版). 北京:气象出版社,2002.

Pedlosky J. Geophysical fluid dynamics. Springer-Verlag, 1986.

Pedlosky J. Waves in the ocean and atmosphere. Springer-Verlag, 2003.

杨大升. 动力气象学. 北京:气象出版社,1983.

Zeitlin V. Nonlinear dynamics of rotating shallow water, method and advances. Elsevier, 2007.